



# Università degli Studi di Catania

Facoltà di Ingegneria

Dottorato di Ricerca in Meccanica Strutturale

Ciclo XXIV

*“Analisi Teorico Sperimentale di Materiali Iperelastici”*

Graziano Basile

**Coordinatore**

*Prof. Ing. A. Risitano*

**Tutor**

*Prof. Ing. G. La Rosa*

---

CATANIA

2011

# Indice

---

<b>1</b>	<b>Meccanica del continuo e legami costitutivi</b>	<b>Pag.</b>	<b>5</b>
1.1	Deformazione	Pag.	6
1.2	Equazione di bilancio	Pag.	8
1.3	Legame costitutivo	Pag.	13
1.3.1	Materiale semplice	Pag.	14
1.3.2	Materiale elastico ed iperelastico	Pag.	15
1.3.3	Iperelastico incomprimibile e comprimibile	Pag.	18
1.3.4	Isotropia dei materiali iperelastici	Pag.	21
<b>2</b>	<b>Dalla teoria Gaussiana ai modelli su Base Invariante</b>	<b>Pag.</b>	<b>24</b>
2.1	Modello statistico	Pag.	25
2.2	Modello di Arruda e Boyce	Pag.	31
2.3	Modelli su base invariante	Pag.	31
2.4	Prove meccaniche	Pag.	34
2.5	Calcolo delle costanti del modello	Pag.	37
<b>3</b>	<b>Calcolo della sollecitazione</b>	<b>Pag.</b>	<b>44</b>
<b>4</b>	<b>Rilievo ottico delle grandi deformazioni</b>	<b>Pag.</b>	<b>52</b>
4.1	Image processing	Pag.	52
4.2	Pre - processing	Pag.	53
4.3	Post – processing	Pag.	58
<b>5</b>	<b>Caratterizzazione biassiale</b>	<b>Pag.</b>	<b>61</b>
5.1	Sistemi di prova biassiale	Pag.	62
5.2	Sviluppo di un sistema di trazione biassiale	Pag.	70
5.3	Sincronizzazione dati	Pag.	72
5.4	Codice di sincronizzazione	Pag.	75
<b>6</b>	<b>Prove meccaniche</b>	<b>Pag.</b>	<b>82</b>
6.1	Test di trazione monoassiale	Pag.	84
6.2	Risultati test monoassiali	Pag.	90
6.2.1	Coeff. di Poisson	Pag.	92
6.3	Test di trazione planare	Pag.	95
6.3.1	Risultati test planare	Pag.	98
6.4	Test biassiale	Pag.	103
6.4.1	Risultati test biassiale	Pag.	109
<b>7</b>	<b>Analisi numerica</b>	<b>Pag.</b>	<b>115</b>
7.1	Determinazione dei parametri e scelta del modello	Pag.	115
7.2	Analisi FEM mono - assiale	Pag.	121
7.2.1	Analisi dei risultati	Pag.	126
7.3	Analisi FEM biassiale	Pag.	130
7.3.1	Analisi dei risultati	Pag.	134
<b>8</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>Pag.</b>	

# Introduzione

---

Il presente lavoro è incentrato sulla caratterizzazione di materiali a comportamento iperelastico, quindi volto alla determinazione di tutti quei parametri che definiscono le sue proprietà meccaniche.

Qualunque sia la legge costitutiva del materiale vi è un parametro di particolare importanza che tiene conto delle deformazioni volumetriche e che incide in maniera significativa sulla valutazione delle tensioni.

In generale, per materiali che hanno un comportamento che rientra nella definizione di iperelastico, diventa pratica comune imporre al modello la restrizione di incomprimibilità con la conseguente errata valutazione delle deformazioni e delle reazioni al contorno imposte.

Per quanto detto, la determinazione dei coefficienti del modello caratterizzante il solido, ricercato mediante delle prove di non facile realizzazione, impone anche un test di comprimibilità.

A questo punto l'impossibilità di poter realizzare test di tipo volumetrici ci porta a pensare a come poter meglio approssimare i coefficienti mancanti mediante assunzioni sulle prove canoniche.

I test usuali sono incentrati sulla determinazione di curve *stress-strain* mediante sistemi che registrano le reazioni agli afferraggi e valutano lo *strain* nel caso di grandi deformazioni mediante estensimetri di tipo ottico(non a contatto). Si conclude di conseguenza che, essendo le deformazioni principali legate fra di loro, in funzione del tipo di sollecitazione, l'osservazione della deformazione su una prova, che non sia la sola classica prova di trazione monoassiale, porta ad una valutazione affidabile della deformazione volumetrica.

L'osservazione della deformazione piana in una prova biassiale confrontata con una analisi agli elementi finiti, con riguardo alle reazioni lette delle celle di carico, permette di individuare il coeff. mancante e di valutare l'errore che si commetterebbe nell'imporre la restrizione di incomprimibilità al modello.

Nel presente lavoro è stato testato un silicone commerciale per verificare la validità dei modelli studiati.

Infine, l'importanza di poter valutare la componente da cui dipende la variazione volumetrica non è da sottovalutare nella definizione del materiale, soprattutto nei casi in cui quest'ultimo viene impiegato per la realizzazione di componenti protesici, come ad esempio di *stent*, *cuscinetti intervertebrali*, ecc..

Per la stesura del presente lavoro sono stati eseguiti dei test su provini piani, di tipo non convenzionali (non secondo normativa), necessari alla definizione del modello. Per tale ragione sono stati realizzati dei sistemi per la sollecitazione e per l'acquisizione di grandi deformazioni, ossia la messa a punto di *set-up* dedicati ad ogni tipo di test meccanico.

Nei primi due capitoli del presente lavoro viene esposto lo sviluppo teorico dei materiali iperelastici, con particolare attenzione al calcolo della sollecitazione nei casi di materiale comprimibile e incomprimibile. Segue l'esposizione della procedura ottica utilizzata per il rilievo delle deformazioni, da qui si passa alla discussione ed all'analisi dei sistemi di test biassiali presenti in letteratura, nell'ambito del quale viene esposto il sistema proposto ed utilizzato nel presente lavoro. Particolare attenzione è stata rivolta alla sincronizzazione dei dati.

Infine, negli ultimi due capitoli vengono esposti i test e le analisi numeriche effettuate.

# 1

## Meccanica del Continuo e Legami Costitutivi

# 1. Meccanica del Continuo e Legami Costitutivi

---

Lo studio della *meccanica del continuo* o del continuo secondo *Cauchy* riveste un ruolo decisivo nella scienza delle costruzioni, dove i modelli strutturali sono di fondamentale importanza.

Nello studio del modello si possono distinguere tre distinte fasi:

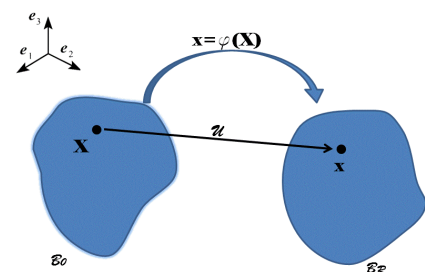
- Caratterizzazione Cinematica
- Relazioni di Bilancio
- Relazioni costitutive

Mentre per le prime due fasi si prescinde dal fare riferimento al materiale che costituisce il continuo, nella terza fase si fa particolare attenzione al comportamento reale e quindi a creare una classificazione di continui.

Definendo il continuo come un sistema materiale dove è possibile identificare i suoi punti (*punti materiali del sistema*) allora si può pensare al continuo come una regione dello spazio Euclideo, e quindi lo spazio fisico dove valgono le definizioni di distanza, lunghezza ed angolo, detta *Configurazione*.

Indicando con  $\mathcal{B}$  il corpo continuo come una regione dello spazio prima definito, definiamo con  $\mathcal{B}_0$  la *configurazione di riferimento* al tempo  $t=0$  e con  $\mathcal{B}_t$  la *configurazione attuale o corrente*, al tempo  $t$  generico.

Detto ciò, un punto materiale  $\mathbf{X}$  appartenente alla configurazione di riferimento  $\mathcal{B}_0$ , al tempo  $t$  si troverà in  $\mathbf{x}$  nella configurazione corrente  $\mathcal{B}_t$ . In termini matematici, la posizione occupata al tempo  $t$  è descritta dalla funzione vettoriale  $\varphi$  (*funzione di trasporto*) seguente, che lega le due configurazioni [1].



*fig. 1.01 Configurazione di riferimento e corrente*

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) \quad (1.01)$$

Affinché la funzione rappresenti correttamente la variazione di configurazione, deve rispettare le caratteristiche fisiche e quindi deve tener conto del fatto che il materiale non si strappi o che avvengano compenetrazione di materiale e che ogni punto si mantenga sempre distinto dagli altri.

Per le condizioni prima dette la funzione deve essere necessariamente *biunivoca* in modo che esista la sua inversa (1.02) e che entrambe, la funzione e la sua inversa, siano *continue* e *regolari* in modo che possano essere differenziabili.

$$\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}) \quad (1.02)$$

Da quanto detto una sequenza continua di spostamenti che portano il corpo ad occupare diverse configurazioni al variare del tempo  $\mathbf{t}$  è pertanto descritta dall'applicazione, funzione del tempo, che ne rappresenti il moto del punto materiale.

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{t}) \quad (1.03)$$

## 1.1. Deformazione

Data la funzione  $\varphi$ (1.01) è possibile definire la deformazione, tenendo conto dello spostamento del punto nel suo intorno e che  $\mathbf{U}(\mathbf{X})$  è l'applicazione vettoriale che ne descrive lo *spostamento*[1] [8].

Partendo dalla configurazione di riferimento  $\mathcal{E}_0$  e dall'applicazione  $\varphi(\mathbf{X})$  che ne definisce la posizione in configurazione corrente  $\mathcal{E}_t$  si definisce *deformazione*<sup>1</sup>, nell'intorno del punto, il gradiente di  $\varphi(\mathbf{X})$ :

---

<sup>1</sup> R. W. Ogden, Non linear elastic deformation, pp. 83 - 88

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{grad} \varphi = \nabla \varphi \quad (1.04)$$

oppure, in funzione degli spostamenti:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{U}(\mathbf{X}) \quad (1.05)$$

dove  $\nabla \mathbf{U}(\mathbf{X})$  è il gradiente degli spostamenti  $\mathbf{I}$  è la matrice identità.

Per la condizione fisica prima accennata di non compenetrazione o lacerazione del materiale, si ha che lo *Jacobiano*  $\mathbf{J}$  deve essere necessariamente non nullo. Tale condizione sussiste se l'applicazione  $\varphi(\mathbf{X})$  è invertibile e derivabile.

$$\mathbf{J} = \det \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} \right] = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}) \neq 0 \quad (1.06)$$

Poiché il campo di deformazione di un continuo è costituito dalla componente di deformazione pura e da una componente rigida, è possibile scomporre le due quantità tenendo conto del teorema di decomposizione polare, che permette di valutare le due componenti separatamente<sup>2</sup>:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (1.07)$$

dove  $\mathbf{R}$  è il tensore ortogonale che descrive la rotazione,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  sono i tensori destro e sinistro, positivi e simmetrici che individuano la deformazione locale.

Una descrizione indipendente dalle rotazioni, e quindi dal tensore  $\mathbf{R}$ , deve essere funzione dei soli tensori  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$ . È quindi possibile fare riferimento a misure tensoriali espresse in funzione delle sole deformazioni pure.

Un'espressione di deformazione che tiene conto in modo indipendente dalle rotazioni è la seguente espressione (1.08):

---

<sup>2</sup> R. W. Ogden, Non Linear elastic deformation, the polar decomposition theorem, pp. 93 - 94



$$\mathbf{E}_n = \frac{1}{n} (\mathbf{U}^n - \mathbf{I}) \quad (1.08)$$

Che per  $n=1$  rappresenta il *tensore di Biot*, mentre per  $n=2$  il *tensore di Green*.

Quest'ultimo, definito solo in termini di gradiente di spostamento o di deformazione (1.09), esclude appunto la rotazione. Questo concetto risulta importante perché permette una semplice rappresentazione di misure locali di deformazione pura (dilatazione, variazioni volumetriche).

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^t \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^t + \nabla \mathbf{U}^t \nabla \mathbf{U}) \end{aligned} \quad (1.09)$$

Osservando le espressioni prima descritte, si nota, infatti, che se il corpo subisce delle semplici rotazioni il tensore rimane nullo.

Nel caso di piccole deformazioni e quindi di piccoli spostamenti assume particolare importanza la parte simmetrica del tensore di Green:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^t) \\ \mathbf{E}_2 &\approx \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.10)$$

## 1.2. Equazioni di bilancio

Oltre alla definizione del moto, assumono particolare importanza le *equazioni di bilancio*[1] che, accoppiate all'equazione di *legame costitutivo*, caratterizzano un determinato solido e quindi ne completano il quadro delle relazioni che lo caratterizzano.

Definita la massa come numero reale positivo con proprietà di continuità e legato al volume del corpo, (se il volume tende a zero anche la massa tende ad annullarsi) è

possibile individuare l'esistenza di una funzione definita o definibile su una generica configurazione del corpo.

Indicando con  $m(\mathbf{P})$  la massa di una generica porzione  $\mathbf{P}$  del corpo  $\mathcal{B}$  e con  $\rho(\cdot) > 0$  la *densità di massa*, la misura di *densità di massa* è data dall'integrale di volume:

$$m(P) = \int_{\varphi(X)} \rho(X) dv \quad (1.11)$$

Indicando con forze i vettori che definiscono le interazioni fra le parti del corpo, nel caso di continuo di Cauchy, si considerano due tipi di forze:

- **Forse di massa**, interne al corpo
- **Forze di contatto**, applicate sulla frontiera del corpo  $\partial\varphi(\mathbf{X})$

Definita la massa e le forze esterne, è possibile scrivere la prima equazione di bilancio, la quale è derivata dal principio di conservazione di massa.

Nella definizione della conservazione di massa si tiene quindi conto del fatto che nelle fasi di passaggio dalla configurazione *iniziale* o di *riferimento*  $\mathcal{B}$  alla configurazione *corrente*  $\mathcal{B}_t$  non vi è cambiamento di massa.

In termini globali è possibile scrivere<sup>3</sup>:

$$m(P) = \int_{B_0} \rho_0(\mathbf{X}) dv = \int_{\varphi(P)} \rho(x, t) dv \quad (1.12)$$

dove con  $\rho_0(\mathbf{X})$  viene indicata la *densità di massa* nella configurazione di *riferimento* e  $\rho_0(x, t)$  la *densità di massa* in configurazione *attuale*. La (1.12) può essere riscritta in maniera equivalente, nella seguente forma:

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi(P)} \rho(x, t) dv = 0 \quad (1.13)$$

---

<sup>3</sup> R. W. Ogden, Non linear elastic deformation, pp. 141

L'espressione (1.13) può essere sia in forma *Lagrangiana* che *Euleriana*, facendo quindi riferimento alla configurazione di *riferimento* o a quella *attuale*, come segue:

$$\rho_0(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{J}(\mathbf{X}, t) \quad , \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B} \quad (1.14)$$

$$\frac{d}{dt} \rho(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_R \quad (1.15)$$

Descrittala legge di *conservazione di massa* è quindi possibile definire la conservazione della *quantità di moto* (1.16) e del *momento angolare* (1.17) rispetto ad un polo.

Queste ultime, derivandole rispetto al tempo(1.18-19), uguagliano la risultante delle forze e dei momenti meccanici<sup>4</sup>.

$$q(P, t) = \int_{\varphi(P, t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv \quad (1.16)$$

$$h(P, t) = \int_{\varphi(P, t)} (\mathbf{x} - o) \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv \quad (1.17)$$

$$\frac{d}{dt} q(P, t) = r^f(P, t) + r^m(P, t) \quad (1.18)$$

$$\frac{d}{dt} h(P, t) = m_0^f(P, t) + m_0^m(P, t) \quad (1.19)$$

dove l'esponente *f* sulle componenti a secondo membro delle (1.18)e (1.19) indicano le forze di contatto alla frontiera e l'esponente *m* le forze di massa.

Allo stesso modo, identificando con  $\psi$  una quantità vettoriale (che può essere anche un tensore) associata ad un flusso  $\mathcal{S}$  e con  $\mathbf{f}$  le forze interne, è possibile scrive, in forma generale, le equazione di bilancio per il solido  $\mathcal{B}(\mathbf{t})$  e al suo contorno  $\partial \mathcal{B}(\mathbf{t})$  nel seguente modo:

---

<sup>4</sup> R. W. Odgen, Non linear elastic deformation, pp. 143 - 145

$$\frac{d}{dt} \int_B \boldsymbol{\psi} d\omega = \int_B \mathbf{f} d\omega + \int_{\partial B} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} d\omega \quad (1.20)$$

Per il bilancio di moto e del momento angolare, sostituendo alle forze  $\mathbf{f}$  l'accelerazione di gravità e ad  $\mathbf{S}$  il vettore  $\boldsymbol{\sigma}$  accelerazione di gravità, si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho \mathbf{v} dv = \int_{\partial B} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da + \int_B \rho \mathbf{g} d\omega \quad (1.21)$$

$$\frac{d}{dt} \int_B (\mathbf{x} - \mathbf{o}) \times \rho \mathbf{v} dv = \int_{\partial B} (\mathbf{x} - \mathbf{o}) \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da + \int_B (\mathbf{x} - \mathbf{o}) \times \rho \mathbf{g} d\omega \quad (1.22)$$

dove nella (1.21) e nella (1.22) il termine  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  è il tensore delle tensioni  $\mathbf{T}$ .

Sapendo che per il tensore delle tensioni, vale la seguente (Lemma di *Cauchy*):

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}) = -\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (1.23)$$

Nota che il tensore delle tensioni è simmetrico la relazione (1.21) si può riscrivere come segue:

$$\underline{\text{div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a}} \quad (1.24)$$

dove  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono i tensori o i vettori associati alle forze interne e alle forze esterne.

La (1.24) vale per ogni punto del corpo nella configurazione  $\mathcal{B}$  attuale e quindi per  $\mathcal{B}(\mathbf{t})$ .

È possibile riscrivere le precedenti, imponendo le trasformazioni di Piola, ovvero in funzione della *configurazione di riferimento o attuale (trasformando da materiale a spaziale)*, facendo riferimento alla notazione generale utilizzata nella (1.20)[6]:

$$\boldsymbol{\psi}_R = J\boldsymbol{\psi} \quad \mathbf{f}_R = J\mathbf{f} \quad \mathbf{g}_R = J\mathbf{g} \quad \mathbf{S}_R = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{S} \quad (1.24)$$

Questa operazione è anche detta *operazione di push - forward*, ovvero di portare avanti dalla configurazione *materiale* alla configurazione *spaziale*.

E quindi, per la legge di conservazione della quantità di moto, per  $\mathbf{N}$  vettore normale al contorno<sup>5</sup>:

$$\frac{d}{dt} \int_{B_R(t)} \rho_R \mathbf{a} dv = \int_{\partial B_R(t)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} da + \int_{B_R(t)} \rho_R \mathbf{b} d\omega \quad (1.25)$$

Analogamente per il momento della quantità di moto si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{B_R(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{o}) \times \rho_R \mathbf{a} dv &= \int_{\partial B_R(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{o}) \times \mathbf{J} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} da + \\ &+ \int_{B_R(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{o}) \times \rho_R \mathbf{b} d\omega \end{aligned} \quad (1.25\text{-bis})$$

Dalle precedenti possiamo definire il primo tensore di *Piola - Kirchhoff*<sup>6</sup>, non simmetrico, indicando con  $\mathbf{P}$ (1.26), che è la trasformazione da *materiale* ad *spaziale* del tensore  $\mathbf{T}$  di sollecitazione nella sua configurazione di riferimento a tempo  $\mathbf{t}=0$  *materiale*, ed il secondo tensore di *Piola-Kirchhoff*, simmetrico di *Piola - Kirchhoff* indicato con  $\mathbf{S}$ (1.27):

$$\mathbf{P} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} \quad (1.27)$$

<sup>5</sup> R. W. Ogden, Non linear elastic deformation, pp. 153 - 154

<sup>6</sup> R. W. Ogden, Non linear elastic deformation, p. 156

Introducendo questi ultimi termini, in funzione della *configurazione attuale*  $\mathfrak{B}(\mathbf{t})$  (ovvero *spaziale*), analogamente a quanto fatto per la derivazione della (1.24), si ottiene la nuova equazione di bilancio della quantità di moto come segue:

$$\underline{\text{div } \mathbf{P} + \rho_R \mathbf{b} = \rho_R \mathbf{a}} \quad (1.28)$$

Come si può notare quest'ultima non è più in funzione del tensore di deformazione  $\mathbf{T}$ , ma del 1° tensore di Deformazione di *Piola – Kirchhoff*  $\mathbf{P}$ .

Volendo riferire la (2.28) al 2° tensore di *Piola – Kirchhoff*  $\mathbf{S}$ , e quindi sostituendo la (1.27) nella (1.28), otteniamo:

$$\underline{\text{div } (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) + \rho_R \mathbf{b} = \rho_R \mathbf{a}} \quad (1.29)$$

### 1.3. Legame Costitutivo

Nel precedente paragrafo sono state ricavate le equazioni di bilancio e di moto necessarie a caratterizzare il solido, sia rispetto alla configurazione iniziale (materiale) che alla configurazione attuale (spaziale), ovvero in coordinate *Lagrangiane* che *Euleriane*.

$$\underline{\frac{d}{dt} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \rho(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \text{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{B}_R} \quad (1.15)$$

$$\underline{\text{div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a}} \quad (1.24)$$

Rivedendo le 4 equazioni scalari, di bilancio (1.15) e (1.24), in termini *Euleriani*, queste risultano insufficienti alla definizione del solido presentando 10 incognite ( $\rho(\cdot)$ , 6 per  $T_{ij}$  e 3 per il moto). Risulta quindi necessario introdurre delle equazioni di supporto che permettano non solo la risoluzione al sistema ma dare anche le caratteristiche fisiche del solido in esame (Restrizioni di *WalterNoll*).

Tali restrizioni portano alla definizione e quindi alla classificazione dei materiali. In generale i materiali possono classificarsi nelle seguenti famiglie:

- Materiale Semplice
- Materiale Elastico
- Materiale Iperelastico

Per ogni famiglia di materiale è possibile definire un legame costitutivo che ne definisca il legame *sforzo-deformazione*.

### 1.3.1. Materiale Semplice

Nel caso di materiale *semplice* il tensore degli sforzi  $\mathbf{T}$ , riferito ad un generico punto  $\mathbf{x}$  appartenente al solido  $\mathcal{B}$ , in un determinato istante  $\mathbf{t}$ , dipenderà dalla storia del gradiente di deformazione  $\mathbf{F}(\mathbf{t})$ , e cioè di come questo evolve nel tempo<sup>7</sup>.

In generale possiamo, scrivere, per  $\mathbf{x}$  appartenente alla configurazione *attuale(spaziale)* ed  $\mathbf{X}$  alla configurazione di *riferimento (materiale)*, la seguente espressione:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbb{T}(\mathbf{F}_{\mathbf{t}}, \mathbf{X}) \tag{1.30}$$

Ricordando la decomposizione polare del tensore di deformazione  $\mathbf{F}$ , l'eq. (2.30) si può riscrivere come segue:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{R}(\mathbf{t}) \cdot \mathbb{T}(\mathbf{U}_{\mathbf{t}}, \mathbf{X}) \cdot \mathbf{R}^T(\mathbf{t}) \tag{1.31}$$

Ricordando la definizione del 2° tensore di Piola – *Kirchhoff*  $\mathbf{S}$  e scrivendo in funzione del tensore di *Green* (in questo caso mettiamo il pedice  $\mathbf{t}$  per indicare la variazione nel tempo), in modo da tener in conto solo le deformazioni, sia ha la seguente forma compatta.

---

<sup>7</sup> R. W. Ogden, Non linear elastic deformation, pp. 171 - 174

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, \mathbf{t}) = \mathbb{S}(\mathbf{E}_t, \mathbf{X}) \quad (1.32)$$

Introducendo inoltre l'omogeneità del solido<sup>8</sup>, si può scrivere:

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \mathbb{S}(\mathbf{E}_t) \quad (1.33)$$

Nella (1.33), funzione ora del  *tensore di Green* , è evidente la dipendenza della localizzazione al tempo  $\mathbf{t}$  dei punti appartenuti al solido e l'indipendenza alla configurazione di materiale.

### 1.3.2. Materiale Elastico ed Iperelastico

I materiali Elastici ed Iperelastici sono una classe di materiali per i quali, a differenza dei precedenti, lo stato di sollecitazione è funzione del solo stato di deformazione nella configurazione attuale del solido  $\mathfrak{B}(\mathbf{t})$  rispetto alla configurazione di riferimento (materiale) [1]. Analogamente all'eq. (1.30) si esprime il tensore delle sollecitazioni come:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbb{T}(\mathbf{F}) \quad (1.34)$$

e quindi decomponendo il tensore  $\mathbf{F}$  e ricordando il 2° tensore di *Piola – Kirchhoff S*, in modo da riferire l'espressione alle sole deformazioni depurate, si ottengono le seguenti espressioni:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{R}(\mathbf{t}) \cdot \mathbb{T}(\mathbf{U}, \mathbf{X}) \cdot \mathbf{R}^T(\mathbf{t}) \quad (1.35)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, \mathbf{t}) = \mathbb{S}(\mathbf{E}, \mathbf{X}) \quad (1.36)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \mathbb{S}(\mathbf{E}) \quad (1.37)$$

---

<sup>8</sup>R. W. Ogden, Non linear elastic deformation, p. 175



Infatti  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{U}$  ed  $\mathbf{F}$  sono riferite alla sola configurazione spaziali o attuali.

Fin qui viene definito un materiale di tipo elastico.

Volendo definire un materiale di tipo Iperelastico, questo per definizione **è tale se esiste un funzionale del tensore delle deformazioni il cui gradiente è pari al tensore delle sollecitazioni**<sup>9</sup>.

Indicando quindi con  $\Phi(\mathbf{E})$  il *funzionale* prima citato, si deve avere:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \text{grad } \Phi = \nabla \Phi \quad (1.38)$$

Se si scrive l'espressione della potenza applicata al tensore delle tensioni per un punto  $\mathbf{P}$  del dominio  $\mathcal{B}$ , quindi la *Potenza dello Stato Tensionale*, nella forma *Lagrangiana*:

$$\mathbf{W}(\mathbf{P}, t) = \int_B \mathbf{S} \cdot \left( \frac{d}{dt} \mathbf{E} \right) dv = \frac{d}{dt} \int_B \Phi(\mathbf{E}) dv \quad (1.39)$$

si dimostra che il differenziale è esatto e che la quantità da derivare al terzo membro dell'espressione (1.39) è appunto la *densità di energia*.

$$\Phi = \int_B \Phi(\mathbf{E}) dv \quad (1.40)$$

Nel caso di materiale caratterizzato da un legame di tipo *elastico e lineare*, ricordando la sua della legge costitutiva generale (1.34) o (1.36) oppure nel caso di materiale omogeneo l'espressione (1.34) che diventa la (1.37), se si utilizza il formalismo classico della meccanica, ovvero indicando con  $\boldsymbol{\sigma}$  il tensore delle sollecitazioni e con  $\boldsymbol{\varepsilon}$  il tensore delle deformazioni, si può scrivere:

---

<sup>9</sup>R. W. Ogden, Non linear elastic deformation, p. 205

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.41)$$

Avendo indicato con  $\mathbf{C}$  il tensore di Elasticità, per questo tipo di materiale si può derivare la *densità di energia*  $\Phi(\mathbf{E})$  eq.(1.40).

Ricordando che per definizione si ha:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \nabla \Phi \quad (1.42)$$

Utilizzando il formalismo prima introdotto:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \nabla \Phi \quad (1.43)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla \Phi = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.44)$$

Quindi, per un materiale lineare elastico la densità di energia:

$$\sigma = \int_B \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, d\varepsilon = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.45)$$

Se si osserva la (1.44) si nota come la densità di energia appena ricavata sia pari all'area sottesa alla curva caratteristica di un materiale plottata su un grafico *stress-strain*.

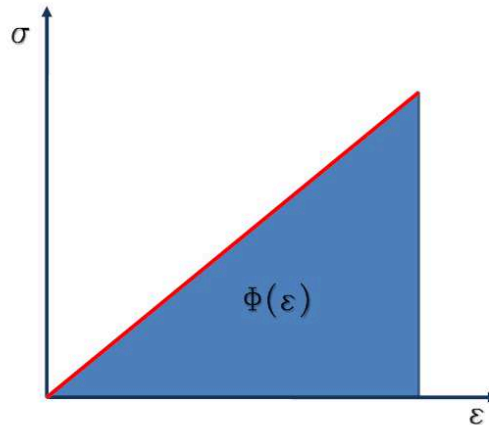


fig. 1.02 - Energy Density

### 1.3.3. Iperelastico Incomprimibile e Comprimibile

Dalla definizione di *materiale iperelastico*, per il quale deve esistere un funzionale chiamato *densità di energia di deformazione*, secondo l'espressione (1.38)<sup>10</sup>:

$$\Phi = \int_B \Phi(\mathbf{E}) dv \quad (1.46)$$

si osserva che per materiali iperelastici si ha la sola dipendenza dal gradiente di deformazione e che questo a sua volta gode della proprietà di obiettività (cambiamento dell'osservatore sul tensore o sul vettore), si può scrivere la seguente espressione:

$$W(x, \mathbf{F}) = H(x, \det[\mathbf{F}]) = H(x, \mathbf{J}) \quad (1.47)$$

Dove  $\mathbf{W}$  ed  $\mathbf{H}$  sono i funzionali e  $\mathbf{J}$  è lo *Jacobiano* del tensore di deformazione, che deve essere necessariamente non nullo per non introdurre nel modello lacerazioni o compenetrazioni di materiale.

<sup>10</sup>R. W. Ogden, Non linear elastic deformation, pp. 482 - 488

Per la proprietà di obiettività prima introdotta e per il teorema di decomposizione polare del tensore di deformazione, l'espressione (1.47) si può riscrivere in termini del tensore destro, moltiplicando il tensore  $\mathbf{F}$  per la matrice ortogonale  $\mathbf{Q}$  di rotazione:

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{F}) = W(\mathbf{x}, \mathbf{QF}) = \bar{w}(\mathbf{x}, \mathbf{C}) \quad (1.48)$$

Quindi, possiamo fare riferimento al funzionale  $\bar{w}$  funzione del tensore destro di *Cauchy*.

Dalla (1.46) è possibile ottenere, quindi, nota l'espressione della densità di energia (1.48), il tensore degli sforzi. Ovviamente per quanto espresso nella (1.48) questo è esprimibile sia in termini di  $\mathbf{F}$  che di  $\mathbf{C}$  per il semplice fatto che di mezzo ci sta solo la rotazione.

Per definizione, quindi, il tensore degli sforzi in termini del primo e del secondo di *Piola - Kirchhoff* sarà:

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \mathbf{C}} \quad \mathbf{S} = 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \mathbf{C}} \quad \mathbf{T} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (1.49)$$

Dalle trasformazioni di *push – forward* di *Piola* (1.26) e (1.27) di seguito riportate:

$$\mathbf{P} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} \quad (1.27)$$

attraverso la (1.48), si ottiene il tensore degli sforzi di *Cauchy* come:

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (1.50)$$

Per la prima delle (1.49), in termini di tensore  $\mathbf{F}$ , sulla (1.48):

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{J})}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{J})}{\partial \mathbf{J}} \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{J})}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{J})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{J} \mathbf{F}^{-T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (1.51)$$

Quindi:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (1.52)$$

Partendo quindi dalla definizione di densità di energia in termini spaziali, ricavando il primo tensore di Piola – Kirchhoff, ed applicando le trasformazioni di Piola, si ottiene il tensore di deformazione in configurazione materiale.

Come si vede, da quanto fin qui esposto, imponendo una funzione densità di energia come quella espressa nella (1.47), non si può tenere separata la variazione di volume dalla distorsione e deformazione.

Riscrivendo, invece, la (1.47) separando il tensore  $\mathbf{F}$  in modo da tener in conto la distorsione volumetrica dalla deformazione, si ottiene una densità di energia in forma tale da tenere in conto in maniera separata i due effetti[9].

Pensando, quindi, di separare il tensore di deformazione  $\mathbf{F}$  nel seguente modo<sup>11</sup>:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{isoc} \cdot \mathbf{F}^{vol} = \mathbf{J}^{1/3} \mathbf{F}^{isoc} = \sqrt[3]{\det[\mathbf{F}]} \mathbf{F}^{isoc} \quad (1.53)$$

e tenendo presente che se il solido si trova in configurazione di riferimento (*materiale*), e quindi al tempo  $\mathbf{t}=0$ , si avrà:

$$\det[\mathbf{F}] = 1 \quad (1.54)$$

Di conseguenza l'espressione (1.47) diventa:

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{F}) = H(\mathbf{x}, \det[\mathbf{F}]) = H(\mathbf{x}, \mathbf{J}) + G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{F}}) \quad (1.55)$$

---

<sup>11</sup>R. W. Ogden, Non linear elastic deformation, p. 182

Risulta ora semplice osservare che la parte che è funzione della sola deformazione è  $G(x, \bar{\mathbf{F}})$ .

Definita la nuova funzione è ora possibile classificare il materiale iperelastico come *Incomprimibile* o *Comprimibile*. Infatti, se nel materiale, durante il passaggio dalla configurazione iniziale a quella attuale, non vi è variazione volumetrica, il termine al secondo membro, funzione dello Jacobiano, si annulla e quindi la (1.55) diventa:

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{F}) = G(x, \bar{\mathbf{F}}) \quad (1.56)$$

Quindi si esprime il funzionale caratterizzante il materiale in funzione della sola componente di deformazione.

### 1.3.4. Isotropia dei Materiali Iperelastici

Nel paragrafo precedente è stata disaccoppiata la distorsione volumetrica da quella dovuta alla sola deformazione e mantenendo ancora la dipendenza dal punto materiale nell'espressione della (1.55), ma ancora nulla è stato detto sulla isotropia del materiale.

Per introdurre l'isotropia, e quindi un'ulteriore restrizione, la funzione densità di deformazione non è solo funzione del gradiente di deformazione  $\mathbf{F}$ , ed eventualmente anche dal tensore destro e sinistro ottenuti mediante il teorema di decomposizione polare, ma deve essere anche funzione degli invarianti di  $\mathbf{F}$ .

Noti, quindi, gli invarianti di  $\mathbf{F}$ :

$$I_1 = tr(\mathbf{F}) \quad (1.57a)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - tr\mathbf{F}^2) \quad (1.57 b)$$

$$I_3 = \det \mathbf{F} \quad (1.57 c)$$

la forma densità energia diventa allora:

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{F}) = \overline{W}(\mathbf{x}, \mathbf{C}) = W(\mathbf{x}, I_1, I_2, I_3) \quad (1.58)$$

Applicando il teorema spettrale al tensore simmetrico  $\mathbf{C}$  è possibile determinare una base ortogonale di auto-valori. Gli auto-valori  $\lambda_i$  della matrice  $\mathbf{C}$  formano così una terna che prende il nome di *allungamenti principali*  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  che giacciono sulle direzioni principali.

Infine allora, nelle condizioni prima descritte di omogeneità e isotropia, la forma (1.58) si estende come segue:

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{F}) = \overline{W}(\mathbf{x}, \mathbf{C}) = \overline{W}(\mathbf{x}, I_1, I_2, I_3) = \overline{\overline{W}}(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (1.59)$$

Fin qui si è dimostrato che per la determinazione della funzione di densità di energia, per un materiale iperelastico al quale vengono applicate le restrizioni di omogeneità e isotropia, si devono conoscere gli allungamenti principali e le relazioni che li legano.

# 2

## Dalla Teoria Gaussiana ai Modelli su Base Invarianti



## 2. Dalla Teoria Gaussiana ai Modelli su Base Invarianti

---

Poiché la teoria classica non è sufficiente a spiegare il comportamento tipico di un materiale *iperelastico* non lineare, come quello mostrato in fig.2.01, è necessario utilizzare dei modelli matematici che meglio rispecchiano il comportamento del materiale in esame, infatti con la teoria classica, non è possibile determinare un modulo di Young che in maniera univoca legghi la deformazione allo stress, se non per piccole deformazioni. Considerando anche la possibilità di deformare il materiale ben oltre il 100% della lunghezza iniziale, si nota, infatti, un comportamento del tutto contrastante con quello dei tipici *hard solids*, la cui deformazione massima è inferiore all'1%.

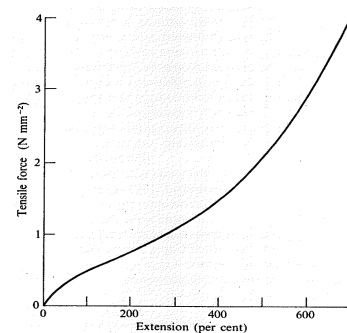
Per materiali che presentano un comportamento come quello prima descritto sorge il problema di definire dei modelli matematici che ne permettano la loro trattazione.

Tutti i modelli matematici presenti in letteratura, che meglio approssimano il problema, possono essere classificati come[4]:

- Modelli basati su un approccio statistico derivanti dalla teoria Gaussiana
- *Fenomenologici*, o anche definiti come modelli basati sugli invarianti (*invariant-based*)

Storicamente i modelli nati sotto l'approccio della teoria Gaussiana hanno gettato le basi per i modelli fenomenologici con l'obiettivo di migliorare i risultati ottenuti dalla teoria gaussiana ma anche per spiegare e tener conto delle restrizioni di isotropia e omogeneità dei materiali nella formulazione di nuove leggi costitutive.

Appartengono alla prima famiglia i modelli formulati da Arruda e Boyce[5], mentre, appartengono alla famiglia fenomenologica i modelli formulati da Mooney e Rivlin, Gent e Ogden.



*fig 2.01- Typical behavior of rubber-like material*

Di seguito viene introdotta la teoria statistica per meglio chiarire come da questa evolvono i modelli basati sugli invarianti. Verrà infine trattato più nel dettaglio il modello di *Mooney - Rivlin*.

## 2.1. Modello Statistico

Le assunzioni fondamentali del modello statistico si basano sul considerare il volume del corpo costituito da una serie di collegamenti o catene e che il volume del corpo non cambi durante la deformazione[4].

In particolare, si pensa che il solido sia discretizzato in elementi di volume come mostrato in fig.2.02, e che ogni elemento all'interno contenga delle molle la cui caratteristica definisce quella del solido elementare. In generale ogni catena è caratterizzata da elementi molle e smorzatori (fig.2.03), in serie e in parallelo, lineari e non, in modo da ottenere il risultato finale della non linearità.

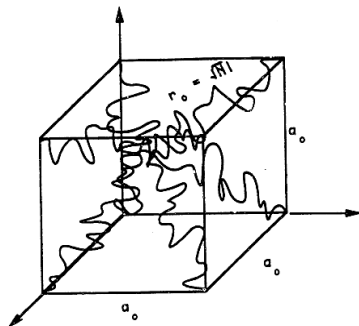


fig 2.02 - Esempio di elemento a 8 catene

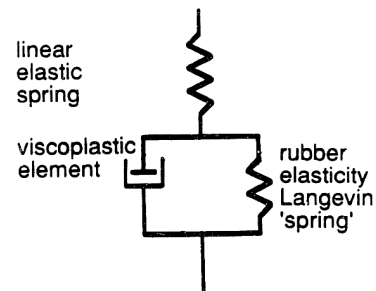


fig 2.03

Riassumendo le ipotesi che stanno alla base:

1. Le catene sono collegate trasversalmente da  $\mathbf{N} - link$ .
2. Ogni catena o segmento è collegato ad un'altra catena dal legame trasversale.
3. Incompressibilità.
4. Durante una deformazione, i punti di contatto tra le catene si muovono in modo che le componenti del vettore  $\mathbf{r}$  (fig.2.04) che li collega tra loro possano essere ottenute moltiplicando le stesse per la deformazione corrispondente come mostrato in figura 2.04.

5. L'entropia del reticolo complessivo soggetto a deformazione è pari alla somma dell'entropia di ogni singola catena.

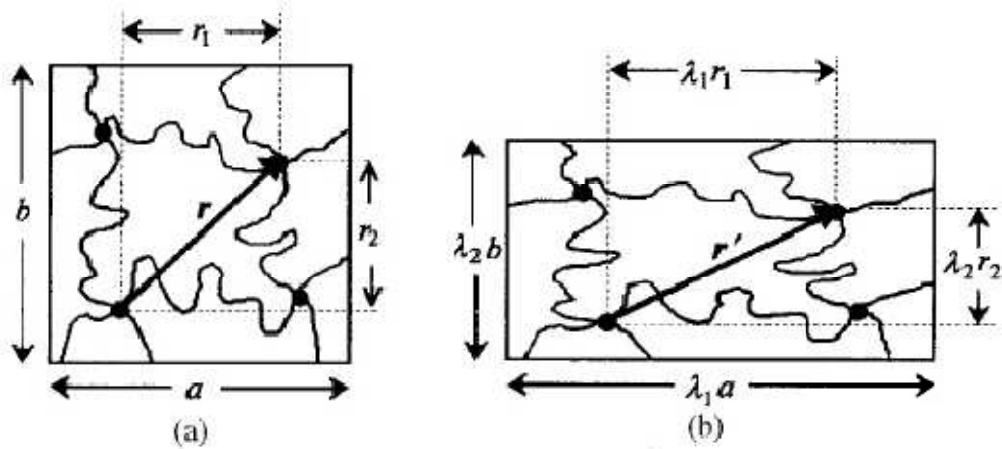


fig 2.04- Collegamenti delle catene nel reticolo

Secondo il modello ipotizzato, la disposizione delle catene deve essere pressoché casuale, dipendente non dalla propria geometria, ma bensì dal numero di legami trasversali.

Dunque, consideriamo una catena dalla semplice geometria, con  $N$  collegamenti di uguale lunghezza  $l$ , la cui disposizione è assolutamente casuale. Poniamo l'inizio di questa catena al centro del nostro sistema di riferimento  $O$  e la fine in un punto  $B$ .

Se la catena avesse la possibilità di muoversi liberamente, termodinamicamente non si avrebbe variazione di energia interna indipendentemente dalle configurazioni in cui essa si trova e l'energia di Helmholtz sarebbe determinata unicamente dalla variazione entropica [2] [4].

Infatti dal primo principio della termodinamica:

$$dU = dQ + dW \quad (2.01)$$

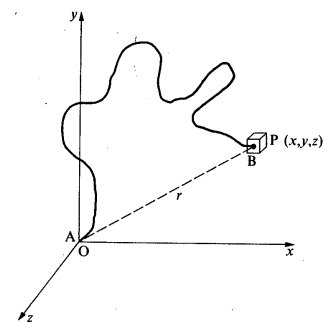


fig.2.05 - Disposizione casuale di una catena polimerica

Dove  $dQ$  è il calore assorbito dal sistema e  $dW$  è il lavoro delle forze esterne.

Assumendo che un processo di deformazione di un materiale iperelastico sia assolutamente elastico e, dunque, reversibile, dal secondo principio della termodinamica abbiamo:

$$TdS = dQ \quad (2.02)$$

Sostituendo la (2.02) nella (2.01):

$$dU = TdS + dW \quad (2.03)$$

E ricordando l'equazione di bilancio delle energie libera di Helmotz, per un processo a temperatura costante:

$$A = U - TS \quad ; \quad dA = dU - TdS \quad (2.04)$$

$$dA = dW \quad (2.05)$$

Quindi per la (2.05) si può concludere quanto detto prima, che l'energia libera di Helmotz, che per un processo a temperatura costante coincide con il lavoro delle forze esterne sul sistema.

Secondo *Boltzman*, la variazione di energia interna e quindi l'entropia, sarebbe *proporzionale al logaritmo del numero di configurazioni possibili* e che quest'ultime sono equiprobabili (*non ha motivo di esistere una configurazione rispetto ad un'altra*).

Osservando dalla *fig. 2.05* la posizione occupata dall'estremità **B** di una catena, si può considerare che in realtà questa non ha una completa libertà di muoversi perché esisterebbero i legami trasversali fra le catene, e quindi si smentisce l'assunto di prima. Esiste però una probabilità che il punto si possa ritrovare in un centro intorno.

Per quanto detto nel 1934 nascono i primi modelli di *Kuhn*, *Guth* e *Mark*, che iniziano a definire la probabilità che le componenti del vettore **r**, individuato

dall'origine e da punto **B**, fine della catena, stiano nell'intervallo  $d\tau = [x ; x + dx] \times [y ; y + dy] \times [z ; z + dz]$ , ovvero<sup>12</sup>:

$$p(x, y, z) dx dy dz = \frac{b^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} \exp\{-b^2(x^2 + y^2 + z^2)\} dx dy dz \quad (2.06)$$

Se si calcola la (2.06), prendendo in esame la fig.2.06, in cui viene rappresentata una sezione del luogo dei punti che con *equi - probabilità* possono essere occupati dal terminale **B** della catena, e si assume che il valore medio quadro di **r** è definito come:

$$\overline{r^2} = \frac{\int_0^{+\infty} r P(r) dr}{P(r) dr} = nl^2 \quad (2.07)$$

si ottiene quindi che **b** vale:

$$b^2 = \frac{3}{2} nl^2 \quad (2.08)$$

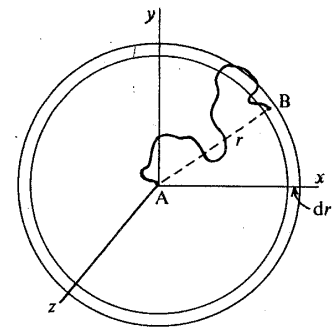


fig. 2.06- distribuzione di r

L'entropia di una catena è allora proporzionale alla funzione di densità di probabilità moltiplicata per l'elemento cubico  $d\tau$ :

$$S = k[\ln p(x, y, z) d\tau] \quad (2.09)$$

Sostituendo in quest'ultima l'espressione del raggio **r**, si ottiene:

$$S = c - kb^2 r^2 \quad (2.10)$$

Dove **c** è una costante arbitraria rispetto ad **r** e **k** è un fattore di proporzionalità.

<sup>12</sup>I. M. Ward, D. W. Hadley, "Mechanical properties of solid polymers", pp. 33- 36

E' importante notare che al crescere di  $r$  il valore di entropia decresce, il che implica, in un caso di semplice estensione, che si avrà un significativo decremento entropico.

Se consideriamo un generico raggio vettore di una catena non ancora deformata, con componenti  $r_0(x_0; y_0; z_0)$  e con  $r(x; y; z)$  indichiamo quello nello stato di deformazione possiamo allora scrivere, ricordando la definizione di allungamento principale  $\lambda_i$ :

$$\begin{aligned} s_0 &= c - kb^2 r_0^2 = c - kb^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \\ s &= c - kb^2(\lambda_1^2 x_0^2 + \lambda_2^2 y_0^2 + \lambda_3^2 z_0^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

È quindi possibile determinare la variazione entropica:

$$\Delta s = s - s_0 = -kb^2\{(\lambda_1^2 - 1)x_0^2 + (\lambda_2^2 - 1)y_0^2 + (\lambda_3^2 - 1)z_0^2\} \quad (2.12)$$

Ricordando l'ipotesi che la variazione di entropia per il solido è uguale alla somma della variazione entropica di ogni catena:

$$\Delta S = \sum \Delta s = -kb^2\{(\lambda_1^2 - 1) \sum x_0^2 + (\lambda_2^2 - 1) \sum y_0^2 + (\lambda_3^2 - 1) \sum z_0^2\} \quad (2.13)$$

e che:

$$\sum x_0^2 + \sum y_0^2 + \sum z_0^2 = \sum r_0^2 \quad (2.14)$$

Dal momento che la disposizione è casuale, non c'è ragione di dar maggior peso a una direzione piuttosto che ad un'altra e che il raggio è stato definito come nella (2.07), pone:

$$\sum x_0^2 = \sum y_0^2 = \sum z_0^2 = \frac{1}{3} \sum r_0^2 \quad (2.15)$$

$$\sum r_0^2 = N\bar{r}_0^2$$

Sostituendo la (2.07) nella (2.08):

$$\bar{r}_0^2 = \frac{3}{2} b^2 \quad (2.16)$$

Quindi la (2.13) diventa<sup>13</sup>:

$$\Delta S = -\frac{1}{2} Nk(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (2.17)$$

Il lavoro di deformazione sarà dunque per una trasformazione isoterma e isocora[2][4]:

$$W = -T\Delta S = -\frac{1}{2} NkT(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (2.18)$$

$G = NkT$  è un parametro, dipendente dalla struttura del materiale, che vale solo per piccole deformazioni ovvero nel tratto in cui la teoria statistica Gaussiana è ancora accettabile, come è possibile vedere dal confronto in (fig. 2.06) [4][31].

Come si vede dalla (2.18) la teoria prende in considerazione solo il primo invariante  $I_1$ .

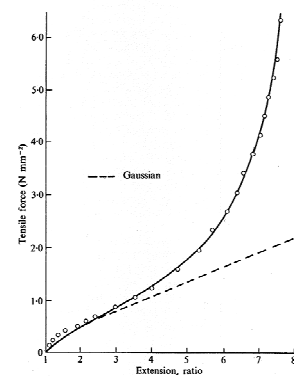


fig. 2.06<sup>14</sup>

<sup>13</sup>I. M. Ward, D. W. Hadley, "Mechanical properties of solid polymers", p. 39

<sup>14</sup>R. W. Odgen, Non linear elastic deformation, p. 122

## 2.2. Modello di Arruda e Boyce

Evoluzione della teoria Gaussiana è il modello formulato da *Arruda e Boyce*.

Il modello basato ancora sulla teoria statistica, si basa sulla divisione del volume in elementi cubici e all'interno dei quali sono presenti dei collegamenti catena lungo le diagonali principali. Nello specifico gli autori considerano 8 catene [5][21][32].

La funzione  $\mathbf{W}$ , densità di energia di deformazione, è espressa dalla seguente relazione:

$$W = Nk_B\theta\sqrt{n} \left[ \beta\lambda_{catena} - \sqrt{n} \ln \frac{\sin \beta}{\beta} \right] \quad (2.19)$$

Dove  $N$  è il numero di segmenti che formano la catena,  $n$  è il numero delle catene nella maglia,  $k_B$  è la costante di Boltzmann e  $\theta$  è la temperatura assoluta.

Nelle ipotesi che gli allungamenti principali  $\lambda$  siano uguali nelle tre direzioni, allora si ha:

$$\lambda_{catena} = \sqrt{\frac{I_1}{3}} ; \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 = I_1 \quad (2.20)$$

Mentre  $\beta$  viene calcolata con la funzione di *Langevin*:

$$\beta = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\lambda_{catena}}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.21)$$

Guardando la (2.19) si vede che nel modello sono presenti dei parametri che sono strettamente legati alla definizione di catena nel modello gaussiano.

## 2.3. Modelli su base invarianti

I modelli su base invarianti, nati per meglio rappresentare classi di materiali a comportamento fortemente non lineare, si distinguono dai modelli in precedenza discussi per non tener conto della definizione delle catene, ma fanno diretto riferimento alla legge di *Hooke* adattata alle grandi deformazioni.<sup>15</sup> [1][10][12][17]. In particolare, mentre nei modelli basati sulla meccanica statistica si fa riferimento solo al

---

<sup>15</sup>R. W. Ogden, Non linear elastic deformation, p. 211



primo invariante  $I_1$ , nel modello su base invariante si fa riferimento ai tre invarianti del tensore  $\mathbf{C}$  di deformazione<sup>16</sup> [10] [12].

I primi ad avere l'intuizione di tralasciare il concetto delle catene e far riferimento a caratteristiche prettamente meccaniche, sono stati gli autori *Mooney – Rivlin*, definendo la densità di energia di deformazione come la combinazione dei primi due invarianti per materiale iperelastico incomprimibile.

Nella formulazione di  $\mathbf{W}$  per materiale incomprimibile, si ha la seguente forma generale:

$$W_{M-R} = \sum_{i,j=0} C_{ij}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j \quad (2.22)$$

Come prima detto il modello mette in gioco anche il secondo invariante, e se si considera una funzione  $\mathbf{W}$  arrestata ad un solo parametro, si ottiene la forma di densità di energia della trattazione statistica, nota come modello *Neo – Hookeano*[8]:

$$W = C_{10}(I_1 - 3)^i \quad (2.23)$$

dove:

$$C_{10} = \frac{\mu}{2} \quad (2.24)$$

La (2.23) è formalmente analoga alla formulazione (2.18), mentre nella prima la costante  $C_{10}$  è funzione del modulo di taglio  $\mu$ , nella seconda, indicata con  $\mathbf{G}$ , è funzione della definizione di catena.

$$C_{10} = \frac{\mu}{2} \quad (2.25)$$

Per quanto detto al Cap.1, sulla trattazione dei materiali comprimibili o quasi incomprimibili, all'espressione della  $\mathbf{W}$ , gli autori aggiungono un secondo termine che mette in conto lo Jacobiano del tensore di deformazione  $\mathbf{C}$ , nella seguente forma:

---

<sup>16</sup>R. W. Ogden, Non linear elastic deformation, p. 213

$$W = \sum_{i,j=0} C_{ij}(\bar{I}_1 - 3)^i(\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{m=1}^M D_m(J - 1)^{2m} \quad (2.26)$$

Quindi, la (2.26) espressa ad esempio per un modello a 3 parametri, diventa:

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3)^1 + C_{01}(\bar{I}_2 - 3)^1 + D_1(J - 1)^2 \quad (2.27)$$

L'ultimo parametro aggiunto all'espressione è funzione del *coefficiente di bulk* (*coeff. di comprimibilità*)  $K$ .

$$D_1 = \frac{K}{2} \quad (2.28)$$

Sulla base della forma generale (2.22) presentata, diversi autori in letteratura, combinando il termine che tiene conto del secondo invariante in maniera diversa.

Le forme di  $\mathbf{W}$  più comunemente presenti sono[33]:

$$W = C_{10}(I_1 - 3)^1 + C_{01}(I_2 - 3)^1 + C_{20}(I_1 - 3)^2 \quad \begin{array}{l} \text{Form. di Signorini} \\ (2^\circ \text{ord.}) \end{array} \quad (2.29)$$

$$W = C_{10}(I_1 - 3)^1 + C_{01}(I_2 - 3)^1 + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) \quad \begin{array}{l} \text{Form. terzo ordine} \\ \text{di deformazione} \end{array} \quad (2.30)$$

$$W = C_{10}(I_1 - 3)^1 + C_{01}(I_2 - 3)^1 + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad \begin{array}{l} \text{Form. James -} \\ \text{Green-Simpson} \end{array} \quad (2.31)$$

In letteratura oltre ai modelli prima citati, vi è un altro modello che l'autore *R.W. Ogden* propone [1]. Il modello è sempre su base invariante ed è diventato uno dei modelli più popolari per la buona risposta a deformazioni che arrivano fino al 700%.

Il modello, espresso in termini di allungamenti principali, assume la forma:

$$W = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (2.32)$$

Dove  $\alpha_p, \mu_p$  e  $N$  sono le costanti che caratterizzano il materiale. Nei casi particolari in cui si ha  $N=2$ ,  $\alpha_1 = 2$  ed  $\mu_1 = -2$ , si ritorna al modello di *Mooney – Rivlin*, mentre per  $N=1$  ed  $\alpha_1 = 2$  il modello si riduce al modello *Neo - Hookoniano* [10].

## 2.4. Prove meccaniche

Per capire quale modello matematico meglio rappresenti il comportamento di un materiale iperelastico, incomprimibile o non, è necessario, stabilito quale modello meglio lo descrive, determinarne le costanti. Noto il modello e le costanti si ha una visione completa del materiale sotto qualsiasi stato di sollecitazione.

Richiamando la definizione della densità di energia, è evidente che per la sua completa determinazione sono necessari dei test meccanici che inducano delle deformazioni notevoli per quindi ottenere gli auto-valori  $\lambda_i$  della matrice  $\mathbf{C}$ , quest'ultimi definiscono infatti una terna che prende il nome di *allungamenti principali*  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  che giacciono sulle direzioni principali.

$$W(\mathbf{F}) = \bar{W}(\mathbf{C}) = \bar{W}(I_1, I_2, I_3) = \bar{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (2.31)$$

Ricordando la definizione degli invarianti:

$$\begin{aligned} I_1 &= tr(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \frac{1}{2}(I_1^2 - tr \mathbf{C}^2) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \\ I_3 &= det \mathbf{C} = J^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Poiché gli allungamenti da indurre devono essere sulle direzioni principali è necessario che i test riproducano questa condizione.

Si ha quindi che i test necessari sono di:

- Trazione Monoassiale
- Trazione Biassiale/Multiassiale/Bulgr Test
- Trazione Planare/Taglio (Simple-shear/Pure-shear)

In particolare, per completezza del modello, e quindi per eventuali informazioni sulla comprimibilità del materiale è necessario eseguire il Test Volumetrico (*Bulk Test*).

Infatti, le prime tre prove meccaniche producono informazioni solo sulla parte deviatorica dell'espressione di  $\mathbf{W}$ , mentre la prova volumetrica introdurrebbe l'ulteriore informazione sulla componente rotorica del modello<sup>17</sup>:

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{F})^{\text{Dev}} + W(\mathbf{F})^{\text{Rot}} \quad (2.33)$$

Le prove meccaniche citate, su questi materiali, non trovano corrispondenza nelle normative che dovrebbero regolamentare i test. È il caso della norma ASTM D412/D695 che fa riferimento a sole prove di trazione, restano escluse e dunque non regolamentate le prove biassiali e i test planari.

Nel presente lavoro si è fatto quindi riferimento ai lavori presenti in letteratura che forniscono indicazioni sulle prove mono - assiali e planari dei rapporti geometrici che devono avere i provini.

Per la prova biassiale rimane comunque un'assenza di trattazione, relativamente al provino da utilizzare, e quindi ai rapporti geometrici, alla tecnica per la trattazione dei risultati ed infine alle modalità con cui devono essere eseguite. Infatti in letteratura si trovano numerosi esempi di tecniche, sia per quanto riguarda la dimensione e la geometria del provino, sia per la tecnica di sollecitazione e di rilevamento della deformazione.

La prova di trazione mono - assiale è il più semplice test da effettuare su materiale per identificarne la caratteristica lungo la direzione di sollecitazione.

La letteratura suggerisce un provino che abbia una lunghezza 10 volte la sua larghezza e, facendo riferimento alla norma ASTM D412/D695, di spessore compreso in un *range* tra 1 e 4mm per lunghezze da 50mm a 150mm.

---

<sup>17</sup> R. W. Ogden, Non linear deformation, pp. 508 - 514

Facendo riferimento alla fig.3.01, per un elemento cubito soggetto a trazione, si ottengono gli allungamenti principali, per il caso di incomprimibilità:

$$\lambda_1 = \lambda = 1 + \varepsilon_l$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

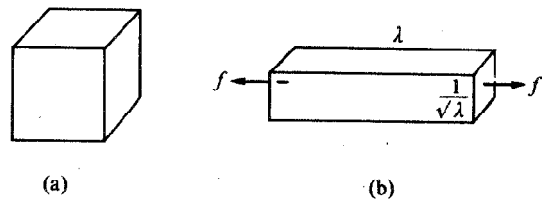


fig.3.01 Trazione Mono - assiale

Il test planare ha lo stesso stato di stress come la prova di taglio puro.

Il test appare a prima vista essere nient'altro che una prova di trazione classica con un provino molto più ampio. In particolare il provino è molto largo in direzione ortogonale alla direzione di carico. Come prima detto il test è completamente non regolato, ma in letteratura gli autori suggeriscono una larghezza del provino 10 volte maggiore del tratto utile di osservazione. In fig. 3.02 è riportato lo schema della prova di trazione con l'andamento qualitativo dell'andamento delle sollecitazioni[38].

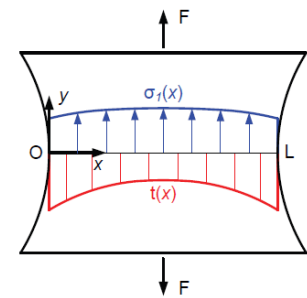


fig. 3.02 - Prova di trazione planare

Per questo tipo di prova, quindi, gli allungamenti principali, per materiale incomprimibile, valgono:

$$\lambda_1 = \lambda^2$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\lambda_3 = 1$$

La prova biassiale consiste nell'imporre una deformazione uguale in due direzioni corrispondenti a due dei suoi assi principali. Il test, come accennato nell'introduzione del presente capitolo, non segue nessuna normativa.

Facendo riferimento alla seguente fig. 3.03:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$$

e da semplici passaggi, tenendo conto dell'incompressibilità, si ottiene, lungo lo spessore:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda^2}$$

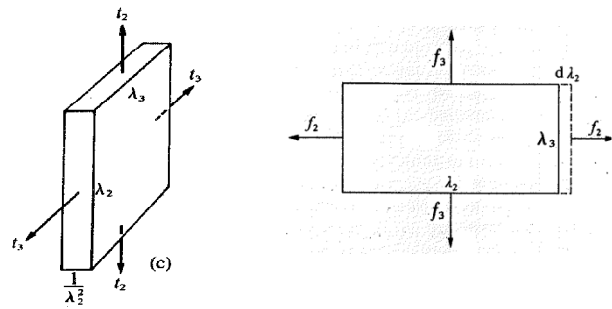


fig. 3.03 Trazione equi - biassiale

## 2.5. Calcolo delle costanti del modello

Eseguiti i test necessari alla determinazione delle curve caratteristiche per i diversi tipi di sollecitazione, rimane da fittare il modello con i dati sperimentali.

La determinazione delle costanti, per la porzione di modello incompressibile, e quindi considerando la funzione  $\mathbf{W}$  separata nei termini dipendenti dal volume e funzione della deformazione, consiste, seguendo la logica dello scarto quadratico medio,  $R^2$ , nel minimizzare quest'ultimo fra la curva del modello teorico e la curva sforzo-deformazione sperimentale[25].

Nel presente lavoro l'operazione di fitting dei test eseguiti è stata fatta utilizzando il tool di fitting contenuto nel pacchetto di Ansys<sup>®</sup>, che permette di minimizzare l'errore non solo di una sola curva ma di tutte le curve introdotte per il modello affinché quest'ultimo meglio approssimi la risposta del materiale.

In generale, come prima accennato, nel *tool*, il calcolo delle costanti è basato sulla minimizzazione della somma dello scarto quadratico medio calcolato su ogni curva test.

Di seguito, viene quindi esposta la procedura sia per il test monoassiale che per il biassiale al variare degli  $N$  parametri. Questa permette quindi, nei due casi, di determinare le costanti  $C_{ij}$  per ogni singola prova.

Mentre la procedura di minimizzazione nel caso di trazione monoassiale e biassiale permette di ottenere tutte le costanti separatamente, invece nel caso di test *planare*, o *sample-shear*, non porta alla determinazione di alcun parametro.

Infatti, nel caso di test planare, non si ottengono i parametri in maniera distinta ma una relazione fra questi[14][19].

Poiché i materiali iperelastici rispettano solo alcune delle leggi prima esposte, in generale però, quasi tutti sono ben rappresentati da una legge di tipo polinomiale, la trattazione del calcolo dei coefficienti volgerà quindi in questa direzione, ricordando anche che l'espressione di *Mooney-Rivlin* è una legge di tipo polinomiale, soprattutto nel caso di materiale incomprimibile.

Per la prova meccanica monoassiale e biassiale, possiamo indicare con  $\sigma_{i-Test}$  la sollecitazione ottenuta dal test ed associata agli allungamenti principali indicati con  $\lambda_{i-Test}$  lungo la direzione *i-esima*.

$$\lambda_{i-Test} = \varepsilon_{i-Test} + 1 \quad (2.34)$$

In funzione del modello polinomiale, per definizione di materiale iperelastico, si può scrivere la tensione associata al modello:

$$W = \sum_{i,j}^N C_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j \quad (2.35)$$

come:

$$T_{i-P} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \quad (2.36)$$

Ovvero la tensione associata al modello polinomiale lungo la direzione *i-esima*, dove il secondo membro della (2.36):

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_i} \frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \lambda_j} \quad (2.37)$$

Per quanto detto nei paragrafi precedenti:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_i} \right|_j = C_{ij} \quad (2.38)$$

Per il metodo dei minimi quadrati:

$$R^2 = \sum_{i=1}^n (\sigma_{i-Test} - T_{i-P})^2 = \sum_{i=1}^n \left( \sigma_{Test} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \right)^2 \quad (2.39)$$

Se ad esempio si pensa di fittare i test con un modello polinomiale a due parametri, si ottiene:

$$R^2 = \sum_{i=1}^n \left( \sigma_{i-Test} - \left( \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \lambda_j} \right) \right)^2 \quad (2.40)$$

$$R^2 = \sum_{i=1}^n \left( \sigma_{i-Test} - \left( C_{10} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda_j} + C_{01} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \lambda_j} \right) \right)^2 \quad (2.41)$$

Derivando quest'ultima rispetto alle costanti, si ottiene:

$$\frac{\partial R^2}{\partial C_{10}} = 2 * \sum_{i=1}^n \left( \sigma_{i-Test} - \left( C_{10} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda_j} + C_{01} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \lambda_j} \right) \right) * \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda_j} = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial C_{01}} = 2 * \sum_{i=1}^n \left( \sigma_{i-Test} - \left( C_{10} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda_j} + C_{01} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \lambda_j} \right) \right) * \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \lambda_j} = 0 \quad (2.43)$$



e riordinando in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda_j} \right)^2 & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda_j} \right) \left( \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \lambda_j} \right) \\ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda_j} \right) \left( \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \lambda_j} \right) & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \lambda_j} \right)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^n \sigma_{i-Test} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda_j} \\ \sum_i^n \sigma_{i-Test} \cdot \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \lambda_j} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Indicando con  $\bar{K}$  la prima matrice e  $\bar{C}$  la seconda al primo membro e con  $\bar{A}$  la matrice al secondo, ed osservando che la matrice  $\bar{K}$  è simmetrica, a determinante non nullo e che quindi si può invertire, allora si possono ottenere le costanti del sistema.

$$\bar{K} \cdot \bar{C} = \bar{A} \quad (2.45)$$

$$\bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{K}^{-1} \quad (2.46)$$

In questo modo si ottengono le costanti del modello in maniera distinta. Per quanto detto all'inizio del paragrafo, non si possono ottenere le costanti in maniera distinta nel caso di trazione planare.

Ma se sviluppiamo il sistema di equazioni, ricordando che gli allungamenti principali per il *simple-shear*, valgono le seguenti relazioni per gli allungamenti:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda \\ \lambda_2 &= 1/\sqrt{\lambda} \\ \lambda_3 &= 1 \end{aligned} \quad (2.47)$$

il sistema (2.44) diventa, per  $\bar{I}_1 = \bar{I}_2$ :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda_j} \right)^2 & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda_j} \right) \left( \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda_j} \right) \\ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda_j} \right) \left( \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \lambda_j} \right) & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \lambda_j} \right)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^n \sigma_{i-Test} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda_j} \\ \sum_i^n \sigma_{i-Test} \cdot \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \lambda_j} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Quindi, la matrice  $\bar{K}$  si mantiene sempre simmetrica, ma in questo caso il determinante è nullo, quindi non si ottengono soluzioni.

In ogni caso il sistema produce una doppia identità:

$$C_{10} + C_{01} = \frac{\sum_i^n \left( \sigma_{i-Test} \cdot \frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \lambda_j} \right)}{\sum_i^n \frac{\partial \bar{I}_i^2}{\partial \lambda_j}} \quad (2.49)$$

Ovvero si ottiene una condizione di vincolo sulle costanti.

La determinare delle costanti da ogni singolo test meccanico porta alla definizione di medesime costanti  $C_{ij}$  che assumono valore diverso per ogni *fitting*, masi deve ricordare che l'obiettivo è di indagare sulle costanti  $C_{ij}$  che caratterizzano il materiale in ogni suo stato di sollecitazione ed ottenerle in maniera univoca.

Infatti, la determinazione delle costanti dal *fit* di una sola prova, come ad esempio quella di trazione monoassiale, che è la più semplice da eseguire in laboratorio, porta alla definizione di un modello sicuramente coerente con uno stato di sollecitazione monoassiale ma sicuramente non coerente con uno stato di sollecitazione diverso.

Da quanto detto è quindi necessaria la definizione del modello mediante diversi stati di sollecitazione e questi devono essere introdotti contemporaneamente.

Il calcolo delle costanti non può, quindi, essere effettuato con un solo test meccanico e con *fit* separati.

Secondo l'impostazione di calcolo prima esposto, il calcolo delle costanti deve effettuarsi minimizzando non l'errore sul singolo test ma minimizzando la somma dell'errore dei test[19][32]<sup>18</sup>.

---

<sup>18</sup> Algoritmo di Levenberg – Marquard per la minimizzazione

Si ha quindi, per gli  $n$  test distinti eseguiti, che:

$$R^2 = \sum_{i=1}^n R_i^2 \quad (2.50)$$

# 3

## Calcolo della Sollecitazione

### 3. Calcolo della Sollecitazione

---

Ricordando che un materiale è per definizione iperelastico quando il gradiente del funzionale del tensore delle deformazioni è pari al tensore delle sollecitazioni (Cap.1, eq.1.38), allora per un generico funzionale possiamo derivare l'espressione del tensore di sollecitazione.

Operando il gradiente del funzionale  $\mathbf{W}(I_1, I_2, I_3)$  sia nel caso di materiale *comprimibile* che *incomprimibile*, è possibile valutare l'errore che si commette sia in un caso che nell'altro [16].

Il tensore di Cauchy si può determinare dal primo o dal secondo tensore di *Piola-Kirchhoff* e questo perché le tensioni di Cauchy sono riferite alla configurazione *materiale* e il tensore di *Piola-Kirchhoff* alla configurazione *spaziale*.

Quindi, indicando con  $\mathbf{P}$  il primo tensore di *Piola-Kirchhoff* e con  $\boldsymbol{\sigma}$  quello di *Cauchy*, e ricordando le trasformazioni di Piola per passare da configurazione *materiale* a *spaziale*, si ha [14][24][26]:

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.01)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \frac{2}{J} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (3.02)$$

il gradiente del funzionale  $\mathbf{W}$  rispetto al tensore destro  $\mathbf{C}$  nella (3.02):

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.03)$$

Dalla definizione degli invarianti, si può valutare ogni gradiente dell'invariante rispetto al tensore destro nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{1} \\ \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} &= I_1 \mathbf{1} - \mathbf{C} \\ \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} &= \det(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{C} = I_3 \cdot \mathbf{C}^{-1}\end{aligned}\tag{3.04}$$

dedotte dalle:

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{F}) = \text{tr}(\mathbf{C})\tag{1.57 a}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}\mathbf{F}^2) = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}\mathbf{C}^2)\tag{1.57 b}$$

$$I_3 = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{C}\tag{1.57 c}$$

Sostituendo le (3.04) nella (3.03):

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \cdot \mathbf{1} - \mathbf{C}) + \frac{\partial W}{\partial I_3} I_3 \cdot \mathbf{C}^{-1}\tag{3.05}$$

In termini di gradiente di deformazione:

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \cdot \mathbf{1} - \mathbf{F}^T \mathbf{F}) + \frac{\partial W}{\partial I_3} I_3 \cdot \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}\tag{3.06}$$

Introducendo la (3.05) nell'espressione della tensione di Cauchy (3.02):

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{comp}} = \frac{2}{J} \mathbf{F} \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \cdot \mathbf{1} - \mathbf{F}^T \mathbf{F}) + \frac{\partial W}{\partial I_3} I_3 \cdot \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} \right] \mathbf{F}^T\tag{3.07}$$

Ricordando la definizione del tensore sinistro di *Cauchy*:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{comp}} = \frac{2}{J} \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{F} \mathbf{F}^T + \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{F} (I_1 \cdot \mathbf{1} - \mathbf{F}^T \mathbf{F}) \mathbf{F}^T + \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{F} I_3 \cdot \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T \right] \mathbf{F}^T \quad (3.08)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{comp}} = \frac{2}{J} \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} + \frac{\partial W}{\partial I_2} I_1 \mathbf{B} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \frac{\partial W}{\partial I_3} I_3 \cdot \mathbf{1} \right] \quad (3.09)$$

Accorpendo per il tensore  $\mathbf{B}$ :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{comp}} = \frac{2}{J} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} I_1 \right) \mathbf{B} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right] + \frac{2}{J} \frac{\partial W}{\partial I_3} I_3 \cdot \mathbf{1} \quad (3.10)$$

Infine, sostituendo l'espressione del terzo invariante:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{comp}} = \frac{2}{J} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} I_1 \right) \mathbf{B} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right] + 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3} \cdot \mathbf{1} \quad (3.11)$$

Se il materiale è incomprimibile,  $\det \mathbf{F} = J = 1$ , allora l'eq. 3.11 diventa:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}} = 2 \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} I_1 \right) \mathbf{B} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right] - p \mathbf{1} \quad (3.12)$$

dove  $p$  è una pressione non nota a priori.

Per la modalità con la quale è stato ricavato il tensore degli sforzi non si ha particolare evidenza di quanto la tensione sia funzione del termine rotorico, o meglio, non si ha la separazione dei contributi. Per meglio evidenziare la separazione del termine rotorico da quello deviatorico, si può considerare l'espressione generica della densità di energia  $\mathbf{W}$ , in funzione non dei tre invarianti, ma dei primi due modificati e dello Jacobiano (3.13):

$$W(I_1, I_2, I_3) = \bar{W}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) \quad (3.13)$$

Dove i termini soprastegnati:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_1 &= J^{-\frac{2}{3}} I_1 \\
\bar{I}_2 &= J^{-\frac{4}{3}} I_2 \\
\bar{I}_3 &= 1
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

Sostituendo il sistema di equazioni (3.14) nella (3.03), questa assumerà la seguente espressione:

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial I_1} = \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} J^{-2/3}
\tag{3.15}$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial I_2} = \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} J^{-4/3}
\tag{3.16}$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_3} = \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial I_3} + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial I_3} + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_3} \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial I_3}
\tag{3.17}$$

L'espressione del tensore di sollecitazione diventa:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{\text{comp}} &= \frac{2}{J} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \bar{I}_1 \right) \bar{\mathbf{B}} - \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \right] \\
&\quad + \left[ \frac{\partial W}{\partial J} - \frac{2}{3} \frac{1}{J} \left( \bar{I}_1 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + 2 \bar{I}_2 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \right) \right] \cdot \mathbf{1}
\end{aligned}
\tag{3.18}$$

Mettendo in evidenza al secondo membro il termine Jacobiano:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{\text{comp}} &= \frac{2}{J} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \bar{I}_1 \right) \bar{\mathbf{B}} - \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \right] \\
&\quad + \frac{1}{J} \left[ J \frac{\partial W}{\partial J} - \frac{2}{3} \left( \bar{I}_1 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + 2 \bar{I}_2 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \right) \right] \cdot \mathbf{1}
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{\text{comp}} &= \frac{2}{J} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \bar{I}_1 \right) \bar{\mathbf{B}} - \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \left( \bar{I}_1 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + 2 \bar{I}_2 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \right) \cdot \mathbf{1} \right] \\
&\quad + \frac{1}{J} \left[ J \frac{\partial W}{\partial J} \right] \cdot \mathbf{1}
\end{aligned}
\tag{3.20}$$



$$\bar{\sigma}_{\text{comp}} = \frac{2}{J} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \bar{I}_1 \right) \bar{B} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \bar{B} \cdot \bar{B} - \frac{1}{3} \left( \bar{I}_1 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + 2\bar{I}_2 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \right) \cdot \mathbf{1} \right] + \left[ \frac{\partial W}{\partial J} \right] \cdot \mathbf{1} \quad (3.21)$$

La precedente espressione la possiamo anche scrivere nel seguente modo:

$$\bar{\sigma}_{\text{comp}} = \frac{2}{J} \left[ \frac{1}{J^{2/3}} \left( \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \bar{I}_1 \right) B - \frac{1}{J^{4/3}} \frac{\partial W}{\partial I_2} B \cdot B - \frac{1}{3} \left( \bar{I}_1 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + 2\bar{I}_2 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \right) \cdot \mathbf{1} \right] + \left[ \frac{\partial W}{\partial J} \right] \cdot \mathbf{1} \quad (3.21)$$

Se il materiale è incomprimibile,  $\det \mathbf{F} = J = 1$ , allora la (3.21), per  $\bar{I}_1 = I_1$

$$\bar{\sigma}_{\text{inc}} = 2 \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} I_1 \right) B - \frac{\partial W}{\partial I_2} B \cdot B - \frac{1}{3} \left( I_1 \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \cdot \mathbf{1} \right] \quad (3.22)$$

Nell'eq.(3.22) appena ricavata l'ultimo termine è la pressione idrostatica.

Indicando con  $\bar{A}(\bar{I}_1, \bar{I}_1, J)$  il primo termine della (3.21), quest'ultima la possiamo riscrivere nel seguente modo:

$$\bar{A}(\bar{I}_1, \bar{I}_1, J) = 2 \left[ \frac{1}{J^{2/3}} \left( \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \bar{I}_1 \right) B - \frac{1}{J^{4/3}} \frac{\partial W}{\partial I_2} B \cdot B - \frac{1}{3} \left( \bar{I}_1 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + 2\bar{I}_2 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \right) \cdot \mathbf{1} \right] \quad (3.23)$$

Da cui:

$$\bar{\sigma}_{\text{comp}} = \frac{1}{J} \bar{A}(\bar{I}_1, \bar{I}_1, J) + \left[ \frac{\partial W}{\partial J} \right] \cdot \mathbf{1} \quad (3.24)$$

Confrontando la (3.24) con la (3.22), anche se profondamente diverse per la presenza dello Jacobiano, se si confonde la  $\overline{\mathbf{A}}(\overline{\mathbf{I}}_1, \overline{\mathbf{I}}_1, \mathbf{J})$  con la  $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{inc}}$ , si nota che il non considerare il materiale comprimibile porta a sottostimare la sollecitazione.

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{comp}} = \frac{1}{\mathbf{J}} \overline{\mathbf{A}}(\overline{\mathbf{I}}_1, \overline{\mathbf{I}}_1, \mathbf{J}) = \frac{1}{\mathbf{J}} \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{inc}} \quad (3.25)$$

Ma se ricordiamo la formulazione generale del funzionale di un materiale iperelastico di tipo polinomiale quale ad esempio quello di *Mooney-Rivlin* per materiale comprimibile (3,26), si nota che l'attivazione del termine Jacobiano, all'interno della (3.23), è subordinata dall'aggiunta del secondo termine nell'eq. (3.24).

$$W = \sum_{i,j=0} C_{ij} (\overline{\mathbf{I}}_1 - 3)^i (\overline{\mathbf{I}}_2 - 3)^j + \sum_{m=1}^M D_m (J - 1)^{2m} \quad (3.26)$$

In particolare, per la (3.24) arrestata al primo termine di  $i, j$  ed  $m$ , il secondo termine della (3.24):

$$\left[ \frac{\partial W}{\partial J} \right] = 2 \cdot D_1 (J - 1) \quad (3.27)$$

Essendo  $D_1$  funzione non solo dei parametri  $C_{ij}$  ma anche del *coeff. di Poisson*  $\nu$ , secondo la relazione:

$$D_1 = \frac{(1 - 2\nu)}{(C_{10} + C_{01})} \quad (3.28)$$

E ricordando che, fissando un sistema per gli allungamenti principali:

$$\nu = - \frac{\varepsilon_{\text{trav}}}{\varepsilon_{\text{long}}} = \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1} \quad (3.29)$$

e dalla definizione del terzo invariante, si ottiene:

$$\mathbf{v} = \frac{1 - \frac{J}{\lambda_1 \cdot \lambda_3}}{1 - \frac{J}{\lambda_2 \cdot \lambda_3}} \quad (3.30)$$

Quindi, sostituendo quest'ultima nell'espressione della (3.28), si ottiene la relazione del parametro  $\mathbf{D}_1$  in funzione dello *Jacobiano*:

$$\mathbf{D}_1 = \frac{\left(1 - 2 \frac{1 - \frac{J}{\lambda_1 \cdot \lambda_3}}{1 - \frac{J}{\lambda_2 \cdot \lambda_3}}\right)}{(C_{10} + C_{01})} \quad (3.31)$$

Per finire, si ha che l'introduzione dell'ultimo termine  $\mathbf{D}_1$  nell'espressione del funzionale  $\mathbf{W}$ , attiva il termine Jacobiano nell'espressione della sollecitazione ed infatti il termine  $\mathbf{D}_1$  è direttamente legato allo Jacobiano secondo la (3.31), che tiene conto della variazione volumetrica e della variazione delle tensioni come prima descritto.

# 4

## Rilievo Ottico delle Grandi Deformazioni

## 4. Rilievo Ottico delle Grandi Deformazioni

---

Il capitolo vuole essere esplicativo dei mezzi e delle tecniche utilizzate nel presente lavoro per il rilievo delle deformazioni.

Il *set-up* di prova è costituito da tre parti essenziali identificabili in: una parte di sollecitazione e al contempo di rilievo dei carichi; una parte dedicata alla lettura delle deformazioni; una parte, di fondamentale importanza, di lettura e sincronizzazione dei dati. Nel presente capitolo verrà trattato il primo punto, mentre nei capitoli seguenti saranno, quindi, trattati i dettagli del *set-up* completo e della sincronizzazione dei dati.

Poiché i materiali oggetto del presente lavoro presentano una caratteristica iperelastica, e quindi, per piccole sollecitazioni si hanno rilevanti deformazioni, le classiche tecniche di estensimetria a contatto non possono essere applicabili. In particolare se da un lato, tutto sommato non ve n'è necessità per una prova di tipo monoassiale, quando si è davanti a dei test di tipo biassiali diventa complicato rintracciare le deformazioni da associare allo stato di sollecitazione.

È stato quindi utilizzato un software commerciale di riconoscimento immagini, testato su delle prove mono - assiali e successivamente, una volta validata la bontà della tecnica, è stato applicato ai casi di test planare e biassiale.

## 4.1. Image processing

Lo strumento utilizzato per l'*image-processing* è il Vision Builder AI®, Toolkit di Labview®2010[41].

Poiché l'obiettivo finale è quello di rintracciare le deformazioni piane da associare allo stato di sollecitazione, per il rilievo della deformazione è stata utilizzata una camera commerciale con sensore CDD da 10[MPixel] con acquisizione in continuo a 30 Hz[27].

L'acquisizione della sequenza video di deformazione del provino, su cui sono stati fissati degli adeguati *markers*, ha permesso di poter successivamente analizzare e valutare la deformata durante la prova, previa individuazione della scala da pixel a dimensione reale, oppure di valutare la sequenza di deformazione direttamente dalla sequenza immagine in pixel, visto che il rapporto è sempre adimensionale.

È stato osservato che per cause oggettive legate alle condizioni ambientali, alla pulizia, al colore del provino ed ancora alla realizzazione dei *markers* sulla superficie, le immagini devono essere trattate prima dell'analisi. In particolare, non trattandosi di una singola immagine, ma di una sequenza, si può verificare che, durante la prova, possono cambiare le condizioni di ambiente o di colore del provino stesso, per via dell'eccessiva deformazione, oppure per la conseguente modifica dei *markers* stessi; tutto ciò rende necessario che l'elaborazione deve essere curata ad ogni istante delle sequenza.

Il software prima citato permette, in modalità *off-line*, di trattare le immagini e soprattutto di eseguire analisi su geometrie e di inseguirne le modifiche temporali.

Riassumendo la fase d'*image-processing*, può essere scomposta in due sotto - fasi:

- ***Pre-Processing-Filtering***, ovvero di processamento delle immagini mediante applicazioni di filtri per meglio renderle utilizzabili nella fase successiva
- ***Post-Processing-Analysis***, fase di rilievo dei dati, salvataggio per successive sincronizzazioni ed analisi dei risultati

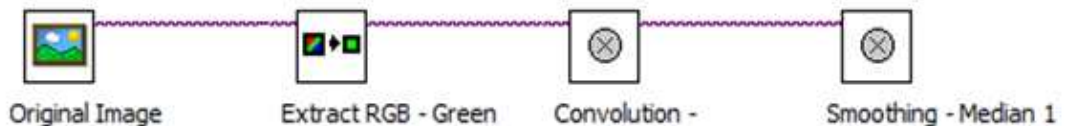
## 4.2. Pre- Processing

Durante la fase di *pre-processing* il programma permette di costruire un percorso di task che viene attraversato ciclicamente da ogni immagine acquisita l'ordine stabilito.

In ogni task sono ordinate le attività da eseguire ciclicamente sulle immagini.

All'interno della task di *filtering*, vengono essenzialmente introdotti i seguenti filtri:

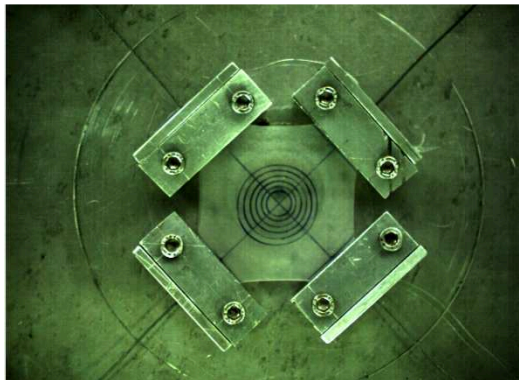
- Conversione in scala di grigio
- Applicazione del filtro di convoluzione
- Applicazione del filtro mediano
- Applicazione del filtro *edge - detection*



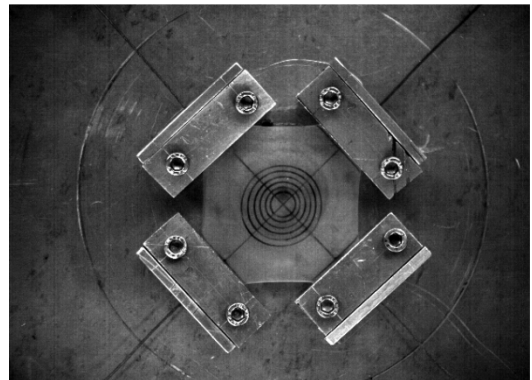
*fig. 4.00 – Ciclo di Image Processing*

La conversione in scala di grigio è il primo passo utile per poter lavorare esclusivamente sui valori di intensità luminosa dell'immagine, valori compresi tra 0 e 1, associati alla gradazione di 256 valori della scala di grigio.

Di seguito viene riportato un esempio su un frame di una prova biassiale.



*fig. 4.01 – Image RGB*



*fig. 4.02 – Image Grey Scale*

Dopo la conversione in scala di grigio, le successive operazioni sono finalizzate alla modifica dei valori di intensità luminosa, quindi, è necessario che questo stia in testa alla catena di processing.

La successiva applicazione del filtro di *convoluzione* (*Hilights - details*) mette maggiormente in risalto gli *edges* degli elementi di un'immagine.

Il filtro opera mediante una *maschera* o *kernel* di dimensione  $[m \times n]$  nel cui nucleo porta una funzione impulso. Il valore in ogni pixel nell'immagine trattata è la somma pesata dei valori di  $[m \times n]$  pixels dell'immagine di *input*.

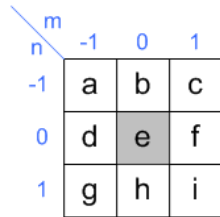


fig.4.03 –Maschera- Matrice di impulso-Kernel

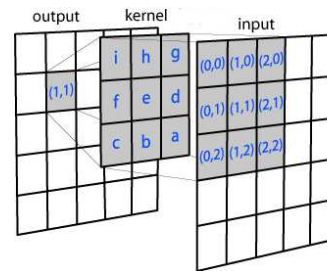


fig.4.04 – Assegnazione dei valori sull'output

Di seguito viene riportata l'elaborazione nel caso di prova biassiale in un frame.

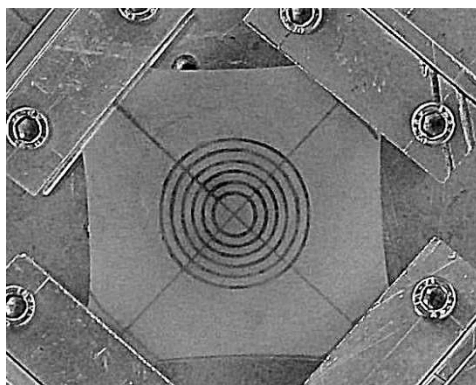
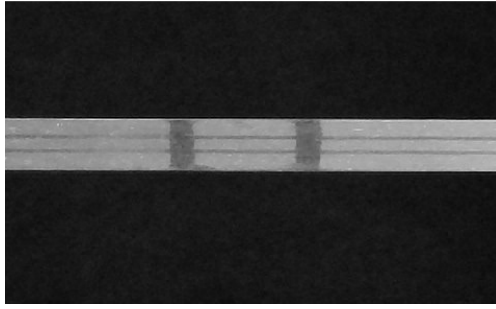


fig.4.05 – Applicazione del filtro di convoluzione

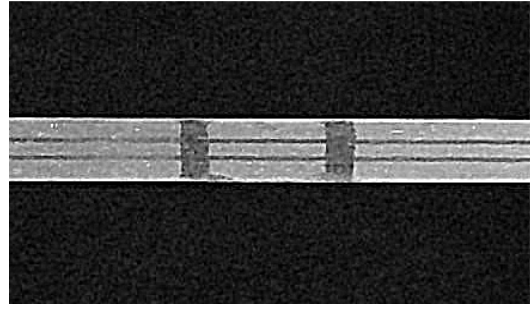
Data l'uniformità della superficie del provino, è stato possibile utilizzare un *Kernel* 7x7. Considerando un pixel nell'immagine iniziale questa matrice *maschera* rappresenta il peso che i 48 pixel del suo intorno hanno sul suo valore di output.

L'applicazione di questo filtro risulta necessaria nelle fasi più avanzate della prova, poiché anche la griglia subisce la deformazione, ne consegue che variando il colore si attenua la sua intensità luminosa. È il caso, ad esempio, delle prove monoassiali, dove la griglia diventa poco visibile. In quest'ultimo caso l'applicazione del filtro permette il recupero della visibilità dei *markers* agendo sulla luminosità dell'immagine (fig. 4.06 e 4.07).





*fig.4.06 – Perdita della visibilità dei markers*



*fig.4.07 – Applicazione del filtro di convoluzione*

Il recupero dell'intensità luminosa ha quindi il fine di mantenere attivo il distacco fra i bordi dell'oggetto e dei *markers* per poter poi agevolmente applicare il filtro successivo di *edge- detection*.

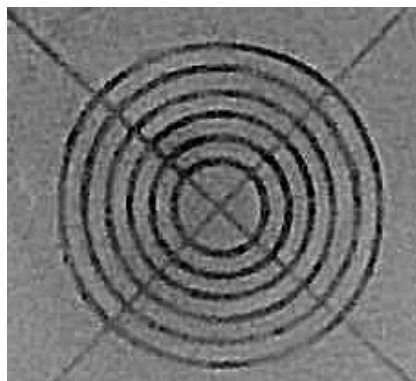
Ma prima di applicare il filtro di *edge - detection* osservando il risultato del filtro di convoluzione sull'immagine ci si rende conto che quest'ultimo ha lo svantaggio di introdurre un certo rumore.

Risulta quindi necessario applicare un successivo filtro per l'attenuazione del rumore ed eventualmente togliere il *noise* prodotto dalla variazione di luce o da difetti di superficie sul provino o da sbavature del tratto costituente il *marker*.

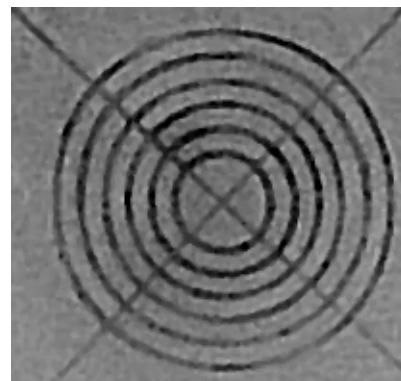
Il filtro applicato è un filtro mediano che il compito di *Smoothing* dell'immagine.

Anche quest'ultimo filtro, come il filtro di convoluzione, lavora con l'applicazione di una maschera.

Come prima detto, il filtro lavora mediante *maschere* e quindi impostata la dimensione del *kernel*  $[n \times m]$ , viene "spazzolata" tutta l'immagine e si sostituisce al valore di un pixel il valore mediano dei pixel vicini.



*fig.4.08 –Dopo il filtro di convoluzione*



*fig.4.09– Dopo il filtro mediano*

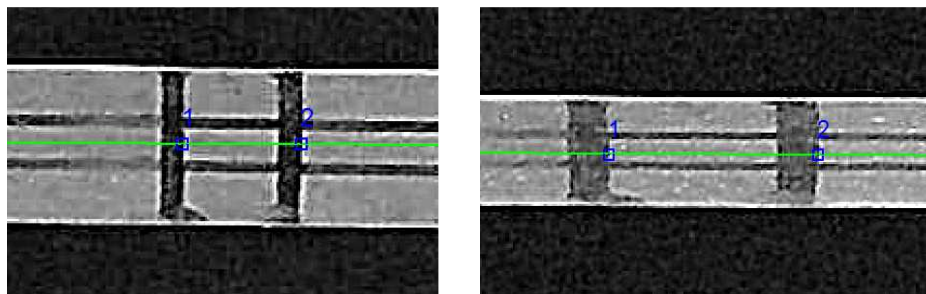
Dalle fig.4.07 e 4.08 riportate è possibile vedere l'effetto del filtro e quindi osservare che l'applicazione di quest'ultimo abbatte il *noise* (rumore) e crea un effetto di bilanciamento del colore.

Per la scelta della dimensione del *kernel*, sia per il filtro di convoluzione che per il filtro di mediano, queste devono avere dimensioni diverse, poiché l'applicazione di un *kernel* troppo grande al filtro mediano farebbe perdere troppe informazioni. Per quest'ultimo quindi è stata imposta una finestra 3x3, il minimo possibile in modo da evitare gli effetti negativi prima accennati.

Infine lo strumento più importante *edge-detection*, permette di identificare una repentina transizione d'intensità luminosa lungo una direzione prefissata sull'immagine.

Disponendo, infatti, lungo una direzione preferenziale, una direzione di indagine è possibile seguire lo spostamento del *pixel-edge* durante l'intera prova.

Di seguito viene mostrata una sequenza di 2 immagini relative ad una prova di trazione mono- assiale, dove su ogni immagine in verde è rappresentata la direzione di inseguimento che intercetta due pixel. In particolare i pixel identificati sono i punti di attraversamento luminoso.



*fig. 4.10 – Identificazione markers sul provino non deformato e  
inseguimento sul provino deformato*

Ovviamente anche per la stessa tipologia di prova meccanica, l'*edge-detection* deve essere regolato e questo è strettamente legato alle condizioni ambientali di prova.

Nella figura seguente viene mostrata la maschera di regolazione del filtro e i suoi set-up; in particolare, la funzione del *minimum edge-strength* è quella di definire il minimo valore che viene imposto al filtro per identificare la transizione luminosa; mentre il *kernel-size* è la dimensione della maschera; ed infine il *projection-width* che lo strumento che valuta, non la luminosità sul pixel intercettato, ma su una zona con ampiezza indicata. Ad essere confrontati sono i valori medi di intensità luminosa calcolati lungo la perpendicolare alla linea presa in esame, e quindi nella fascia prima imposta, ed il valore di questo parametro indica il numero di pixel da mediare.

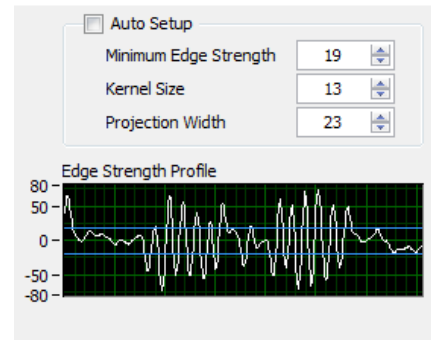


fig. 4.11 – Setup edge-detection

La fig.4.11, sotto le impostazioni del filtro, mostra il plot di *edge-strength* le linee azzurre che lo attraversano sono i “*limiti di controllo*” del filtro, quando uno dei valori di “forza di transizione” riscontrati nell’immagine supera tali limiti, e quindi fa un attraversamento, viene identificato un *edge*. Il grafico, infatti, è composto da due parti divise equamente dall’asse dello “zero”. La parte superiore identifica le transizioni “*dark to blight*”, quella inferiore le “*blight to dark*”. Ovviamente è impossibile osservare un picco simultaneo (afferente allo stesso *pixel*) nelle due porzioni di piano.

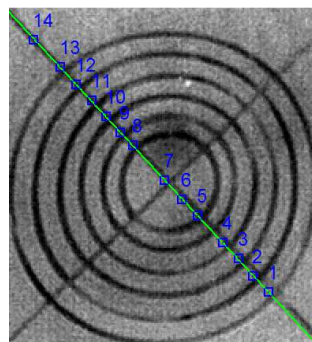


fig. 4.12 - Dark to blight, 13 attraversamenti

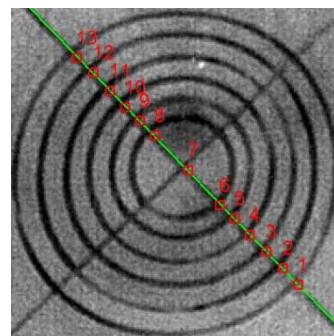


fig.4.13 - Blight to dark, 13 attraversamenti

L’applicazione di quanto fin qui descritto porta quindi ad inseguire dei *markers* riportati sul provino fino al termine del test.

Poiché l’obiettivo ultimo è quello di valutare la deformata o la deformazione, in funzione dello spostamento dei *markers* che a sua volta non hanno le dimensioni dei

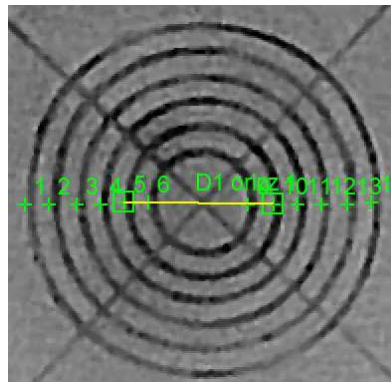
pixel, allora mediante il filtro si può seguire o il salto da nero a bianco o il viceversa dei bordi del tratto operato sul provino (fig.4.12 -13).

### 4.3. Post- Processing

Una volta programmato il ciclo di analisi, e quindi di individuazione degli elementi da rilevare per tutto il flusso di immagini, rimane la fase analisi degli spostamenti.

Questo è l'ultimo passo del ciclo che ha il compito di ricavare misure dimensionali, in particolare le distanze, tra gli *edges* identificati. Il suo funzionamento si basa sulla nota formula di distanza tra due punti, ad ogni pixel di ogni immagine infatti è associato un set di coordinate cartesiane  $(x_i; y_i)$ . Durante la prova un *edge* trasla lungo una direzione, sicché immagine per immagine è possibile calcolare la distanza tra due oggetti identificati e quindi poter ricavare la deformazione lungo la direzione di indagine.

Di seguito viene riportato un esempio della misura del diametro di un marker circolare, mediante indagine di misura tra 2 punti estremi.



*fig. 4.14 – Misura del diametro di un marker  
in una prova di trazione bi-assiale.*

Com'è possibile osservare dalla fig. 4.14, l'indagine sulla distanza tra 2 punti, viene effettuata sempre sui bordi esterni dei *markers* e in punti omotetici, in modo da non commettere errori quando nello stato avanzato della prova il *marker* cambia forma o soprattutto lo spessore.

# 5

## Caratterizzazione Biassiale

## 5. Caratterizzazione Biassiale

Una modellazione accurata di un materiale iperelastico richiede, come detto nei precedenti paragrafi, la conoscenza delle proprietà del materiale misurata sotto diversi stati di deformazione. In generale sono quindi necessarie tre curve caratteristiche che rappresentano tre stati tensionali puri, quindi, di sola trazione o compressione, di sollecitazione biassiale o multi-direzionale (a membrana) e planare o di taglio. Di seguito viene mostrato un *fitting* del materiale testato, dove sulla stessa area grafica sono visibili le caratteristiche prima menzionate (fig. 5.01)[1][14].

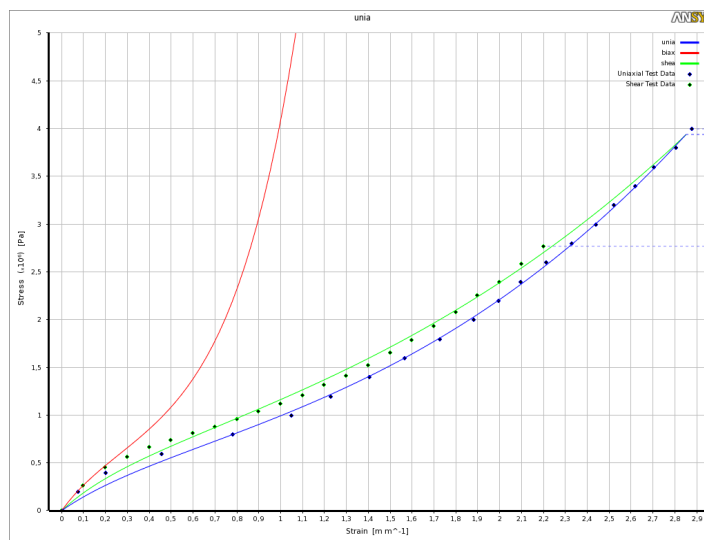


fig. 5.01 – Fitting dei test Mono – Assiale, Planare e Biassiale

La necessità di ottenere quindi la caratteristica di un dato materiale sotto determinati stati di sollecitazione comporta l'esecuzione in laboratorio delle prove prima citate e quindi di disporre di sistemi di sollecitazione adeguati allo scopo e quindi la disponibilità di macchine e set-up. Poiché in un laboratorio di prove classiche su materiali, in genere è disponibile la sola macchina di prova a trazione, statica o dinamica, di tipo monoassiale, e questo pone un limite alla caratterizzazione di materiali a caratteristica non lineare, risulta quindi necessario adeguare quest'ultime.

Nel presente capitolo viene quindi fatto un excursus sulle macchine e sistemi di sollecitazione biassiale note in letteratura, il cui fine è quello di fare una valutazione comparativa, e infine viene presentata una soluzione di sistema di conversione monoassiale a biassiale che è stata realizzata per il lavoro.

## 5.1. Sistemi di Prova Biassiali

In letteratura si trovano diversi esempi di sistemi prova biassiali o di conversione di macchine di trazione monoassiale in macchine biassiali per eseguire delle prove sia su materiali iperelastici sia su materiali compositi.

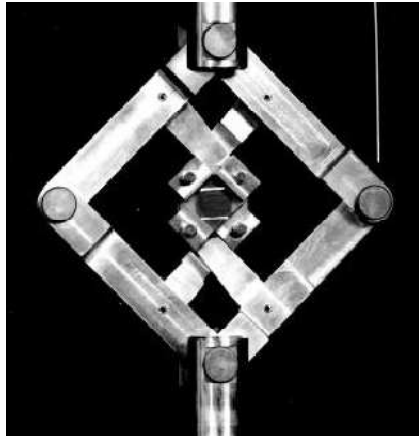
In generale queste macchine o adeguamenti possono classificarsi in due grandi famiglie[29][30][28][44][39]:

- A Carico Separato
- A Carico Unico

Rientrano nella prima famiglia tutti i sistemi o macchinari che mettono a disposizione tante celle di carico quanti sono gli attuatori e questi ultimi sono gestibili in maniera indipendente. Ovviamente l'enorme pregio di queste macchine è di poter riprodurre con estrema precisione diversi stati di tensione multi-assiale al quale però si accompagna ad un alto costo di investimento.

Alla seconda famiglia appartengono tutti le macchine e i sistemi di conversione di una macchina da test monoassiale che utilizzano il movimento di un unico attuttore ed un'unica cella di carico. E' facile verificare che il costo di un dispositivo di conversione è di gran lunga inferiore rispetto ai sistemi appartenenti alla prima famiglia, ed in più la possibilità di utilizzare la medesima macchina sia per prove monoassiali che biassiali valorizza la macchina su cui viene alloggiata.

Appartengono alla prima famiglia i rinvii del tipo a doppio pantografo in fig. 5.02 e di sistemi di trazione per prove planari su provini a membrana mostrato in fig. 5.03.



*fig.5.02 - Apparato di Stretching Biassiale a Pantografo*



*fig.5.03 - Apparato di Stretching Biassiale*

Il primo apparato mostrato in fig. 5.02 è un sistema di rinvio montato su una classica macchina di prova monoassiale per il quale è sembrato evidente un limite posto dalla sua natura, ovvero di ottenere solo un piccolo campo di allungamenti da cui poter considerare una sollecitazione biassiale corretta.

A tale scopo è stato effettuato uno studio del movimento in ambiente 3D mediante il software SolidWorks®.

Al sistema riportato nello studio di *B. Dunkan*[28] è stato quindi applicato un vincolo fisso alla base e uno spostamento lineare alla traversa superiore. Si consideri il pantografo in posizione iniziale (fig. 5.04).

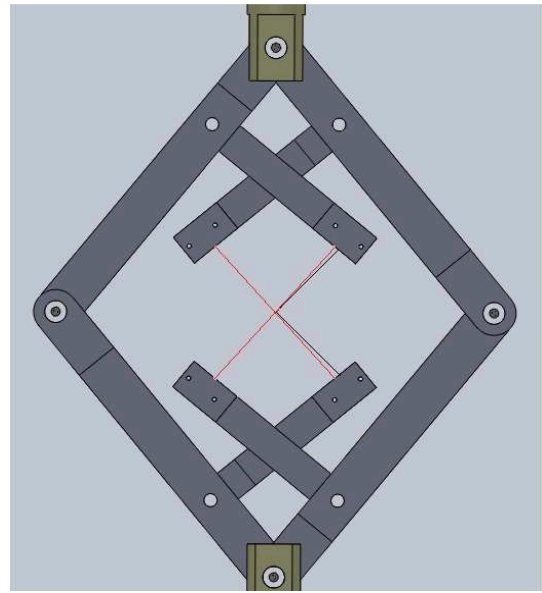
Prima che il sistema inizi a muoversi presenta gli assi di carico normali fra di loro, infatti osservando la fig. 5.04, in tale istante gli assi, tracciati in rosso, coincidono con le direzioni principali ( $N_1, N_2, N_3$ ), su cui giacciono, e dovrebbero sempre coincidere durante il test, gli allungamenti principali ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ).

Ma ad ogni istante successivo, ovvero ad ogni successivo movimento (fig.5.05), si osserva una variazione dell'angolo compreso tra i due assi suddetti.





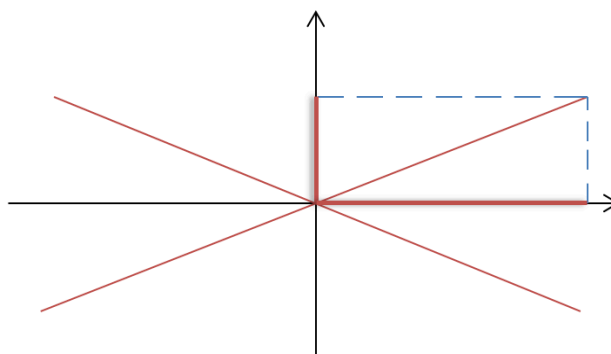
*fig. 5.04 - Apparato di Stretching Biassiale-Istante iniziale*



*fig. 5.04 - Apparato di Stretching Biassiale- Stato avanzato del test*

Per quanto prima viene dunque a mancare la coincidenza degli allungamenti con le direzioni principali, ne consegue quindi che non si può trarre nessuna conclusione sul comportamento del materiale soggetto a carico biassiale, tranne che per qualche istante iniziale della prova.

Se, infatti, si ragiona sulle componenti di carico mediante lo schema presentato in fig. 5.05, che mostra un'ipotetica situazione in uno stato avanzato della prova, le proiezioni delle componenti di deformazione sulle direzioni principali di deformazione, si osserva che non è possibile considerare la prova come equi-biassiale, poiché la variazione dell'angolo compreso tra le posizioni relative degli assi suddetti varia continuamente istante e quindi varia la proiezione sulle direzioni principali.



*fig. 5.05-Scomposizione della deformazione sulle direzioni principali*

Nota che le direzioni di carico non si mantengono mai in direzione ortogonale, con conseguente variazione di carico sulle direzioni principali, si può concludere, estremizzando il concetto, che partendo da una condizione di biassialità si arriva ad una condizione di monoassialità.

Quest'ultimo concetto è apprezzabile dai grafici mostrati di seguito, dove è mostrata la variazione d'angolo fra le coppie di afferraggi orizzontali e verticali.

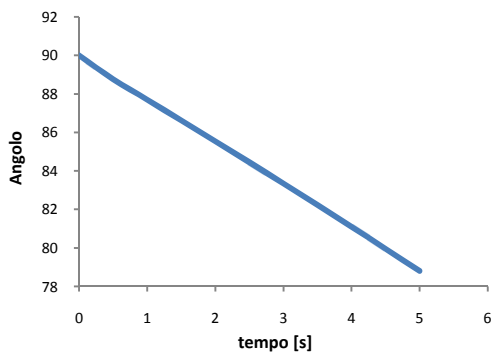


fig. 5.06 – Variazione dell'angolo compreso tra 2 afferraggi orizz.

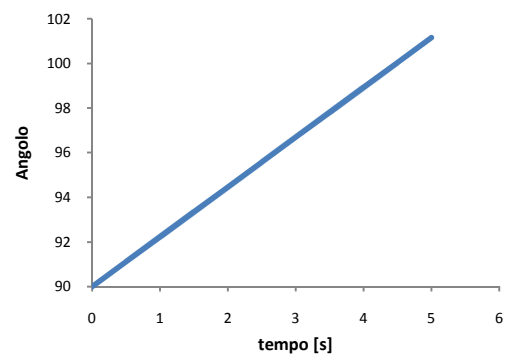


fig. 5.07 – Variazione dell'angolo compreso tra 2 afferraggi vert.

Di fatto con la variazione d'angolo cambia anche la velocità di deformazione nelle due direzioni principali e di conseguenza i rapporti di carico ( $r$ ) imposti al provino.

In letteratura è presente l'esperienza di M. Brieu, J. Diani e N. Bhatnagar[44], il cui sistema di trazione biassiale è presentato in fig.5.08.

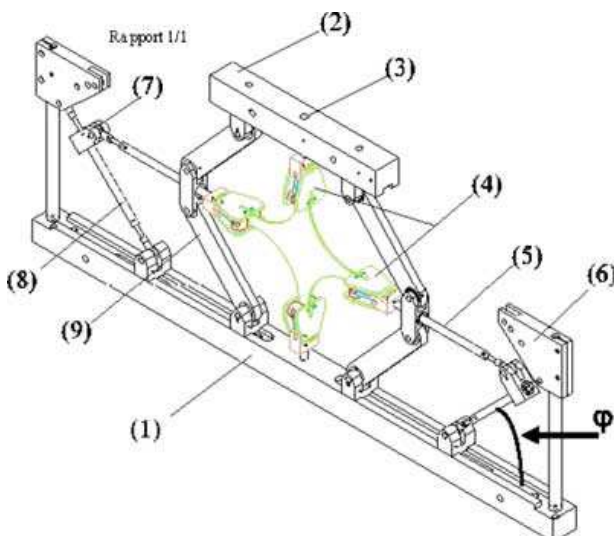


fig. 5.08 – Schema del sistema di carico biassiale

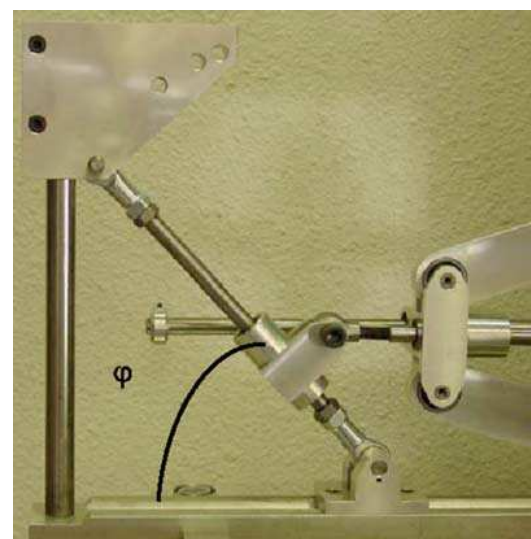


fig. 5.09 – Variazione dell'angolo compreso  $\varphi$

La variazione dell'angolo  $\varphi$  (fig. 5.09) permette di modificare in fase di set-up il rapporto di carico imposto durante la prova. Come dimostrato dagli autori, fissata la deformazione  $\lambda_1$  (nella direzione della traversa),  $\lambda_2$  sarà espresso in funzione di  $\lambda_1$  e  $r$  nel modo seguente:

$$\lambda_2 = 1 + \frac{\lambda_1 - 1}{r} \quad (5.01)$$

Dove con  $r$  è indicato il rapporto tra la deformazione verticale e quella orizzontale.

A conferma di quanto detto, di seguito sono riportati i risultati ottenuti dagli autori al variare del rapporto di deformazione  $r$ , per una gomma naturale, che mostra come cambia la caratteristica.

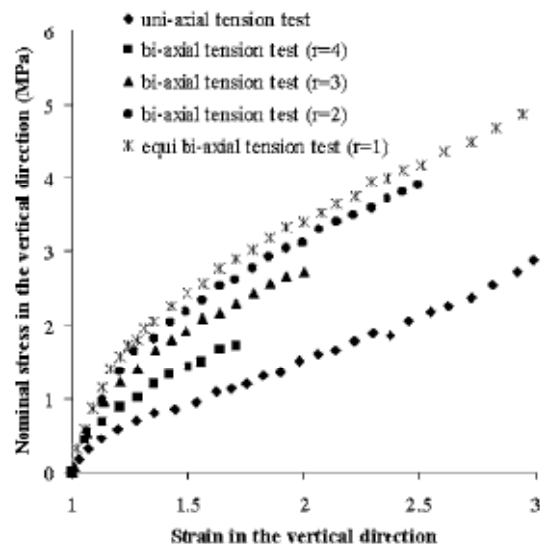


fig. 5.10 – Test Biassiale per gomma naturale al variare di  $r$

Altra osservazione deve essere fatta per il provino utilizzato dall'autore *B. Dunkan*, per il sistema mostrato in fig. 5.02.

In fig. 5.11, viene riportato il provino di geometria rettangolare che ha utilizzato l'autore, sul quale apponeva dei *markers puntiformi* (fig. 5.12), oppure dei *markers lineari*, evidenziati in rosso in fig. 5.11, rispetto al quale con un estensimetro ottico rileva gli allungamenti.

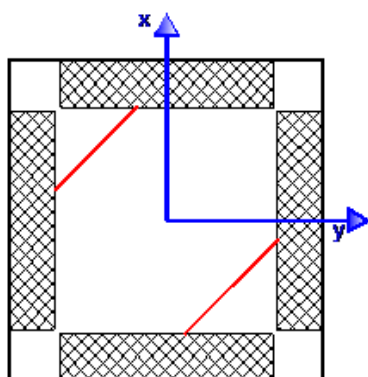


fig. 5.11 -Provino rettangolare



fig. 5.12 - Griglia di punti per la determinazione degli allungamenti

Il provino viene afferrato sui quattro lati evidenziati con una campitura a 45° ed il carico viene dedotto dalla lettura della cella di carico della macchina di prova monoassiale diviso il numero di coppie di afferraggi.

I risultati mostrati da *B. Dunkan* variano a secondo delle coppie di *punti marker* presi in considerazione per il rilievo degli allungamenti principali, per un sistema di punti ordinato secondo quanto mostrato nella fig. 5.13.

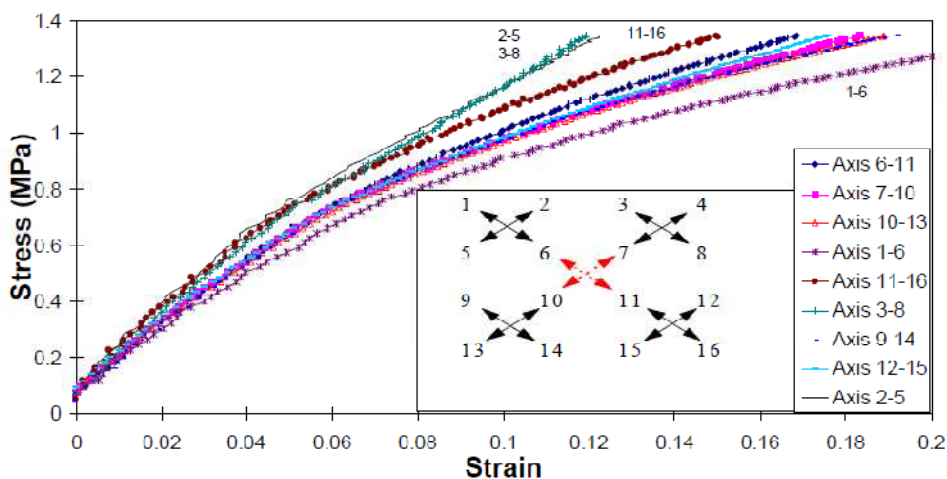


fig. 5.13

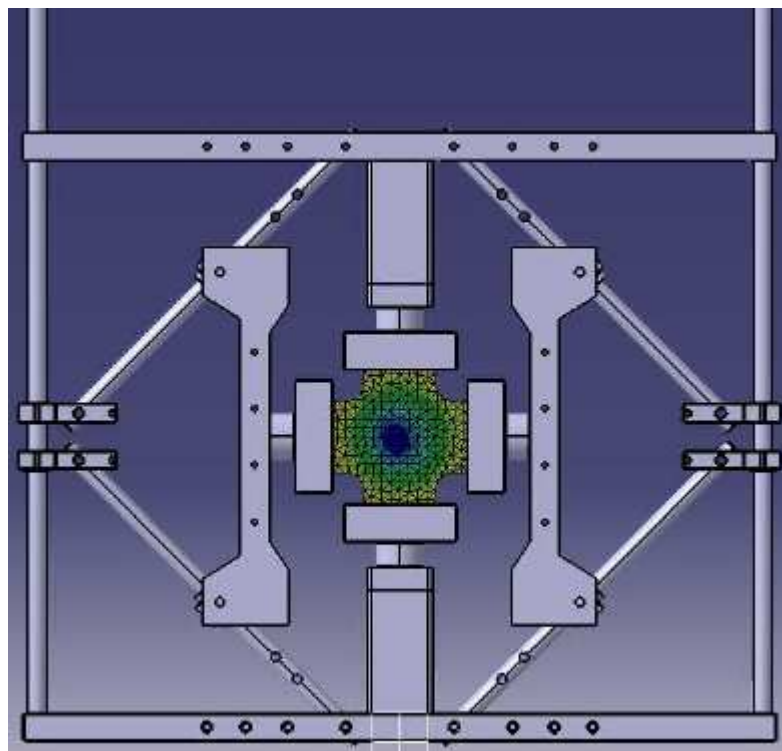
Secondo l'autore i *punti marker* che meglio rappresentano la caratteristica biassiale sono le coppie 6-11e 7-10, quindi nella sola zona centrale del provino, motivo per il

quale sembra ovvio che l'utilizzo di *marker lineari* disposto come li presenta l'autore(fig. 5.11) sono poco efficaci.

In effetti,sulla base dei risultati ottenuti dagli autori *M. Brieu, J. Diani e N. Bhatnagar*, i risultati presentati da *B. Dunkan* non rappresentano una biassiale pura ma il risultato di una trazione biassiale con rapporto  $r$  fra gli allungamenti variabile

In ultimo, la volontà di voler indagare mediante estensimetro ottico, con il sistema a pantografo proposta da *B. Dunkan*, a causa della chiusura degli assi di carico, porterebbe, probabilmente, il provino a deformarsi *accartocciandosi*,e quindi a portare alcune zone fuori dal piano di rilievo ottico.

Un sistema di trazione analogo a quello presentato dagli autori *M. Brieu, J. Diani e N. Bhatnagar*, presente in letteratura, è quello presentato dagli autori *M. Sasso, G. Palmieri, G. Chiappini, D. Amodio*[38], il cui schema è riportato di seguito.



*fig. 5.14 – Schema sistema di trazione*

Per il sistema di fig. 5.14 non ci sono particolari osservazioni in quanto è un sistema analogo, sostanzialmente specchiato e modificato, al sistema proposto dagli autori *M. Brieu, J. Diani e N. Bhatnagar*, i quali hanno però aggiunto una cella di carico

sull'asse orizzontale e una sull'asse verticale in modo da controllare il carico sugli assi e confrontarlo con il carico letto dalla cella di carico installata sulla traversa della macchina monoassiale.

Di diversa concezione è il sistema riportato in fig. 5.15-16, utilizzato nei laboratori della "AXEL, Physical Testing Services"<sup>19</sup>.

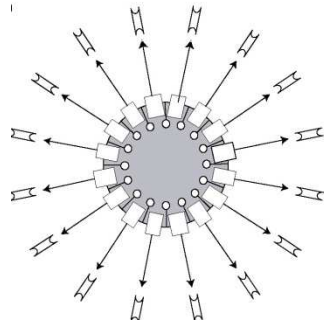


fig. 5.15– Schema di carico provino a membrana



fig. 5.16 – Sistema di prova

Il sistema mostrato è del tipo indipendente ed utilizzato per test su provini planari a membrana[33]. Quest'ultimo è costituito da un attuatore e da una cella di carico, al quale è collegato un sistema di tiro a cavi in acciaio. La macchina permette, quindi, la distribuzione del carico su più assi, fornito da un unico attuttore, in maniera uniforme su tutti i lembi del provino (fig. 5.16) mantenendo costanti le direzioni di carico.

Quindi, la sollecitazione sul provino:

$$\sigma = \frac{F}{\pi * D * t} \quad (5.02)$$

dove **F** è il carico letto alla cella di carico, **D** è la distanza iniziale fra i due marker e **t** è lo spessore iniziale del provino.

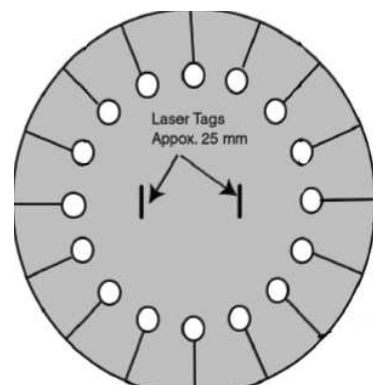


fig. 5.17

Il vantaggio di quest'ultimo è quello di poter convertire il sistema da prove biassiali in test su membrane. Anche in questo sistema, come nei precedenti sistemi discussi, il

<sup>19</sup>AXEL, Physical Testing Services, Equibiaxial Stretching Rev.2, July, 2000

carico è quello letto dalla cella di carico e distribuito sul numero di ganasce, mentre, le deformazioni sono lette mediante un estensimetro ottico che rileva le deformazioni mediante due marker lineari sulla superficie.

## 5.2. Sviluppo di un Sistema di Trazione Biassiale

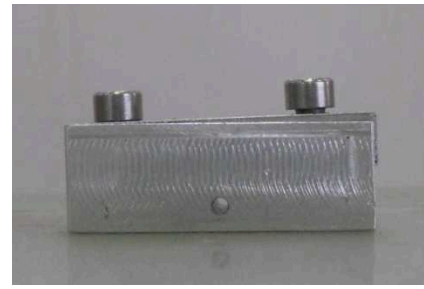
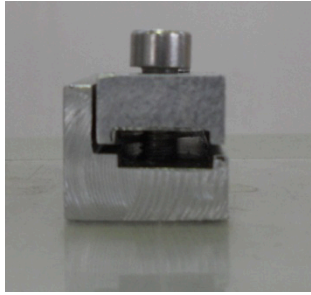
Per i motivi esposti al paragrafo precedente sui sistemi di conversione di macchine da monoassiale a biassiali, di individuazione e di inseguimento dei marker, durante i test, è risultato evidente che il sistema in fig. 5.15-16 è di più semplice utilizzo e realizzazione e toglie, inoltre, ogni dubbio sulla ortogonalità degli assi. Poiché il sistema è del tipo indipendente, quindi con sistema di carico e celle di lettura dedicate, si è pensato di realizzare un sistema che abbia i vantaggi tecnici di quest'ultimo, limitandone il costo di realizzazione.

Il sistema è quindi concepito come accessorio alla macchina di trazione monoassiale.

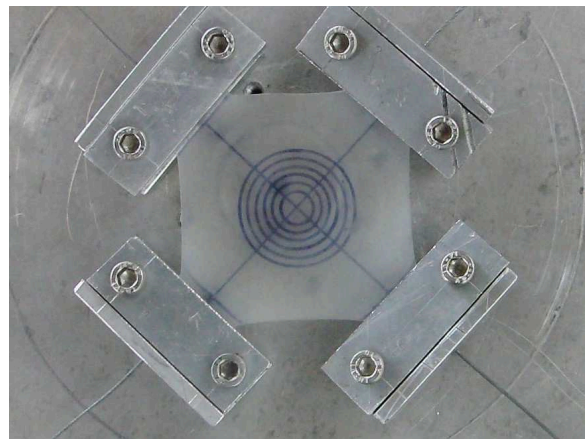
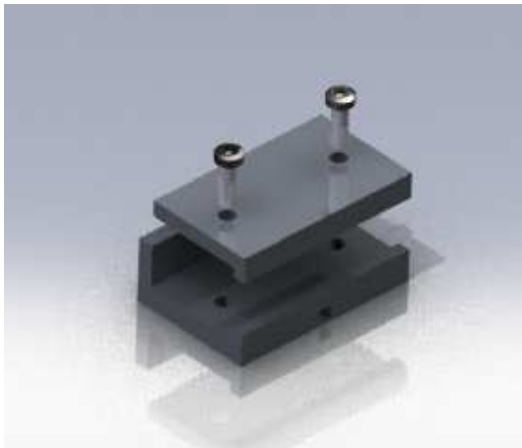
Risolto il problema di come poter distribuire il carico e lo spostamento sui lembi del provino, rimane ancora il problema di dover agganciare il provino senza danneggiarlo prima e durante il test e come poter rilevare lo *strain* visto che il provino si trova in posizione normale alla direzione di carico della macchina.

Per quanto riguarda gli afferraggi è stata pensata la soluzione mostrata di seguito (fig. 5.18-a-b), dove si mette in evidenza una cavità interna pensata per ospitare il materiale, che durante la chiusura delle facce interne provoca un aumento di volume, necessario ad impedire che lo stesso scivoli durante la trazione con l'inevitabile conseguente diminuzione di spessore. La soluzione della cavità è analoga alla soluzione adottata per il sistema di afferraggio per i test planari.



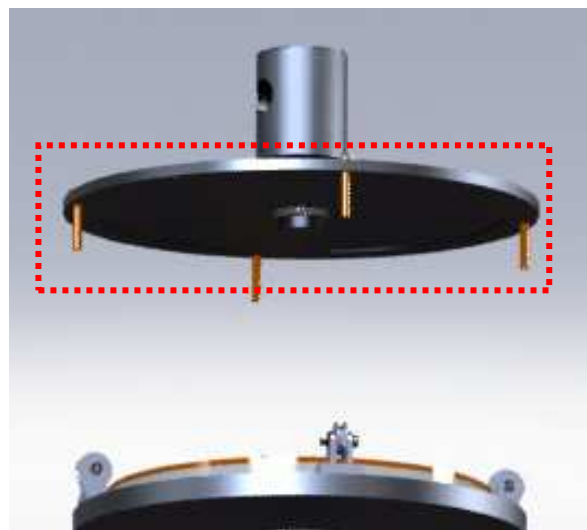


*fig. 5.18a – Sistema di afferraggio*



*fig. 5.18b – Sistema di afferraggio*

La movimentazione ed il trasferimento di carico, dalla traversa superiore della macchina, ai lembi, avviene mediante dei cavi in acciaio, fissati al componente evidenziato in figura, solidale alla traversa, e da pulegge lubrificate in modo da abbattearne gli attriti.

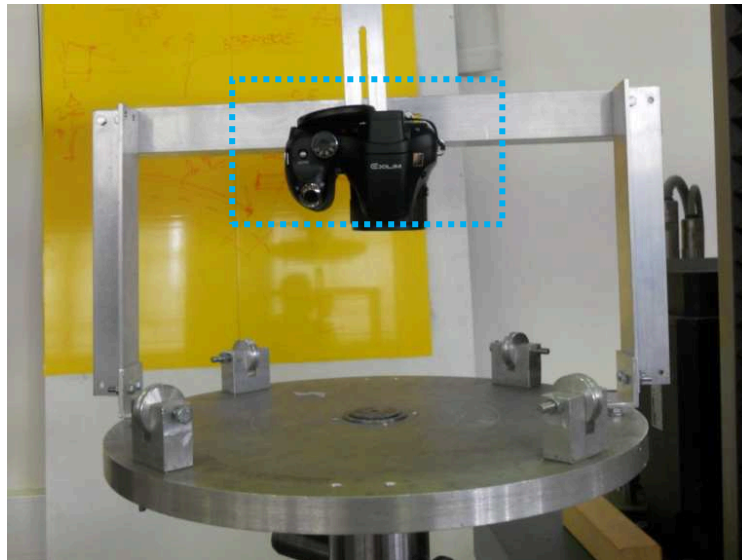


*fig. 5.19 – Particolare componente alla traversa mobile*



Sul componente solidale alla traversa, per meglio inizializzare il tiro, sono stati realizzati dei regolatori filettati mediante delle vite filettate forate (fig. 5.19).

Poiché il supporto del sistema è un disco in alluminio posto in posizione normale alla direzione di carico della macchina di prova e poiché il provino per la prova biassiale si trova anch'esso parallelo a quest'ultimo per tutta la durata della prova, per rilevare le deformazioni, il sistema è stato predisposto per ospitare un ponticello in alluminio, regolabile sul quale è alloggiata la camera CCD per l'acquisizione delle deformazioni (fig. 5.20).



*fig. 5.19 – Unità acquisizione video*

Installando il sistema di acquisizione video direttamente sul piano, in maniera solidale, si elimina il problema di movimenti relativi fra la camera e il provino e di parallelismo fra quest'ultimo e il piano ottico di osservazione.

### 5.3. Sincronizzazione dati

I *set – up* utilizzati per il presente lavoro di tesi, non sono sincronizzati a priori, ovvero non permettono una correlazione diretta tra il carico e lo spostamento.

Quando, infatti, viene avviato il test, l'accensione della macchina di prova monoassiale e della camera CCD, non avviene in maniera simultanea poiché non hanno un trigger che li sincronizzi.

Per la successiva sincronizzazione dei dati provenienti dalla cella di carico e degli allungamenti principali dedotti come detto nel Cap.3, la procedura di test prevede l'avvio prima della camera CCD e una volta stabilizzato il movimento della camera viene avviata la macchina di prova.

Procedendo in quest'ordine si è sicuri di acquisire tutta la prova dall'avvio fino alla rottura del provino, ma il *frame* iniziale non corrisponde con l'istante di avvio della prova.

Volendo esprimere graficamente il concetto prima esposto, considerando sull'asse delle ascisse il tempo assoluto sincrono, si ha:

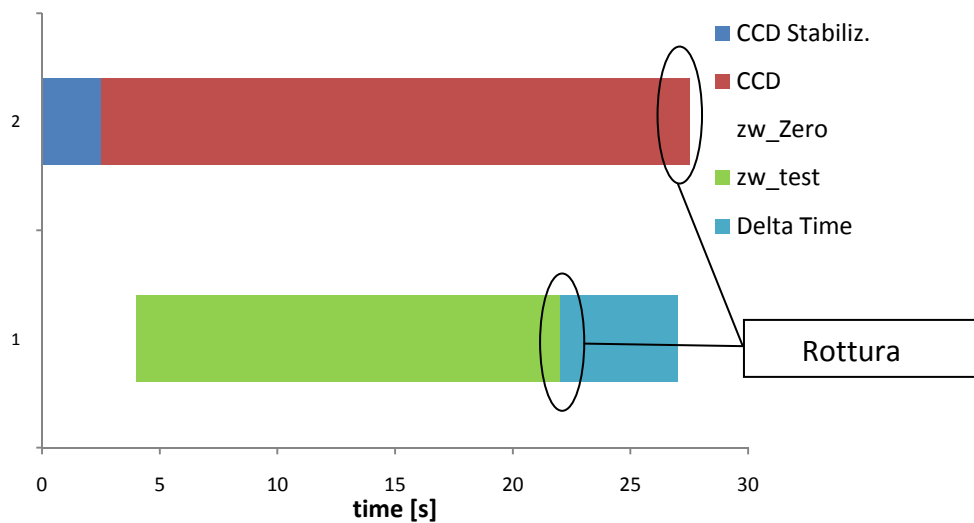


fig. 5.20 –Sfasamento temporale

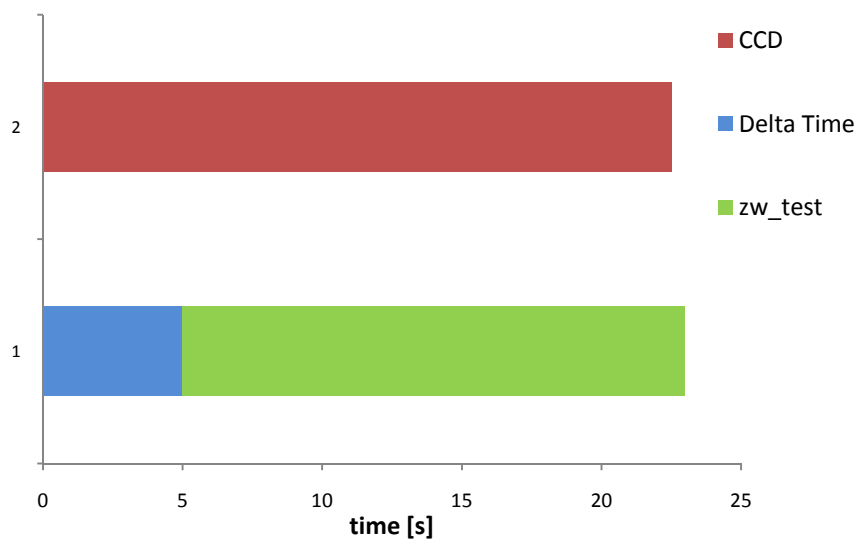


fig. 5.21 –Sincronizzazione dei tempi

Dove in fig. 5.20 sono rappresentati i tempi della camera CCD e della macchina di prova sfasati e nella fig. 5.21 la sincronizzazione temporale.

In particolare per sincronizzare i dati, facendo riferimento alla fig. 5.20, il tempo delle immagini, deducibile dalla frequenza di acquisizione, deve essere decurtato di un tempo iniziale di assestamento per stabilizzare eventuali movimenti della macchina e di una porzione di tempo dopo la rottura.

Allo stesso modo, per sincronizzare il tempo della macchina, quest'ultimo deve essere depurato di un tempo iniziale, dovuto all'avvio non sincrono rispetto alla macchina CCD.

Infine il tempo della macchina di prova si deve *shiftare* della quantità indicata *Delta-Time* in fig. 5.20-21, in avanti nel tempo, ovvero vengono fatti coincidere i tempi di rottura visibili nelle immagini e quello evidenziale nel tracciato forza-tempo della macchina di prova (fig. 5.22).

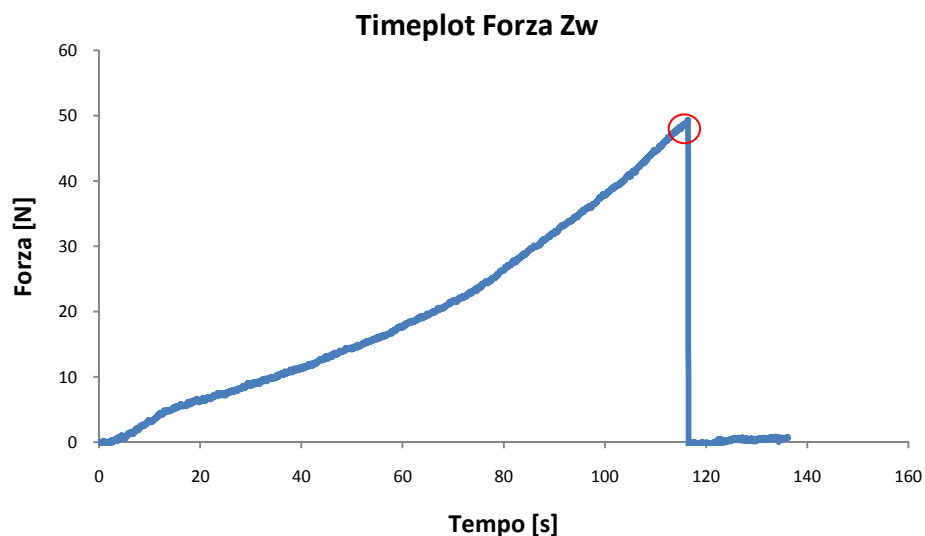


fig. 5.22 –Plot Forza - Tempo

## 5.4. Codice di Sincronizzazione

La valutazione del tempo di rottura nelle immagini nel time-plot della forza,(ottenuta dalla macchina di prova) e la loro successiva sincronizzazione, per un elevato numero di prove,diventa eccessivamente dispendioso sia in termini di tempo sia soprattutto per gli elevati dati da elaborare, ciò potrebbe introdurre degli errori.

A questo punto si è dunque pensato di automatizzare il processo di analisi dei dati e di sincronizzazione, mediante un'opportuna funzione in Matlab®.

È stata quindi creata una funzione che elabora, sincronizzando i tempi, i dati provenienti dalla macchina di prova e i dati provenienti dal *post – processing* delle immagini mediante il software Vision Builder (Cap. 4).

La funzione denominata Synchro, riportata in appendice, richiama altre tre funzioni a seconda che si voglia eseguire l'analisi dei dati provenienti dal test monoassiale, planare o biassiale, restituisce in uscita i file contenenti i dati relativi alla curve *stress-strain* e i grafici relativi.

Di seguito viene riportato lo schema logico del funzionamento della funziona.

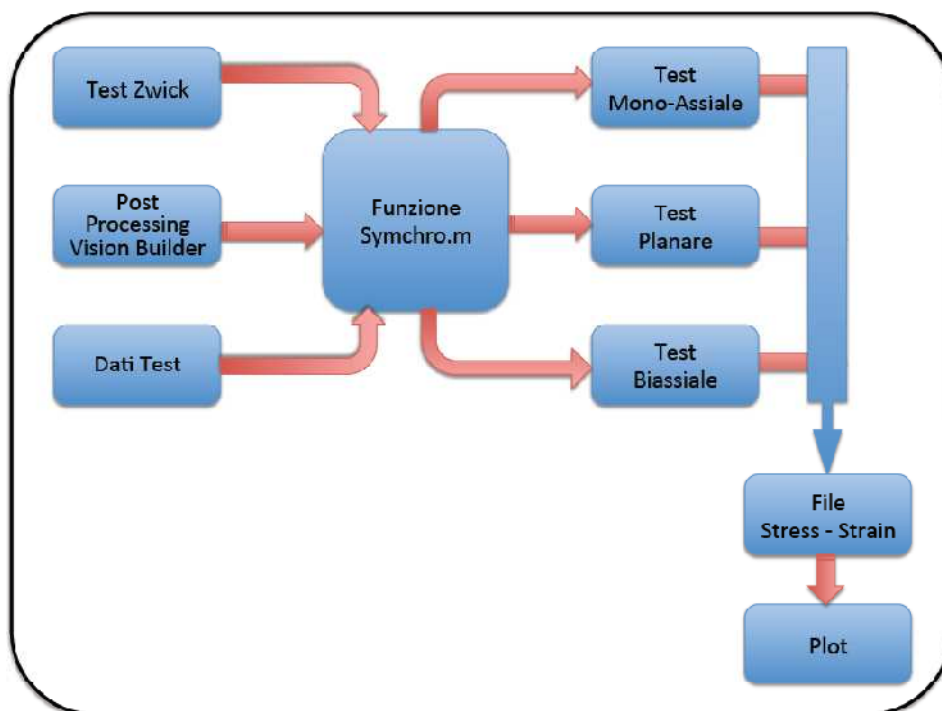


fig. 5.23

Nel caso di selezione di analisi monoassiale la funzione chiede in ingresso tre file, due di *post-processing* delle immagini riguardanti la deformazione longitudinale e trasversale, il primo necessario per la determinazione della curva stress-strain e il secondo utile per la determinazione dell'andamento del *coeff.* di *Poisson* al variare della deformazione longitudinale sull'asse delle ascisse; il terzo un file relativo alla macchina di prova. La funzione, oltre all'input dei file di test, chiede la definizione dall'utente del frame alla quale avviene la rottura del provino, la frequenza di acquisizione e la dimensione della sezione trasversale e della distanza degli afferraggi o di lunghezza utile del provino espressi in millimetri.

Il risultato dell'analisi dei dati, mediante la funzione, si presenta graficamente come segue:

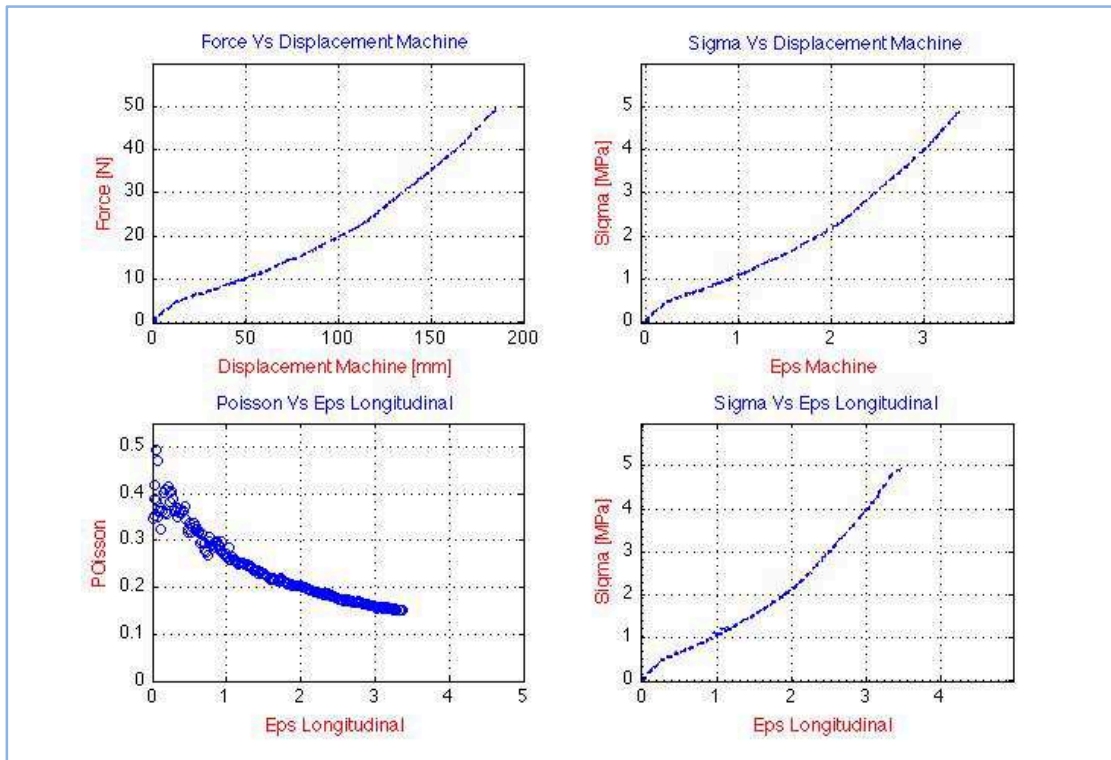
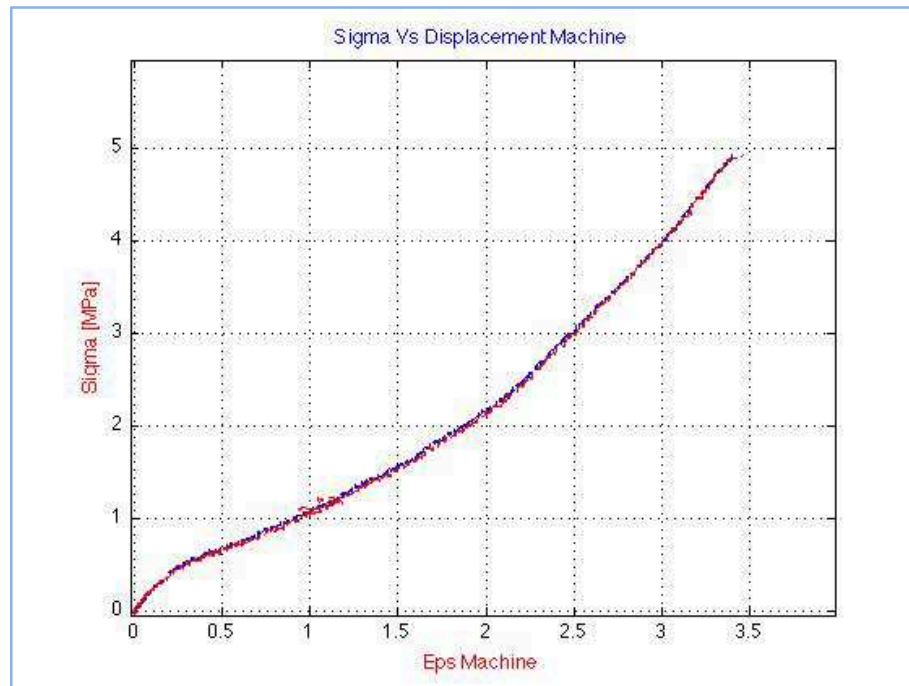


fig. 5.24

dove i primi due plot in alto sono relativi alla sola macchina di prova, il primo in basso a sinistra è relativo al *coeff.* di *Poisson*, il secondo rappresenta la curva *stress-strain* sincronizzata.

In fig. 5.25 viene riportato un ulteriore risultato grafico di output della funzione, che mette a confronto la curva ottenuta dalla sola macchina di test con la curva ottenuta dalla sincronizzazione del carico della macchina con le deformazioni dell'acquisizione

video. Quest'ultimo risultato è importante perché conferma la corretta funzionalità della funzione e della metodologia utilizzata per la determinazione delle deformazioni anche in altri test.



*fig. 5.25*

Per il test planare (analogamente al test monoassiale) la funzione chiede: il file della prova di trazione, il file del post-processing delle immagini, la distanza iniziale degli afferraggi e la geometria della sezione.

In fig. 5.26 seguente viene riportato il risultato grafico di output della funzione che mette a confronto la curva ottenuta dalla sola macchina di test con la curva ottenuta dalla sincronizzazione del carico della macchina con le deformazioni dell'acquisizione video.

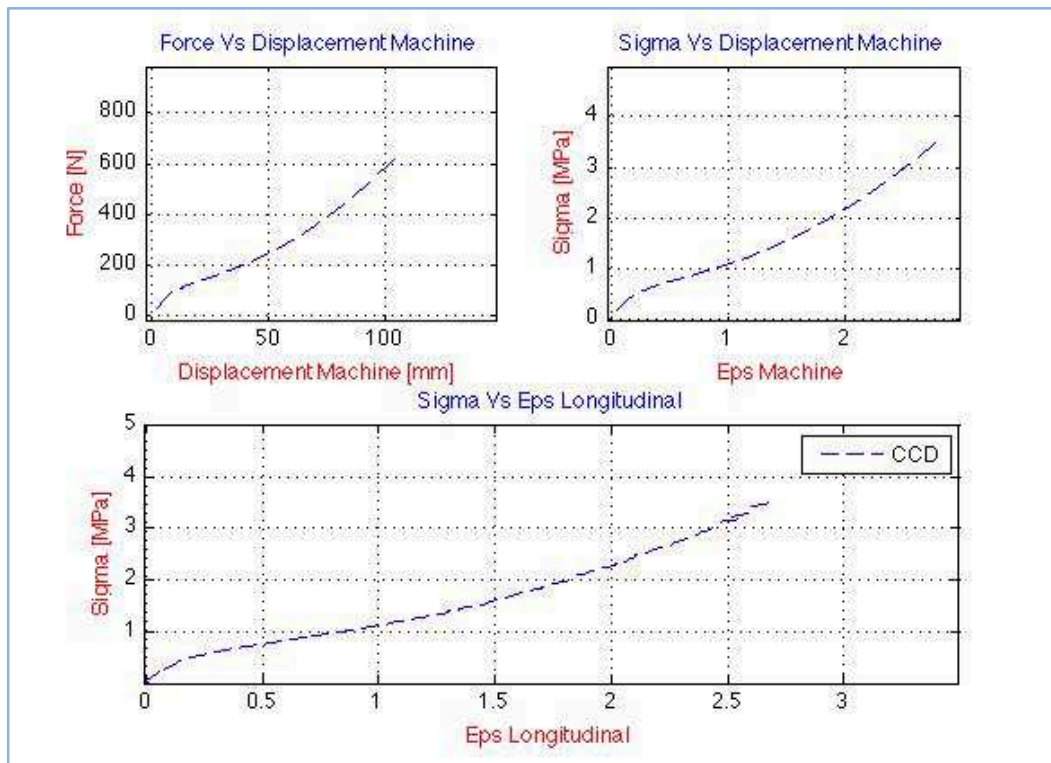


fig. 5.26

Come per il test monoassiale, i primi due risultati grafici sono relativi al test della macchina di prova e il terzo plot in basso mostra la curva sincronizzata. In fig. 5.27 viene invece mostrata la curva ottenuta dalla sola macchina e quella ottenuta dalla sincronizzazione.

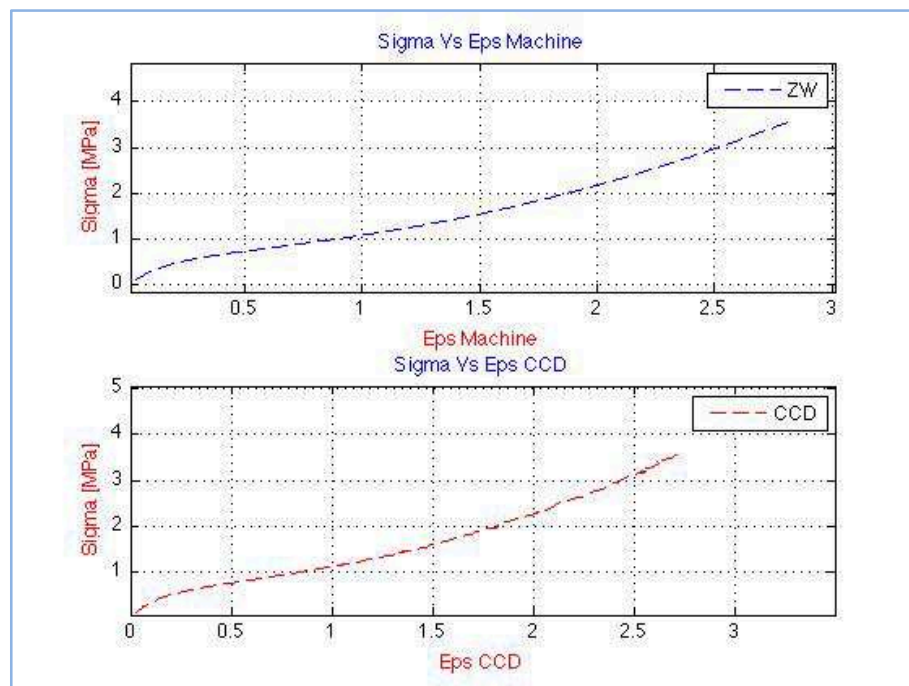


fig. 5.27

Quando invece si seleziona la modalità di analisi per test biassiale, la funzione, oltre a chiedere i parametri relativi alla geometria del provino ed alla modalità di acquisizione, chiede due file provenienti dall'analisi delle immagini relative al diametro orizzontale e verticale del *marker* circolare analizzato, ovvero il *marker* da analizzare secondo la numerazione data in fig. 6.26 a pag. 102 del Cap. seguente.

Di seguito viene riportato il risultato grafico di output della funzione che mette a confronto la curva ottenuta dalla sola macchina di trazione con la curva ottenuta dalla sincronizzazione del carico della macchina con le deformazioni dell'acquisizione video e delle curve *stress – strain* ottenute sui diametri in direzione ortogonale e verticale.

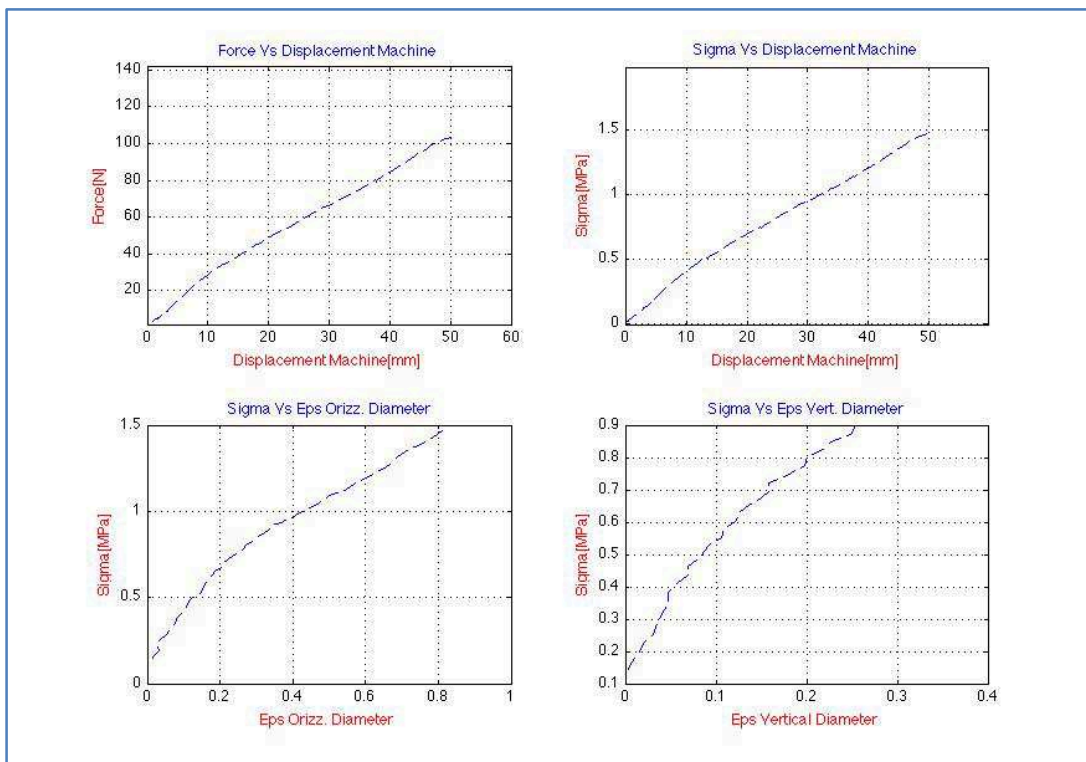
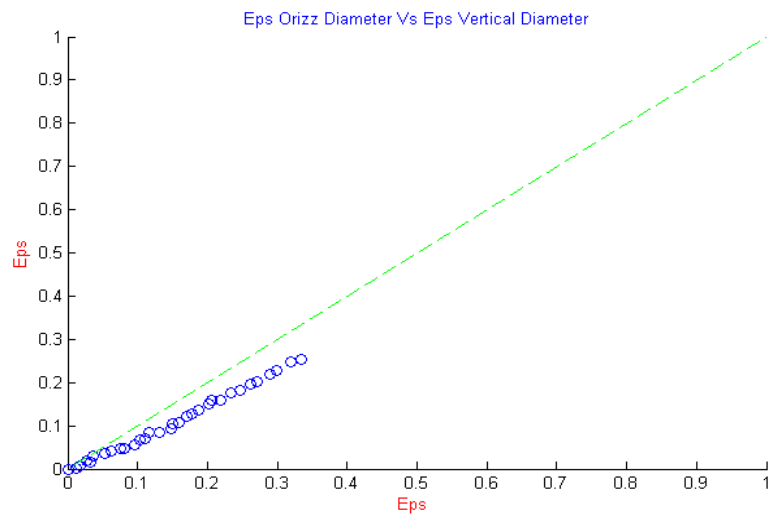


fig. 5.28

In fig. 5.29 seguente viene riportato un ulteriore risultato grafico di output della funzione che mette a confronto le deformazioni ottenute sui diametri in direzione verticale ed orizzontale, in modo da avere una visione d'insieme della bontà del test.





*fig. 5.29*

# 6

## Prove Meccaniche

## 6. Prove Meccaniche

---

Le prove meccaniche eseguite in laboratorio, per la caratterizzazione sperimentale, sono quelle discusse nei paragrafi precedenti e che sostanzialmente sono essenziali al *fitting* della caratteristica del materiale con i modelli esposti.

Il materiale oggetto di studio è un comune silicone, in fogli dallo spessore di 1 [mm], prodotto dall'azienda *Angst+Pfister*, con sigla commerciale VMQ 50 Sh.

I test sono stati eseguiti tutti sullo stesso foglio proveniente dalla stessa azienda, quindi ogni test è riferito al materiale prodotto nello stesso istante e con identico processo industriale.

A riguardo delle prove monoassiali, queste sono state fatte con una macchina di trazione, di tipo elettrica Zwick/Roell serie Z100 con cella di carico da 100[KN].

Come già accennato nei capitoli precedenti, per i test meccanici non si trovano indicazioni sulle modalità dei test, in particolare sulla velocità di esecuzione.

Sono state quindi eseguite delle prove preliminari di trazione monoassiale a velocità variabile per indagare sulla dipendenza della velocità di prova. Un forte legame tra la velocità ed i valori di sforzo-deformazione implicherebbe ovviamente il tener in considerazione la viscoelasticità del materiale.

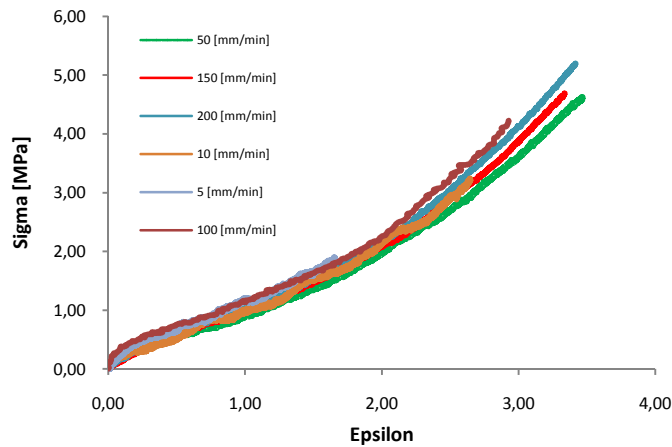
I test preliminari di cui sopra, sono stati condotti impostando dei *range* di velocità da 5 a 200 [mm/min.]. In effetti, la normativa ASTM D412/D695 indicherebbe una velocità di test, per materiali plastici e similari, di 500 [mm/min.], ma dai risultati ottenuti, al variare della velocità (fig. 6.1) si può osservare come la dipendenza dalla velocità è praticamente trascurabile.

Durante i test si è anche osservato che abbassando eccessivamente la velocità, il materiale tende a rilassarsi e quindi per evitare tale effetto si deve superare la soglia dei 50 [mm/min.].

A fronte di tale risultato, per tutte le prove meccaniche, si è imposta una velocità di test di 100 [mm/min.], limite inferiore oltre al quale la caratteristica è abbastanza stabile.

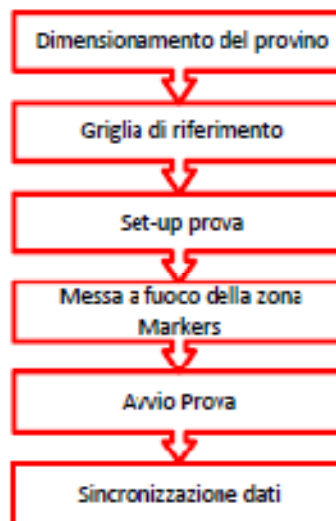
Di seguito sono riportate alcune delle prove monoassiali eseguite in un *range* da 5 a 200 [mm/min].

Nei paragrafi seguenti verranno esposti i *set-up* e le procedure per i test eseguiti sul materiale.



*fig. 6.01 – Sforzo-Deformazione a velocità variabile*

In generale per tutti i test svolti è stata seguita la procedura esposta in maniera sintetica in fig. 6.02, come sequenza di attività.



*fig. 6.02*

## 6.1 Test di trazione monoassiale

Al fine di ottenere una prova di sforzo “pura” si è preferito utilizzare una geometria semplice, dalla forma allungata per ridurre gli effetti di bordo.

In generale per eseguire test su materiali lineari, come ad esempio l'acciaio, la tipica forma utilizzata è ad “osso di cane”, in questo caso si è optato per un provino di forma rettangolare 70x10x1 [mmxmmxmm]. La scelta è motivata dalla volontà di voler confrontare i valori di deformazione, ottenuti dall'analisi dei fotogrammi, con gli spostamenti imposti dalla macchina.

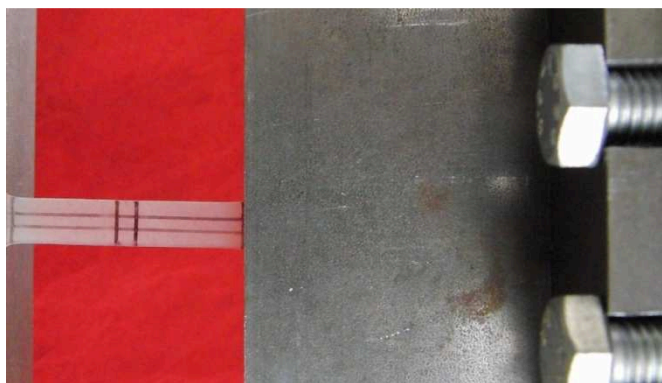
Tale verifica è utile per validare il sistema misuristico, che sostituisce nei fatti le tecniche estensimetriche di contatto inapplicabili per le caratteristiche meccaniche del materiale oggetto di studio.

A tal fine si è, quindi, deciso di avere un provino con una distribuzione di materiale sulla larghezza il più omogeneo possibile. In particolare, data la natura del materiale, il taglio del provino, seguendo una geometria ad osso di cane, provocherebbe delle inevitabili imperfezioni sullo stesso, soprattutto nella zona di raccordo tra la zona degli afferraggi e la lunghezza utile.

Dimensionato il provino, diventa di fondamentale importanza l'apposizione della griglia per il rilievo ottico.

Un forte contrasto tra le linee tracciate ed il materiale favorisce il riconoscimento automatico della variazione d'intensità luminosa, rilevata dal software di elaborazione immagini (Cap. 3).

Poiché la prova permette di riprodurre uno stato di tensione perfettamente monoassiale solo nella zona centrale del provino, è stata apposta una griglia localizzata in tale zona, formata da *marker* lineari, lungo tutto il provino, sia in lunghezza che in larghezza, formanti una griglia rettangolare dalle dimensioni 5 x 5 [mmxmm] (fig. 6.03).



*fig. 6.03 – Marker su provino monoassiale*

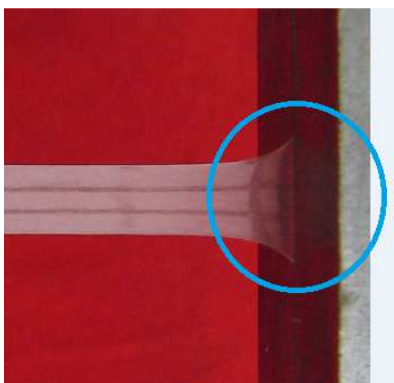
E' ovviamente importante apporre altre due linee *marker* equidistanti, necessarie per il posizionamento del provino all'interno delle ganasce. Di fatto la lunghezza utile del provino è circa  $l_{ut} = 50 [mm]$ , poiché le zone di afferraggi sono tarate per un massimo di  $10 [mm]$  dal rispettivo bordo.

Durante la prova il materiale subisce allungamenti superiori al 300%, per cui è necessario che la macchina CCD inquadri una zona ampia, compatibilmente con la risoluzione che si vuole ottenere nella zona d'interesse per evitare la perdita di dettagli, ed in modo da poter valutare in ogni immagine non solo le deformazioni del marker centrale, ma anche le condizioni in zona di afferraggio.

Il controllo delle zone di afferraggio, durante tutta la fase di trazione, permette di tener sotto controllo eventuali scivolamenti di alcune zone del provino, in genere presenti in fase avanzata del test e dovuti essenzialmente alla forte riduzione dello spessore.

In questo caso la prova risulta, evidentemente, nulla.

Di seguito viene mostrato un esempio di scivolamento del provino in fase avanzata di test (fig. 6.04).



*fig. 6.04 – Scivolamento*

Nella zona cerchiata si possono osservare i *markers* che definivano la posizione degli afferraggi, e che all’inizio della prova erano completamente all’interno delle ganasce.

Lo scivolamento del materiale è anche confermato dalla lettura del grafico ottenuto dalla cella di carico. Com’è possibile osservare dal confronto delle fig. 6.05-06 è evidente un repentino abbassamento della curva ed una successiva ripresa.

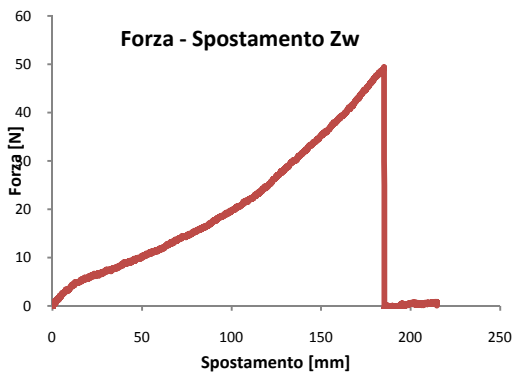


fig. 6.05

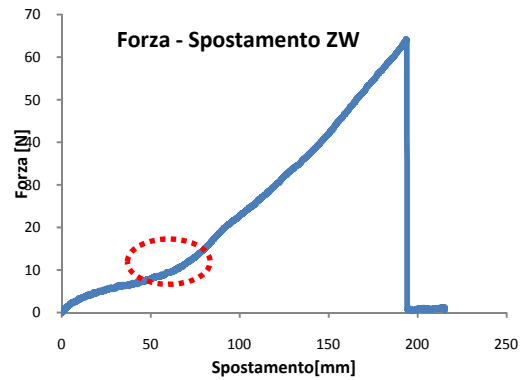


fig. 6.06

Grazie allo strumento “*edge detection*”, presentato nel capitolo precedente, è possibile identificare la posizione di due o più punti espressi nelle coordinate del sistema di riferimento locale e la loro distanza relativa.

L’intenzione di applicare il sistema di lettura degli spostamenti mediante metodologia ottica sui test monoassiali permette di validarne la tecnica.

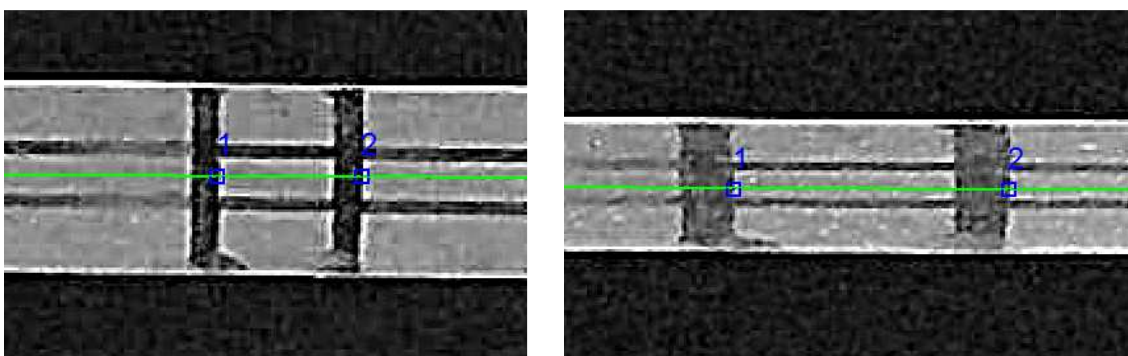


fig. 6.07 – Inseguimento dei Marker

Applicando la nota formula di deformazione ingegneristica, si determina il valore di deformazione per ogni immagine (o istante).

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (6.01)$$

In questo modo sono stati ricavati sia i valori di deformazione longitudinale sia di contrazione trasversale.

A seguito della sincronizzazione è stata valutata l'entità del *nominal stress* e del *true stress*:

$$f = \frac{F}{A} \quad (6.02)$$

$$t = \frac{F}{A'} \quad (6.03)$$

Dove  $A'$ , la sezione istantanea, è stata calcolata sulla base dell'assunto di incompressibilità, ovvero il valore dello spessore non viene misurato ma calcolato.

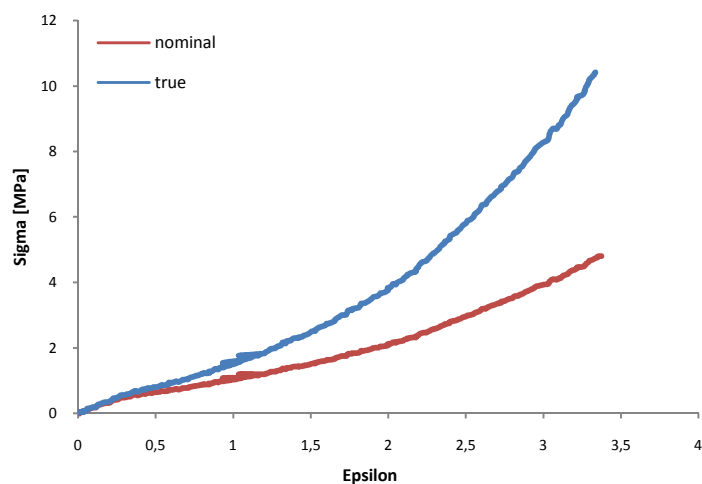
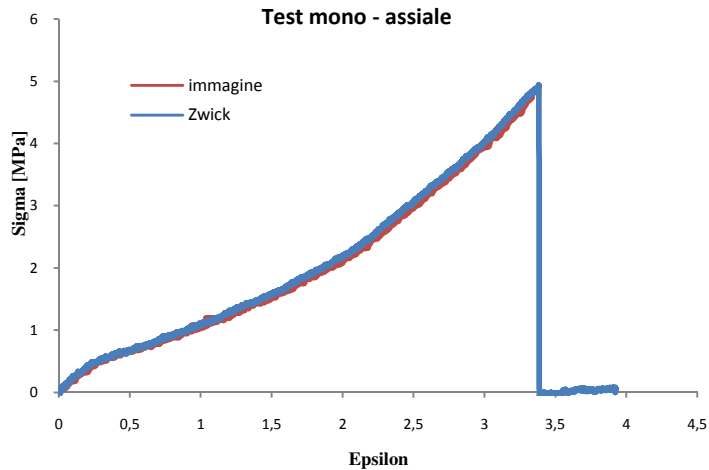


fig.6.08 – Diagramma sperimentale dei valori nominali e reali di sforzo

Per valutare la coerenza e la precisione delle deformazioni ottenute dall'analisi dei *frames* queste sono state confrontate con gli spostamenti della traversa della macchina imposti dall'attuatore lineare.





*fig.6.09 – Validazione metodologia ottica*

La sovrapposizione tra il diagramma sforzi - deformazioni ( $f - \varepsilon$ ) relativo all'analisi delle immagini (curva in rosso) e quello ricavato dai dati di spostamento della traversa della macchina ( $f - \delta$ ) (curva in azzurro), mostrano una ottima corrispondenza (fig. 6.09) dimostrando la validità del sistema utilizzato. In particolare, per permettere tale confronto:

$$\delta = \frac{\delta'}{l_{ut}} \quad (6.04)$$

dove  $\delta'$  è lo spostamento della traversa e  $l_{ut}$  è la lunghezza utile del provino misurata ad ogni test fra le ganasce.

Eseguiti i test e validata la tecnica, si è passati alla determinazione degli invarianti.

La determinazione degli invarianti per ogni test, permette di capire, soprattutto per test più complessi, se le deformazioni rilevate sono concordi con le deformazioni principali.

Nei capitoli precedenti sono stati definiti gli invarianti come di seguito:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (6.05)$$

Volendo, quindi, considerare il materiale incompressibile, è possibile determinare la relazione fra il primo ed il secondo invariante, che per le tre tipologie di test, diventa:

Mono - assiale	Planare	Biassiale
$I_1 = \lambda^2(1 + \frac{2}{\lambda})$	$I_1 = \lambda^2 + 1 + \frac{1}{\lambda^2}$	$I_1 = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4}$
$I_2 = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2}$	$I_2 = 2 + \lambda^2$	$I_2 = \lambda^4 + \frac{2}{\lambda^2}$

Tab.6.01

Dalle relazioni prima espote in tab. 6.01, si ottiene il seguente grafico:

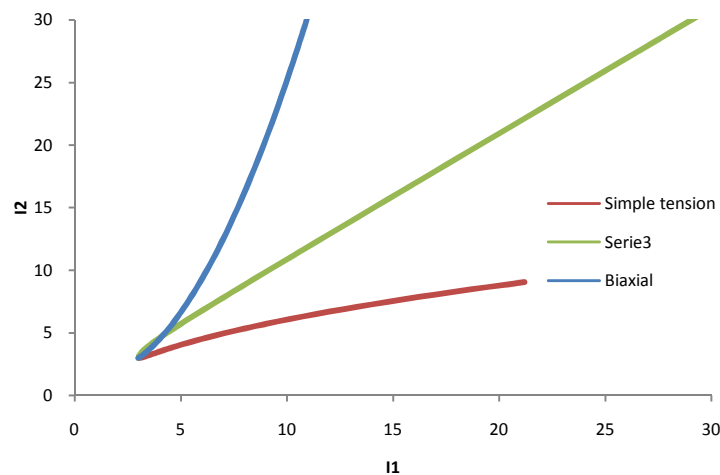


fig. 6.10 – I1 vs-I2

Nel caso di test monoassiale, calcolando gli allungamenti rilevati sul provino e sovrapposti alle curve base di fig. 6.10, si è fatta una valutazione della bontà del test.

In fig. 6.11 viene riportata una valutazione degli invarianti su una prova monoassiale.

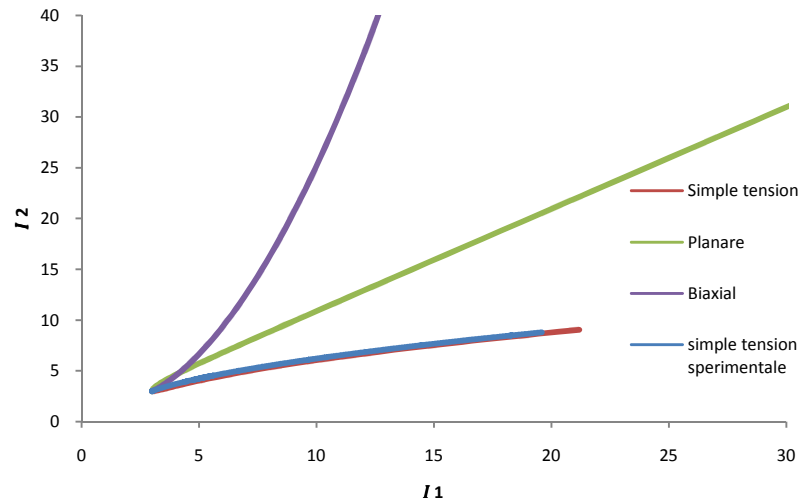


fig. 6.11– Confronto tra invarianti sperimentali e teorici

## 6.2 Risultati test monoassiali

I test effettuati secondo la procedura prima esposta, con riprese da fotocamera con *frame - rate* di 30 [*frames/s*], hanno mostrato una buona corrispondenza tra i risultati delle varie prove nelle zone di piccola e media deformazione (fino a un allungamento del 150%) e una non significativa divergenza tra quelli di grande deformazione fig. 6.12.

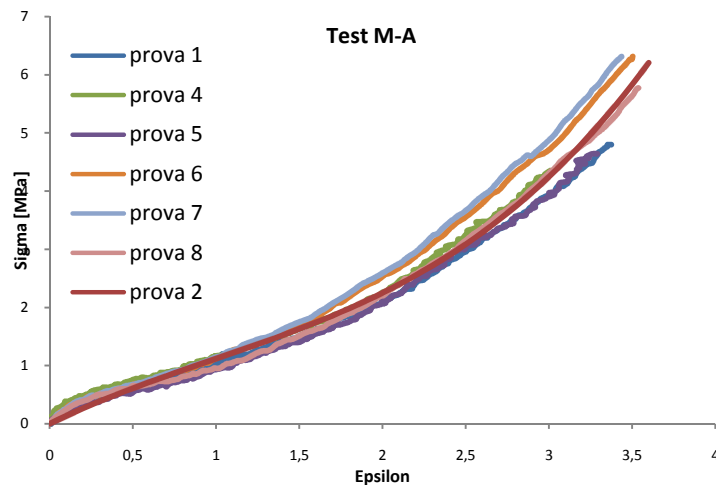


fig. 6.12

Nell'ottica di ottenere una sola curva caratterizzante il comportamento a trazione monoassiale, ci si è avvalsi di logiche di interpolazione attraverso il metodo dei minimi quadrati. In particolare la curva trovata risulta essere quella che minimizza la somma

dei quadrati delle distanze tra i punti sperimentali e quelli teorici, ovvero quella per cui il valore di  $R^2$  è più prossimo al valore unitario.

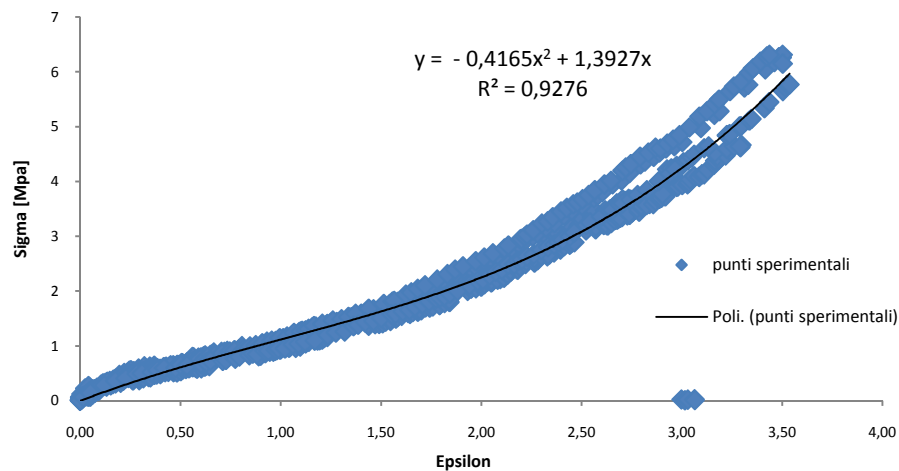


fig. 6.12– Fitting test mono - assiale

Il risultato dell'interpolazione è un polinomio di grado 3 di equazione:

$$zy = 0,1412x^3 - 0,4165x^2 + 1,3927x$$

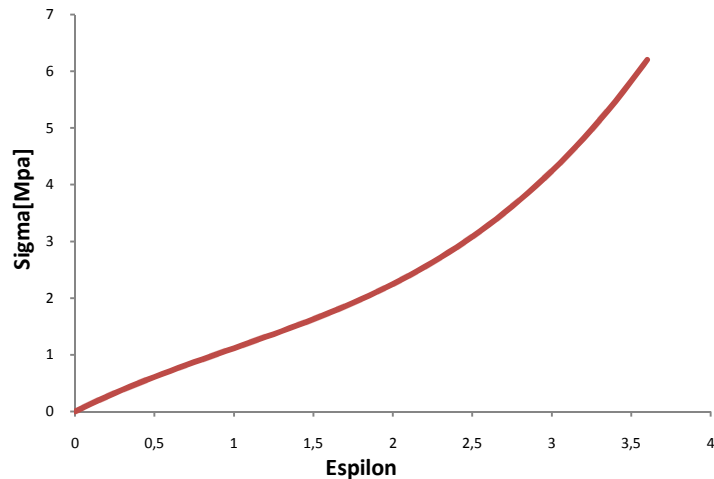
$$R^2 = 0,9276$$

Tab. 6.02

In realtà un polinomio di grado maggiore mostrerebbe un *fit* migliore ( $R^2$  prossimo all'unità), ma in base al *fenomeno di Runge*<sup>20</sup>, si correrebbe il rischio di provocare un aumento dell'ampiezza d'errore nelle zone di estremo dell'intervallo dei punti considerato.

Di seguito, in fig. 6.13, viene mostrato il *fitting* delle prove eseguite.

<sup>20</sup> Consiste nell'aumento di ampiezza dell'errore in prossimità degli estremi dell'intervallo.



*fig. 6.13 – Fitting delle prove sperimentali*

## 6.2.1 Coeff. di Poisson

L'apposizione di una griglia sulla superficie del provino, oltre a permettere l'analisi delle deformazioni longitudinali, permette allo stesso tempo di indagare sulla deformazione trasversale in maniera sincronizzata, utilizzando, la stessa sequenza video.

Per la dispersione dei dati di deformazione trasversale è stata utilizzata la stessa procedura di *fitting*, in modo da avere un'unica curva rappresentativa, discussa nel paragrafo precedente.

L'indagine sulla deformazione trasversale e quindi sul *coeff.* di *Poisson*, ha permesso il confronto fra il valore teorico e lo sperimentale.

In particolare, il calcolo del coefficiente di *Poisson* sperimentale è dato dalla relazione:

$$\nu_{sperim.} = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l} = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_1} \quad (6.06)$$

mentre il valore teorico[31]:

$$v_{teorico} = \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1} = \frac{1 - 1/\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1 - 1} \quad (6.07)$$

I risultati sperimentali mostrano un valore di  $\nu$  inferiore, se ben di poco, al valore teorico 0.5, valore dato dall'intercetta della curva con l'asse delle ordinate.

Questo implica che il materiale non è perfettamente incompressibile, dunque vi è una variazione di volume se il materiale è soggetto a deformazione e, di conseguenza, sarà necessario applicare una correzione alla funzione di energia di deformazione trovata.

Infatti, facendo riferimento a quanto esposto nel Cap. 3, sul calcolo della sollecitazione e sull'importanza del parametro **D1**, la presenza del *coeff.  $\nu$*  diverso dal valore limite teorico, attiva nel modello una variazione di sollecitazione teorica.

In realtà il limite teorico non ha un riscontro con la realtà sperimentale, non avrebbe senso, infatti, parlare di *coeff. di Poisson* per deformazioni longitudinali nulle.

Anche altri autori di modelli, definisco una piccola variazione di comprimibilità come "*quasi incompressibile*".

Andando ad analizzare l'eq. (6.07), ci si rende conto che il valore di  $\nu$  pari a 0.5 si ha solo quando il materiale è quasi fermo.

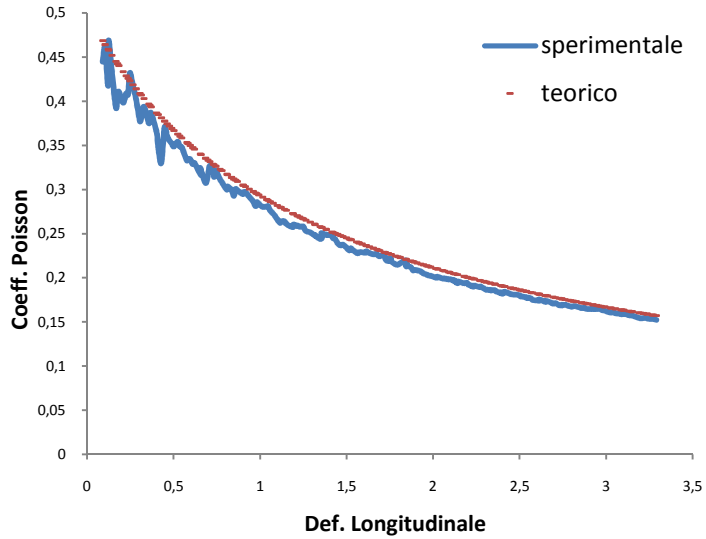
Questa incongruenza viene, infatti, superata tramite il formalismo matematico:

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow 1^+} \frac{1 - 1/\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1 - 1} \quad (6.08)$$

che risulta una forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ .

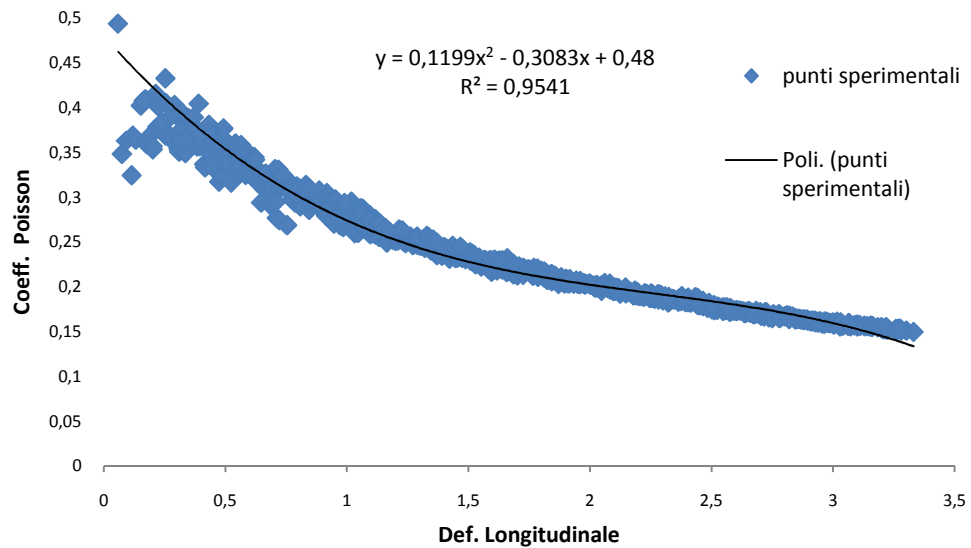
Grazie al teorema di de l'Hôpital sulla (6.08):

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow 1} \frac{1}{2} \lambda_1^{-\frac{3}{2}} = 0.5 \quad (6.09)$$



*fig. 6.14 – Confronto tra gli andamenti del coefficiente di Poisson teorico e sperimentale*

Per quanto prima detto, sul *fitting* dei valori sperimentali, di seguito viene mostrata la regressione sui valori ottenuti dai test, ed i risultati in tab. 6.03.



*fig. 6.15 – Interpolazione dei coefficienti di Poisson sperimentali*

---


$$y = -0,0176x^3 + 0,1199x^2 - 0,3083x + 0,48$$


---


$$R^2 = 0,9541$$


---

**Tab.6.03**

In verità questa tecnica non porta a dei risultati certi riguardo il valore iniziale del *coeff.* di *Poisson* da utilizzare nell'espressione della densità di energia di deformazione *W*. Ciò è dovuto al fatto che i dati ottenuti nei primi istanti della prova sono imprecisi. Il rumore o *noise* riscontrato per piccoli valori di deformazione longitudinale (fig. 6.15) è dovuta infatti a più fattori. Non appena l'attuatore lineare comincia a muoversi si notano delle vibrazioni nell'immagine a causa dell'assestamento del materiale tra le ganasce, queste scompaiono nelle fasi più avanzate.

Oltre a questo effetto, per misurare le ancora minori deformazioni trasversali in gioco, occorrerebbe una risoluzione elevatissima dello strumento di acquisizione delle immagini. E' impossibile dunque essere certi di quale sia il reale coefficiente di Poisson in questa fase d'indagine.

Per far fronte a queste difficoltà è stato messo appunto una metodologia inversa, con l'ausilio di analisi numerica, che verrà discussa nei paragrafi seguenti.

## 6.3 Test di trazione planare

La prova planare è per molti versi simile ad una prova di trazione mono - assiale, consiste, infatti, nell'imporre uno spostamento o una forza al provino lungo una direzione, ma non mette in gioco deformazioni laterali.

La procedura sperimentale seguita è analoga a quella descritta nei paragrafi precedenti e seguendo quanto illustrato in fig. 6.02.

La differenza tra un test monoassiale ed un test planare si manifesta, come già detto in precedenza, nell'assenza di contrazioni laterali (la larghezza rimane invariata). Ciò non è tecnicamente possibile, ma testando un provino con un elevato rapporto  $\frac{b}{h}$  (dove *b*= larghezza, *h*= altezza o distanza tra i grip), si ottiene un comportamento del tutto simile a quello ipotizzato.

Poiché il test, come accennato all'inizio del capitolo, non è regolato da nessuna norma, allora si è fatto riferimento all'esperienza in letteratura da altri autori, per quanto riguarda i rapporti dimensionali [28][37].

In letteratura si riconoscono rapporti larghezza - altezza utile pari a 10 volte.



Per il presente lavoro, per testare l'influenza di questo rapporto sui risultati della prova, sono stati utilizzati campioni di forma rettangolari di dimensione differente:

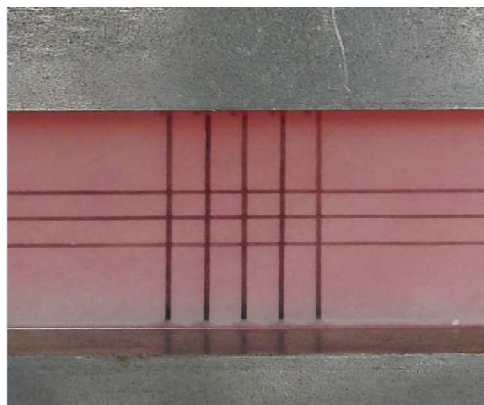
- 200x50x1 [mm x mm x mm]
- 180x50x1 [mm x mm x mm]

e afferrati ad una distanza tra i 20 e i 30 [mm].

Sui provini è stata posta una griglia per la valutazione delle deformazioni seguendo la stessa metodologia esposta per la prova mono – assiale, posta al centro del provino, costituita da 5 linee verticali e da 3 linee in direzione orizzontale, distanti 5[mm].

La motivazione di predisporre una griglia con più linee verticali risiede nel fatto di voler valutare le deformazioni anche in zone lontane dal centro.

La griglia così predisposta è osservabile nell'immagine seguente:



*fig. 6.16 – Markers del provino planare*

Per la realizzazione di tali prove e quindi per poter afferrare il provino sono state realizzate degli appositi afferraggi.

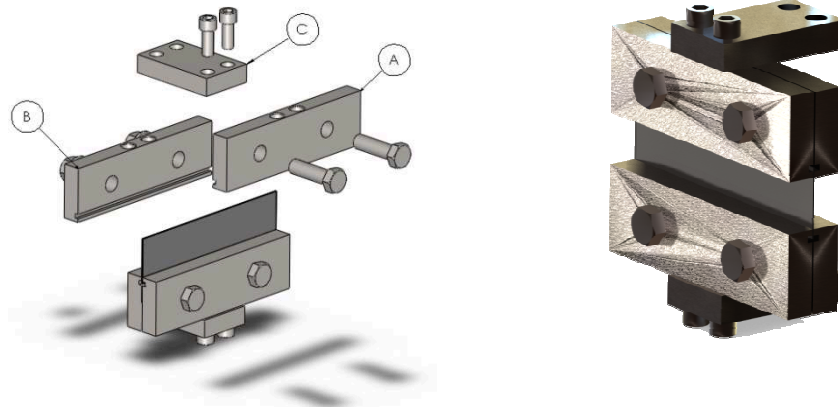
Questi ultimi, concepiti come accessorio della macchina di prova Zwick/Roell Z100, si compongono di due parti A e B (fig. 6.17-a-b) chiuse a pressione tramite l'ausilio di due bulloni serrati da dadi esagonali ed anelli elastici per il recupero, e di una parte C che ha il compito di garantire il fissaggio alla macchina di prova.

Sulle parti A e B sono state realizzate delle scanalature atte ad evitare scivolamenti.

Il motivo di tale scelta risiede nel fatto che il materiale, in fase avanzata di test, si allunga enormemente ed essendo quasi incompressibile riduce molto il suo spessore, quindi, non potendo il sistema recuperare la diminuzione dello spessore, in fase di assestamento iniziale del provino, trattiene all'interno della casa il materiale.

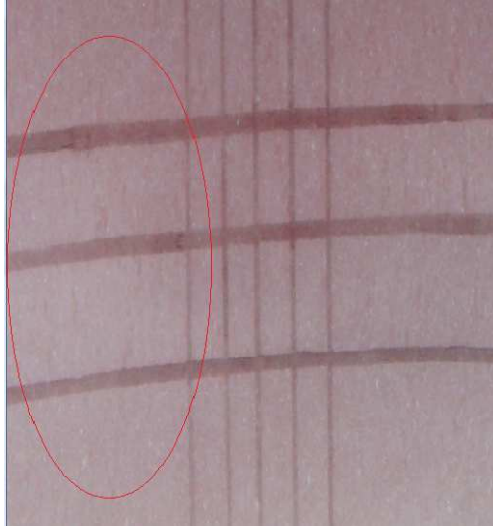


*fig. 6.17a – Afferraggi per prove planari*



*fig. 6.17b – Assieme esploso degli afferraggi per prove planari*

Le misure di deformazione riguardano esclusivamente la zona centrale del provino per cui non è necessario inquadrare i lembi liberi; una visuale più ravvicinata della griglia, invece, garantisce una maggior precisione nei risultati. Questo accorgimento permette anche di notare i più piccoli disturbi che possono presentarsi durante la prova, non solo dunque scivolamenti “totali” del materiale dentro le ganasce, ma anche “parziali”. In fig. 6.18 è possibile vedere un esempio di scivolamento parziale, in cui è solo la zona sinistra del *grip* a perdere aderenza con il materiale.



*fig. 6.18- – Scivolamento parziale*

Per quanto riguarda l'acquisizione e la sincronizzazione dei dati di carico spostamento e deformazione, data la somiglianza della prova con la prova di carico mono - assiale, si rimanda al paragrafo precedente.

### 6.3.1 Risultati test planari

Per quanto detto al Paragrafo 6.3 sull'incidenza della rapporto di forma e sulla preparazione della griglia e soprattutto dei *markers* verticali, è stata valutata l'omogeneità delle deformazioni misurando gli spostamenti dei *markers* centrali e di quelli più esterni.

Di seguito viene riportata la fig. 6.19, dove si mostra la divergenza, anche se trascurabile, dei risultati passando dai marker centrali a quelli più esterni[28].

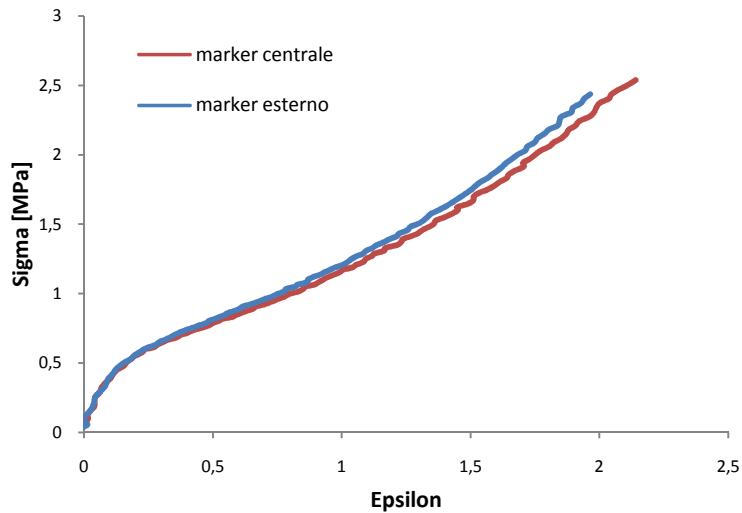


fig.6.19- – Confronto dei diagrammi  $\sigma$ - $\epsilon$  valutati su diversi markers

Per i motivi espressi nel Paragrafo 6.3 sono stati testati provini dalle diverse dimensioni. Nonostante la variazione della larghezza, i *plot* sforzo-deformazione non mostrano particolare influenza dalla dimensione longitudinale (fig. 6.20).

Tale risultato è concorde con i risultati ottenuti dagli autori *Duncan, Maxwell, Crocker e Hunt* che eseguirono questo *test* variando l'altezza *h* dei provini[28].

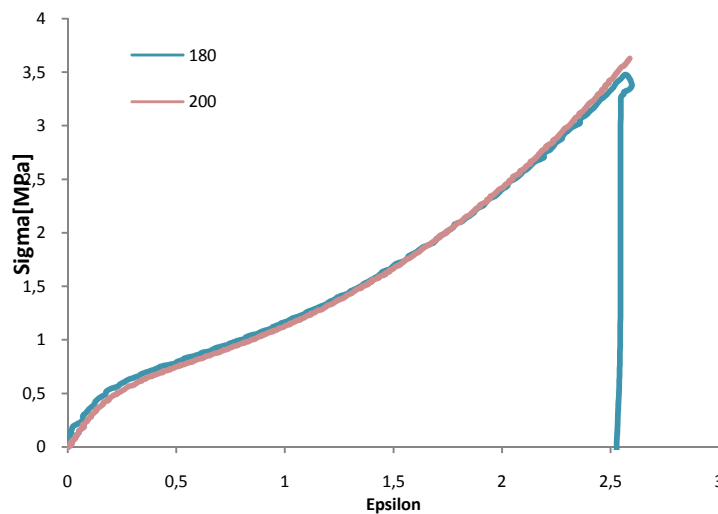


fig. 6.20 - Curve  $\sigma$ - $\epsilon$  per larghezze di provini diverse

Come per il test monoassiali, anche per il test planare si è verificato l'andamento degli invarianti sui rilievi effettuati.

Quindi, dalla tab. 6.01, la relazione tra  $I_1$  e  $I_2$  è stata calcolata a partire dalla condizione di incompressibilità, e tenendo conto per deformazione in direzione **2** (fig. 6.21) trascurabile,  $\lambda_2 = 1$ [31], il tensore di deformazione isocoro sarà:

$$\mathbf{F}^{isochor} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Quindi:

$$I_1 = \lambda_1^2 + 1 + \frac{1}{\lambda_1^2} \quad (6.11)$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + 1 + \frac{1}{\lambda_1^2}$$

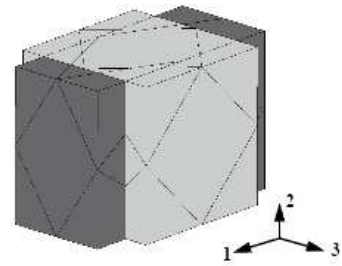


fig. 6.21– Elemento sottoposto a stress planare

Dal confronto degli invarianti teorici e da quelli sperimentali si sono ottenuti i seguenti risultati:

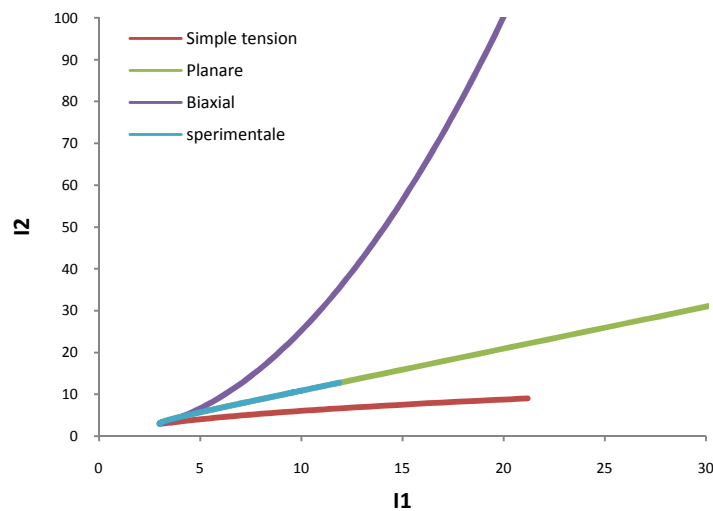
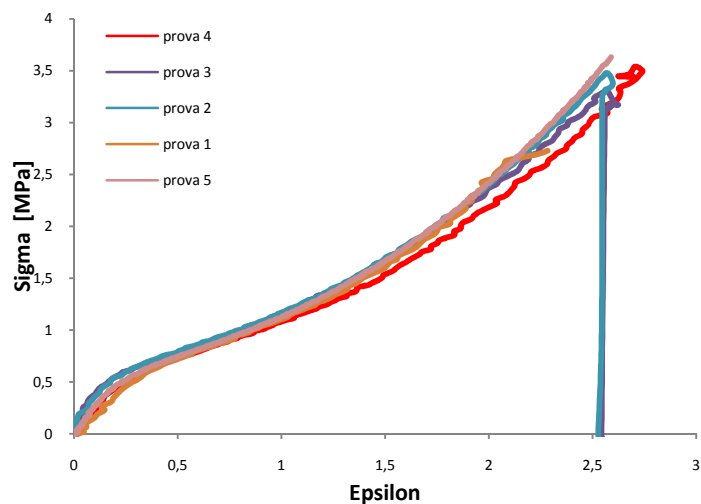


fig. 6.22 – Confronto degli invarianti sperimentali e teorici (test planare)

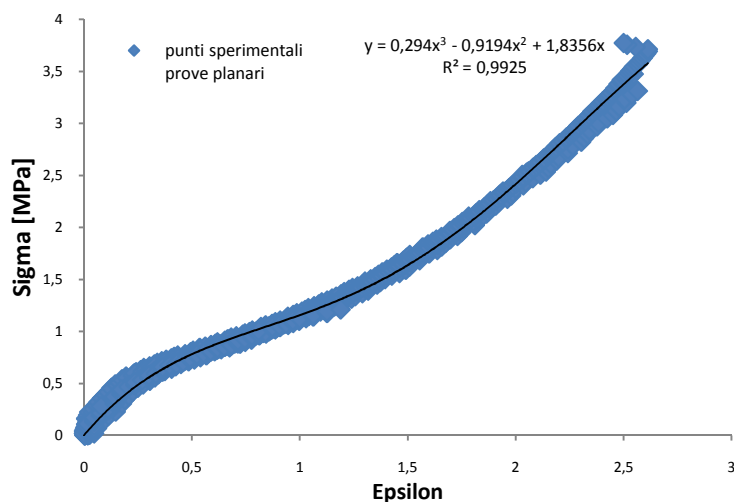
Di seguito vengono riportati alcuni risultati significativi dei test planari.



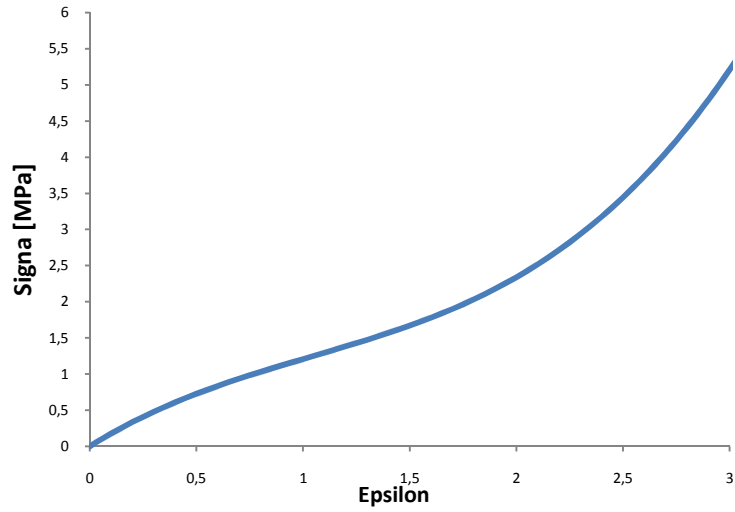
*fig. 6.23–Sforzo-Deformazione di alcune prove planari eseguite*

Seguendo nuovamente il metodo dell'interpolazione polinomiale, avvalendosi del metodo dei minimi quadrati, è stata ottenuta una funzione del terzo ordine che a pieno titolo rappresenta il “comportamento a taglio” del silicone.

Di seguito vengono riportati i risultati dell'interpolazione e la curva interpolata (fig. 6.24).



*fig. 6.24 – Interpolazione dei punti sperimentali*



*fig.6.25- Fitting test planare*

I risultati dell'interpolazione sono presentati nella seguente tabella:

---


$$y = 0,294x^3 - 0,9194x^2 + 1,8356x$$

$$R^2 = 0,9925$$

---

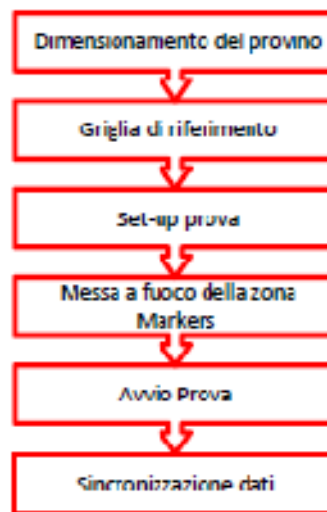
**Tab. 6.03**

---

## 6.4 Test biassiale

La prova di trazione biassiale consiste nell'imporre uno spostamento di pari entità lungo due direzioni principali, definiti *assi principali* di carico, riproducendo lo stato di sforzo equi-biassiale nella zona centrale del provino.

La procedura sperimentale è analoga a quella eseguita per i due test precedenti, che viene riprodotto qui di seguito.



*fig. 6.02*

Come il precedente test, la prova biassiale è completamente non regolata dalle normative, di conseguenza, sia per il dimensionamento del provino che per le modalità di sollecitazione si è fatto riferimento all'esperienza di altri autori in letteratura [28-31-38-39-40].

In particolare per il sistema di carico è stato utilizzato il sistema discusso nel capitolo precedente, e si è proceduto alla sincronizzazione dei dati della cella di carico con le deformazioni rilevate otticamente con la metodologia già discussa.

Fra le varie tipologie di provino utilizzato in letteratura, analizzate nel Cap. 5, si è deciso di utilizzare, per sistema di carico proposto, un provino dalla forma più semplice possibile.

La semplicità di forma permette una veloce realizzazione del provino stesso senza creare elevati difetti nelle zone di taglio.



Al tal fine, si è deciso di testare provini di forma quadrata, perché ciò garantisce anche una assoluta simmetria rispetto agli assi di carico, di dimensione [70x70x1] [mmxmmxmm], ed elevata semplicità di taglio.

Di seguito è riportato lo schema di afferraggio presentato [31] (fig.628).

Per quanto riguarda la griglia di riferimento, la scelta presentata è nata da riflessioni sull'esperienza presentata dagli autori *B. C. Duncan* e *Y. Maxwell*[28], che utilizzavano, ai fini misuristici una griglia di 16 punti distribuiti più o meno casualmente sulla superficie del provino.

Infatti, per quanto discusso nel Cap. 5, il rilievo delle deformazioni, con l'utilizzo di punti non dà la certezza di rilevare nella zone di equi-biassilità.

La volontà di determinare con maggior precisione la zona in cui è possibile valutare la deformazione pura e, allo stesso tempo, di indagare sullo stato di sollecitazione dell'intera superficie, ha portato alla creazione di una griglia composta da cerchi concentrici di diametri:

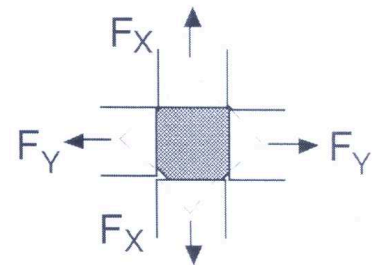
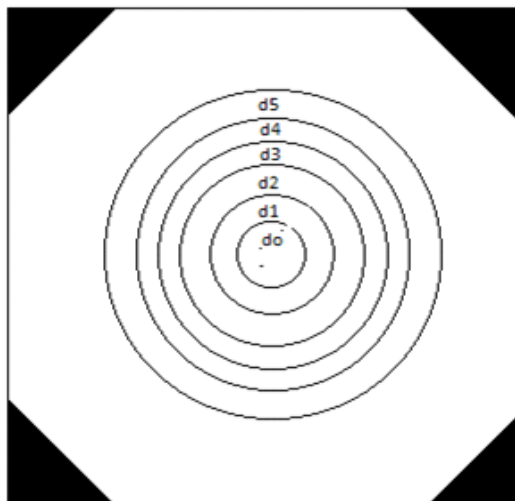


fig. 6.26– Schema di afferraggio del provino biassiale [31]



- D0 = 10 [mm]
- D1 = 15 [mm]
- D2 = 20 [mm]
- D3 = 25 [mm]
- D4 = 30 [mm]
- D5 = 35 [mm]

fig. 6.27 – Griglia del provino biassiale

Il provino viene, quindi, afferrato da quattro morse poste ai quattro angoli del quadrato come evidenziati in fig. 6.27. Le morse vengono movimentate con l'ausilio di

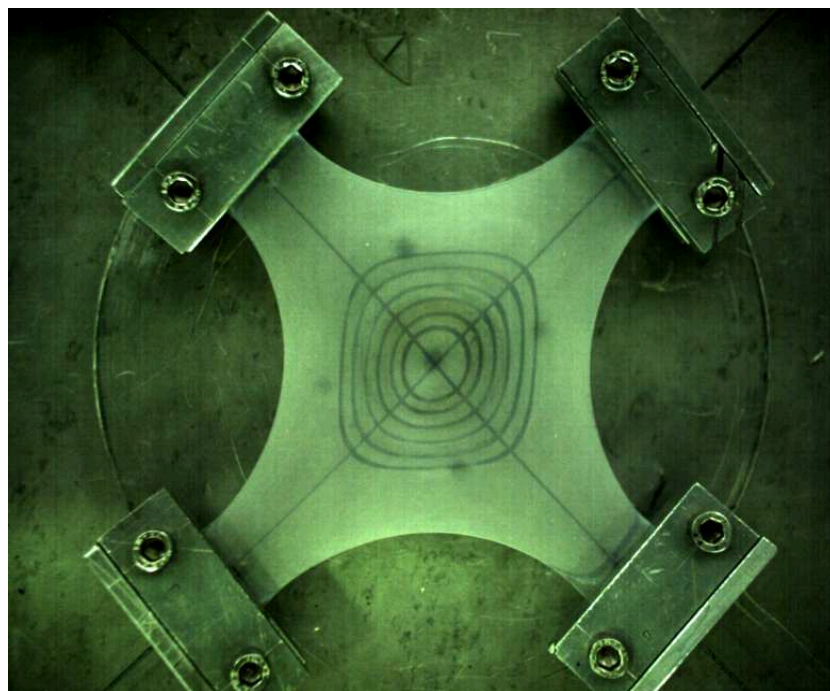
un sistema di cavi inestensibili e fissate al piatto solidale all'attuatore della Zwick/Roell Z100 (utilizzata anche per le prove precedenti). Il piatto solidale alla traversa impone così uno spostamento uniforme nelle due direzioni.

In fig. 6.27 sono state volutamente evidenziate le zone di afferraggio del provino. Quest'ultimi, infatti, devono essere marcati prima del montaggio, perché diviene di fondamentale importanza la sezione su cui viene scaricata la forza.

Se, infatti, questa condizione non venisse rispettata la sezione del provino su cui è applicata la forza di trazione varierebbe, considerando il centro del provino, di angolo in angolo, con una conseguente disomogeneità degli sforzi, non rispecchiando dunque uno stato di sollecitazione equi - biassiale.

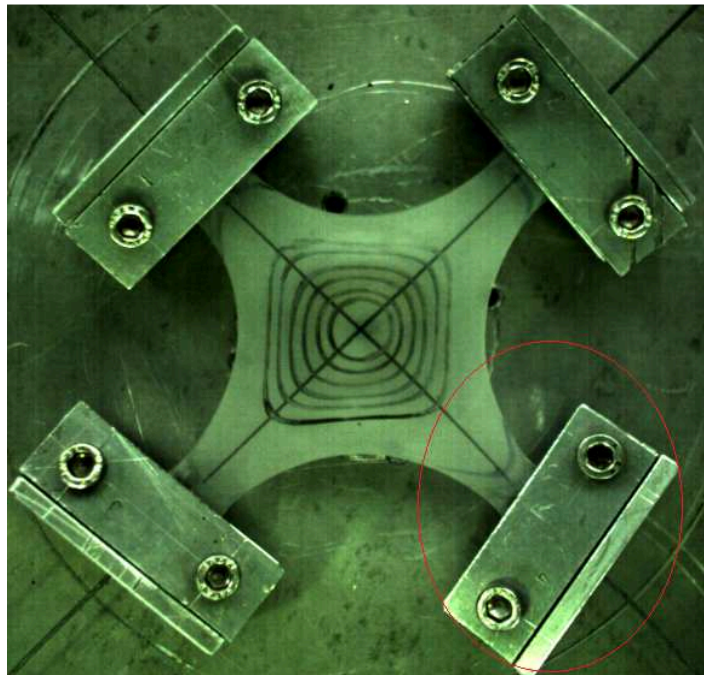
Com'è possibile osservare dalla seguente fig. 6.28, non solo i *markers* circolari permettono di rilevare la deformazione e di fare il rilievo nella zona di sola biassialità, ma anche di identificare visivamente la qualità della prova.

Infatti, sempre in fig. 6.28, è evidente che la prova è nulla, ciò lo si evince dal fatto che il marker circolare centrale non mantiene la sua circolarità ma diventa ellittico, avendo l'asse maggiore lungo una coppia di basette che evidentemente scaricano la stessa forza su una sezione minore.



*fig. 6.28 – Esempio di prova nulla per disomogeneità carico.*

Per seguire la prova nella sua completezza è dunque necessario inquadrare una più ampia zona, che non solo renda visibile ogni punto della griglia ma che permetta di valutare i possibili movimenti imprevisti agli afferraggi, come scivolamenti o rotazioni. A titolo di esempio viene riportata in fig. 6.29 un caso di scivolamento seguito da una successiva rotazione della morsa.



*fig. 6.29 – Esempio di prova nulla per scivolamento all'afferraggio*

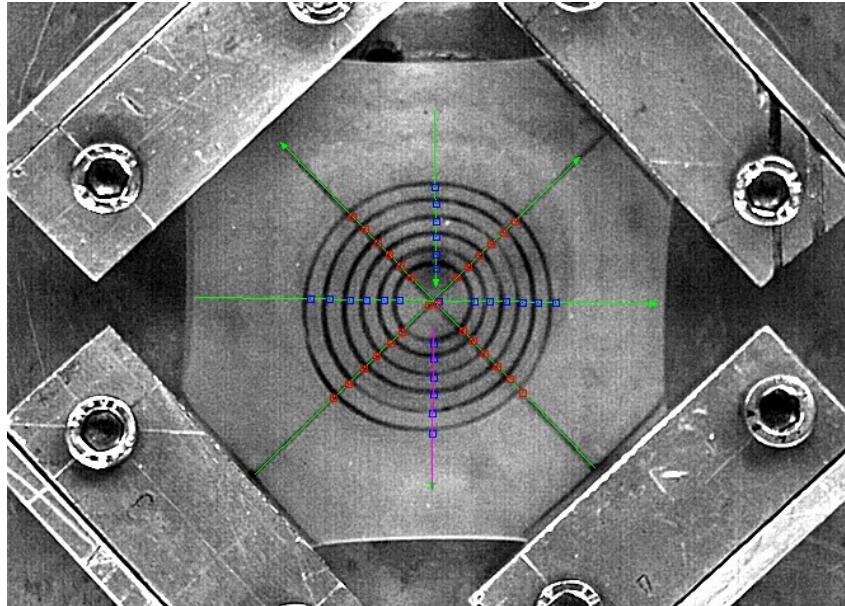
Come per le prove precedenti la registrazione delle immagini precede il movimento dell'attuatore lineare. Per eliminare la possibilità di compiere un errore significativo nella valutazione sia delle deformazioni sia del carico, è necessario prima tendere leggermente il materiale. Questo accorgimento ha il compito di evitare che il provino si fletta e dunque evita l'eventualità di scambiare nei primi istanti della prova un allineamento del materiale con una deformazione.

Come per le prove monoassiali e planari, l'acquisizione dei dati di carico è affidata alla cella di carico, mentre i valori di deformazioni vengono valutati mediante le tecniche di *image-processing* spiegati nel Cap.4.

A causa dell'eventuale disomogeneità, prima discussa, delle deformazioni lungo la superficie del provino, tramite lo strumento di *edge-detection*, sono state registrate,

immagine per immagine, le posizioni dei punti lungo le quattro *direzioni principali* e le quattro *direzioni ausiliarie* di controllo.

Di seguito viene mostrato il *set-up* iniziale dell'analisi degli spostamenti al tool *Vision Builder*, fig.6.30.

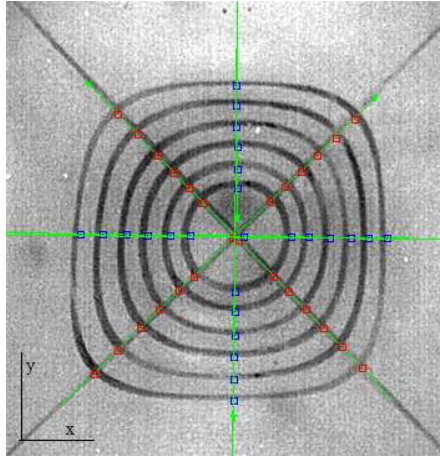


*fig.6.30 – Identificazione dei punti sperimentali e direzioni di controllo*

L'utilizzo di ulteriori direzioni di *controllo ausiliarie* è utile ai fini dell'identificazione del corretto svolgimento del test.

In fig. 6.31 viene mostrata la distribuzione delle deformazioni lungo le diverse direzioni in un istante avanzato del test, ed in particolare si può osservare, che è pressoché uniforme nella zona centrale del provino dove il *marker* conserva la geometria circolare iniziale.

Dal post-processing delle deformazioni sui test eseguiti si è osservato che il *marker* **D0** (fig. 6.27) delimita la regione di equi-biassialità.

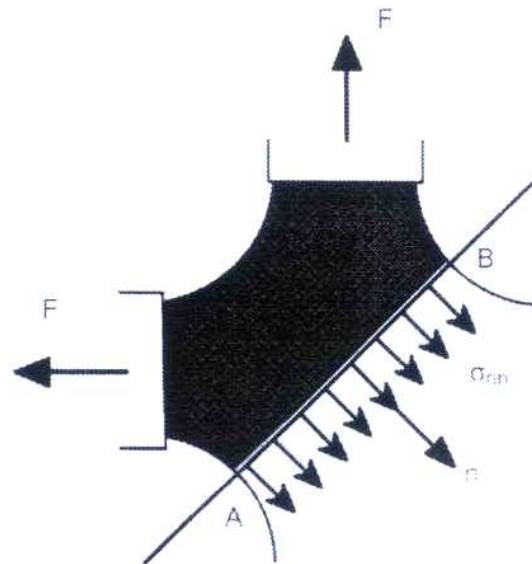


*fig. 6.31–Markersa stato avanzato del test*

Come ipotizzato da *L. Chevalier* e *Y. Marco* [31] è possibile considerare allora lo stato di *stress* quasi omogeneo lungo la sezione AB (fig. 6.32), e calcolare dunque lo *stress* dai dati di forza registrati dalla cella di carico su tale sezione come:

$$\sigma_{AB} = \frac{F\sqrt{2}}{eL} \quad (6.12)$$

dove *e* è lo spessore del provino ed *L* è la lunghezza del tratto AB.



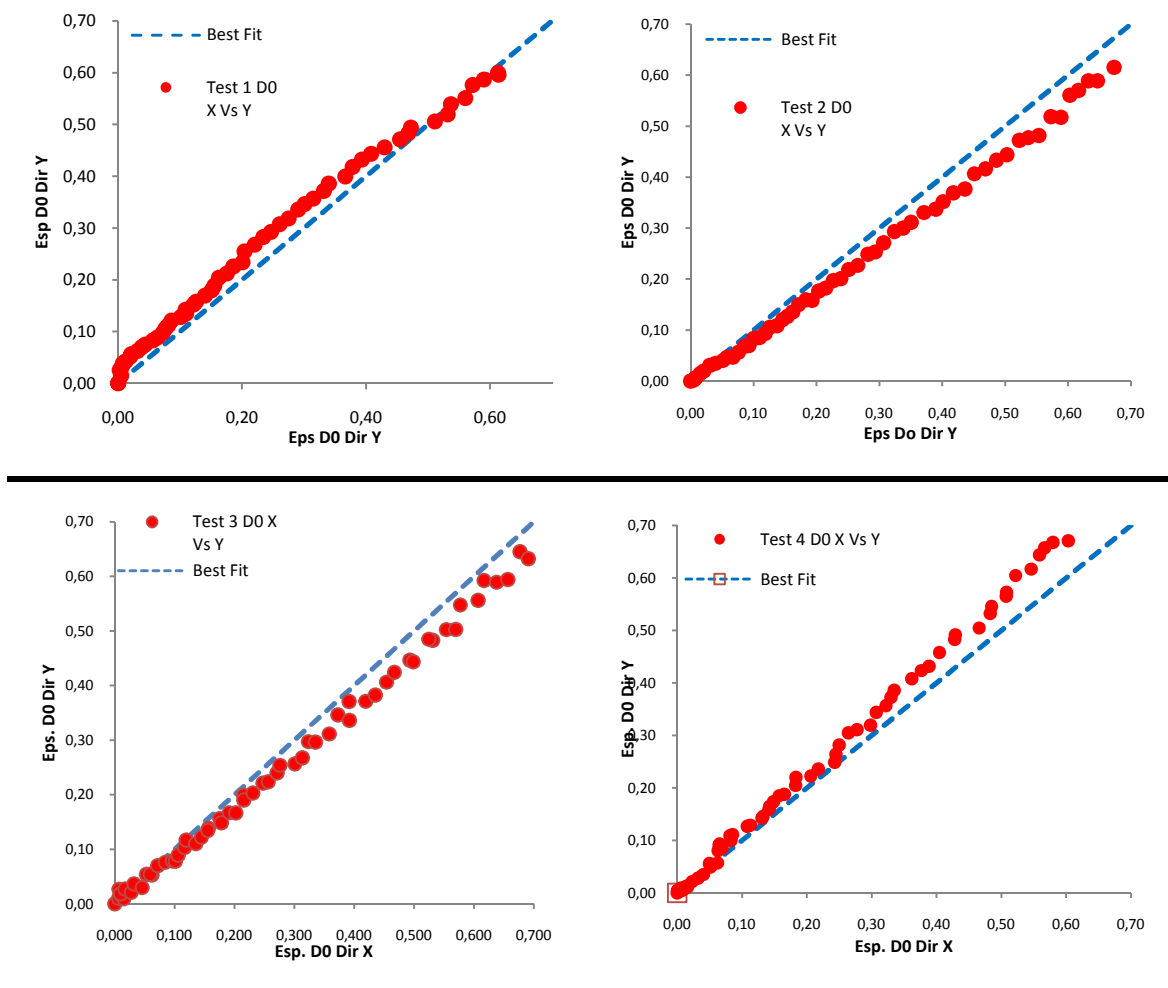
*fig.6.32 – Distribuzione degli sforzi lungo il provino biassiale*

Quindi facendo riferimento al sistema di riferimento mostrato in fig. 6.31, l'eq. 6.12 corrisponde alla direzione **X** ed **Y**, ortogonali alla direzione di carico.

## 6.4.1 Risultati test biassiale

La caratteristica in condizioni di carico biassiale è stata identificata lungo le direzioni prima dette, una volta monitorate tutte le direzioni per controllo sulla uniformità della deformazione.

Di seguito vengono riportati alcuni risultati di test dove viene confrontato la deformazione lungo le direzioni ortogonali al carico, al *marker D0*.





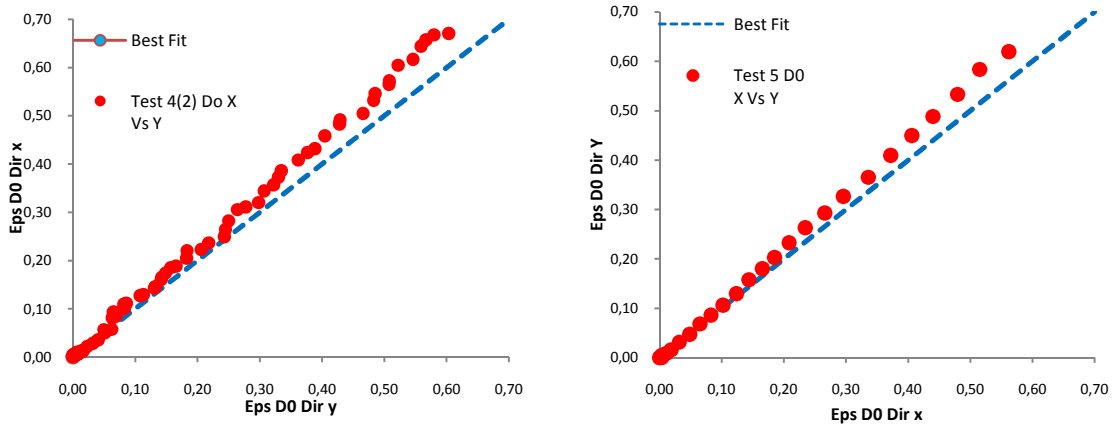


fig.6.33 – Deformazione su due assi al markerD0

Come per il test mono-assiali ed il test planare si è verificato l'andamento degli invarianti sui rilievi effettuati.

Poiché la deformazione è imposta lungo due direzioni:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = (1 + \varepsilon) = \lambda \quad (6.13)$$

Da cui segue:

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (6.14)$$

Per avere un più efficace confronto tra i dati sperimentali e le relazioni teoriche che legano gli invarianti  $I_1$  e  $I_2$ , i rapporti di deformazione  $(\lambda_1, \lambda_2)$  sono stati valutati separatamente:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (1 + \varepsilon_1) \\ \lambda_2 &= (1 + \varepsilon_2) \\ \lambda_3 &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Quindi, il tensore di deformazione Isocoro diventa:

$$\mathbf{F}_{isochor} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Dunque, gli invarianti teorici, nel caso di incomprimibilità, e di valutazione della deformazione sul piano, sono stati calcolati mediante la relazione:

$$I_{1t} = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} \quad (6.17)$$

$$I_{2t} = \lambda^4 + \frac{2}{\lambda^2}$$

Mente gli invarianti sperimentali:

$$I_{1s} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \quad (6.18)$$

$$I_{1s} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}$$

Il *plot* dei risultati sul piano ( $I_1$   $I_2$ ), mostra un' ottima sovrapposizione dei valori così ottenuti nei casi in cui vi è un reale equilibrio tra le forze ortogonali che si oppongono al tiro.

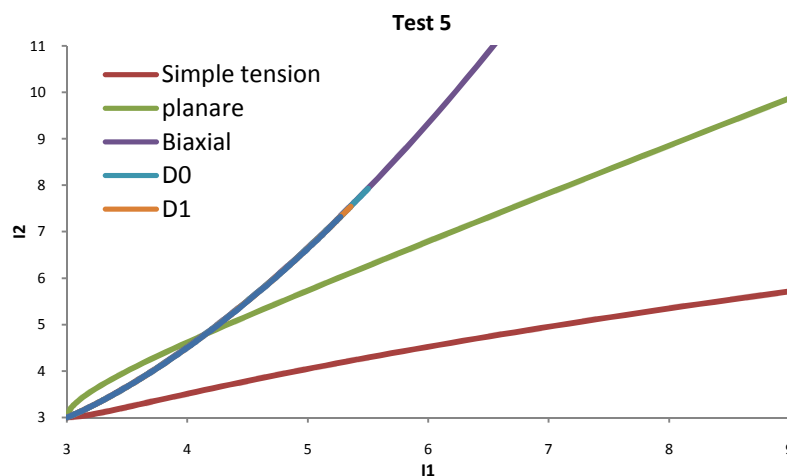
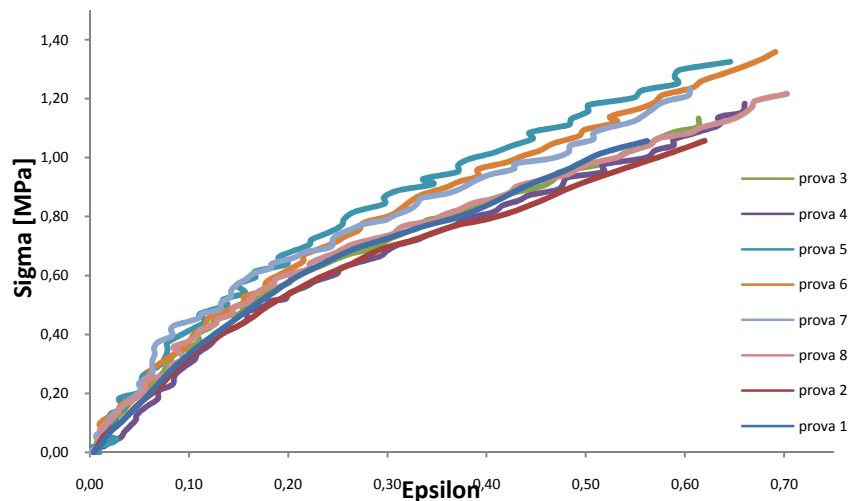


fig.6.34 – Invarianti  $I_1$  e  $I_2$  per il test 5 sui marker D0 e D1



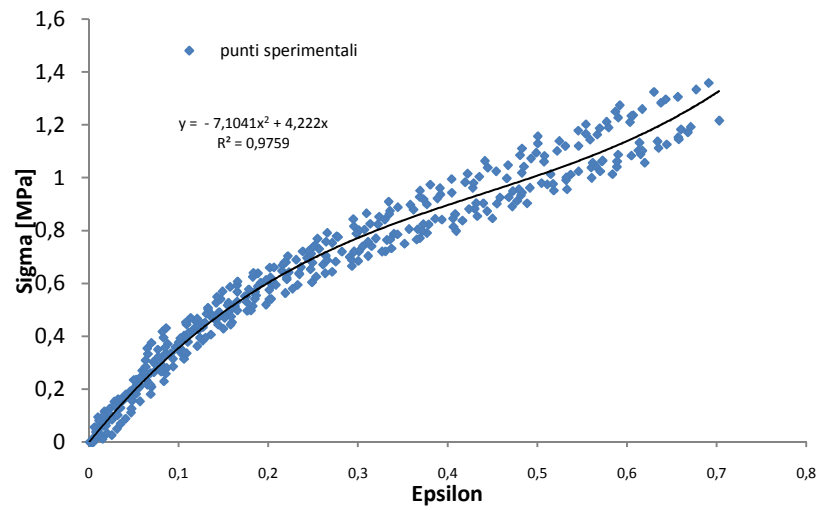
Per ottenere una caratterizzazione univoca del materiale sotto stato di sforzo equi-biassiale sono stati testati vari campioni. In fig. 6.34 vengono riportate le prove valide più significative. Le prove che presentavano una curva al di sopra di quella della prova 5 e al di sotto di quella della prova 2 sono state scartate per motivi prima esposti di scivolamento o rottura prematura.



*fig. 6.34 – Sigma – Epsilon Test Biassiale*

Data la dispersione dei risultati, come nei test precedenti, si è provveduto ad una interpolazione polinomiale del terzo ordine, in modo da raggiungere un risultato univoco sul comportamento del materiale.

I risultati dell'interpolazione sono mostrati di seguito in fig. 6.35 e tab.6.04. mentre in fig. 6.36 viene mostrata la caratteristica fittata.



*fig. 6.35 – Interpolazione dei punti sperimentali per il test biassiale*

---

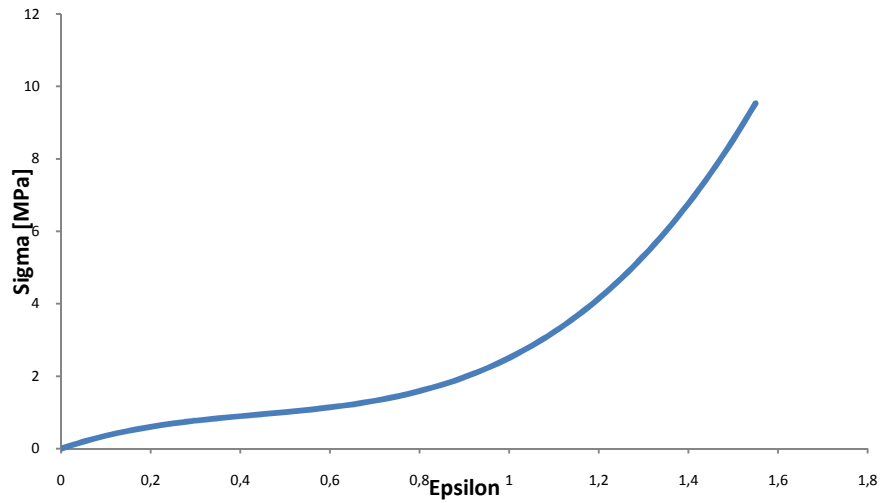

$$y = 5,3852x^3 - 7,1041x^2 + 4,222x$$

$$R^2 = 0,9759$$


---

**Tab. 6.04**

---



*fig. 6.36 – Curva sperimentale per prove biassiali*

# 7

## Analisi Numerica

## 7. Analisi Numerica

---

Caratterizzato meccanicamente il materiale, quindi ottenute tutte le curve necessarie a poterne definire completamente il modello della funzione densità di energia di deformazione  $\mathbf{W}$ , è stata verificata la sua corrispondenza sul modello numerico, ed identificato il parametro  $\mathbf{D}_1$  mediante procedura inversa.

Per il presente lavoro è stato utilizzato il solutore di Ansys® e per il *fitting* del materiale il *tool* presente nel pacchetto software, che agevolmente permette di poter confrontare i modelli di  $\mathbf{W}$ .

Di seguito quindi viene discussa la procedura di verifica numerica, il confronto dei modelli e la procedura utilizzata per l'identificazione del parametro  $\mathbf{D}_1$ .

### 7.1. Determinazione dei parametri e scelta del modello

La caratterizzazione del materiale, come già discusso nei capitoli precedenti, consiste nella scelta di un'appropriata funzione di densità di energia  $\mathbf{W}$  e della determinazione delle sue costanti.

Quanto detto si articola nelle seguenti fasi:

- Selezione dei set indipendenti di dati sperimentali
- Fitting dei modelli
- Valutazione del modello più efficiente

Nel Capitolo 6 sono stati determinati i tre set di dati indipendenti dalle prove sperimentali mono – assiale, equi-biassiale e planare, riproposte di seguito.

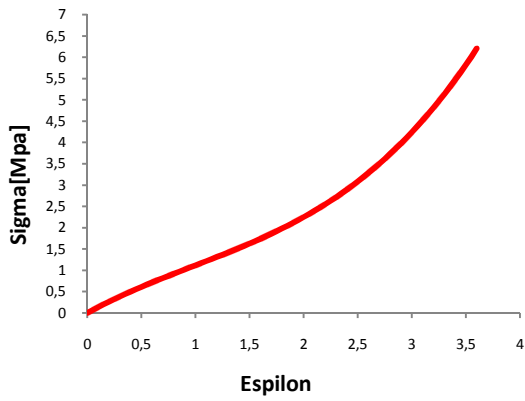


fig. 7.01 – Fitting delle prove sperimentali

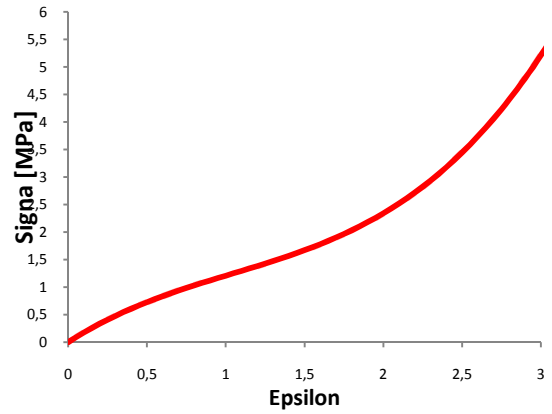


fig. 7.02- Fitting prova planare

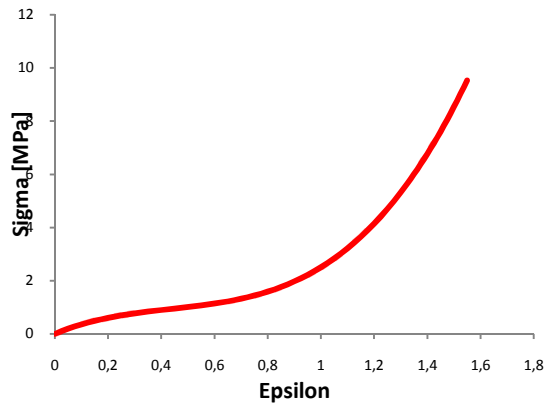


fig. 7.03 – Curva sperimentale per prove biassiali

I risultati ottenuti vengono acquisiti in forma tabulare dal task “Engineering Data” di Ansys®.

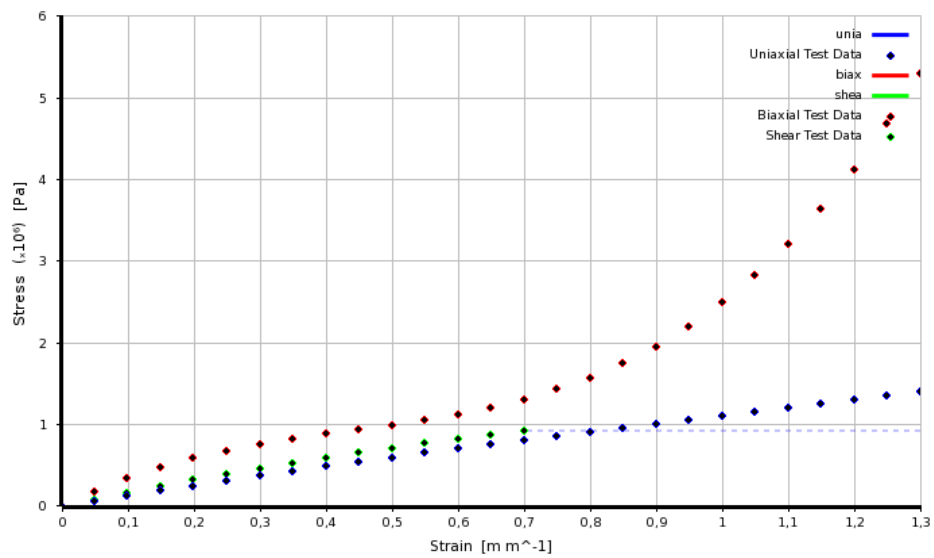


fig. 7.04 – Dati Sperimentali

Per ottenere una caratterizzazione accurata del materiale sono stati confrontati i “*fit*” dei diversi modelli energetici discussi nel Capitolo. 2.

Il *tool* di *fit* utilizza, infatti, un algoritmo di risoluzione di equazioni non lineari, secondo quanto esposto nel Capitolo 3 a riguardo del calcolo della sollecitazione, grazie al quale è possibile ottenere velocemente le costanti ricercate.

La necessità di ottenere dei set di dati da diverse prove con stato di sollecitazione differente risulta evidente nella ricerca del modello e delle costanti, che identificano il comportamento del materiale. Ad esempio, utilizzando esclusivamente i dati ottenuti dalla prova di trazione mono-assiale il modello seguirebbe perfettamente una sollecitazione indotta di tipo mono - assiale, ma il resto delle sollecitazioni non rispecchierebbe il comportamento reale del modello. Vale lo stesso se al modello viene fornita la sola curva biassiale. Se poi al solutore viene data la sola caratteristica planare, secondo quanto esposto nel Capitolo 3 sul calcolo delle costanti, non si ottiene nessuna soluzione.

Nel rispetto del secondo e terzo punto, elencati all’inizio del paragrafo, di seguito vengono mostrati i *fit* eseguiti sui dati ottenuti in laboratorio, per i modelli più significativi di:

- Yeoh 3<sup>rd</sup> ordine
- Ogden 3<sup>rd</sup> ordine
- Mooney-Rivlin 5<sup>th</sup>ordine

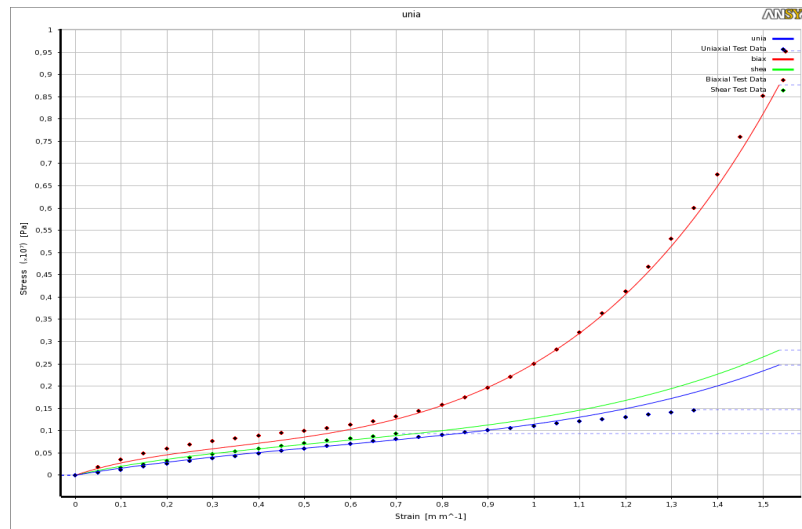


fig.7.05 – Fit Yeoh 3<sup>rd</sup> ordine

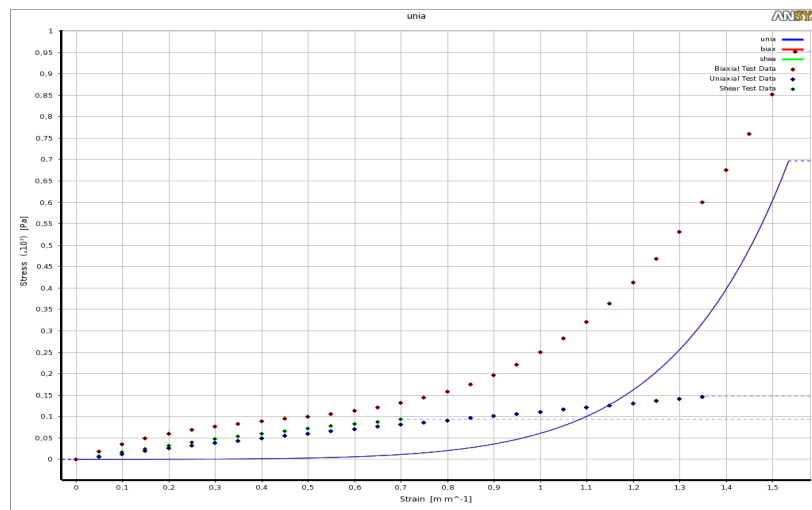


fig. 7.06 – Fit Ogden 3<sup>rd</sup> ordine

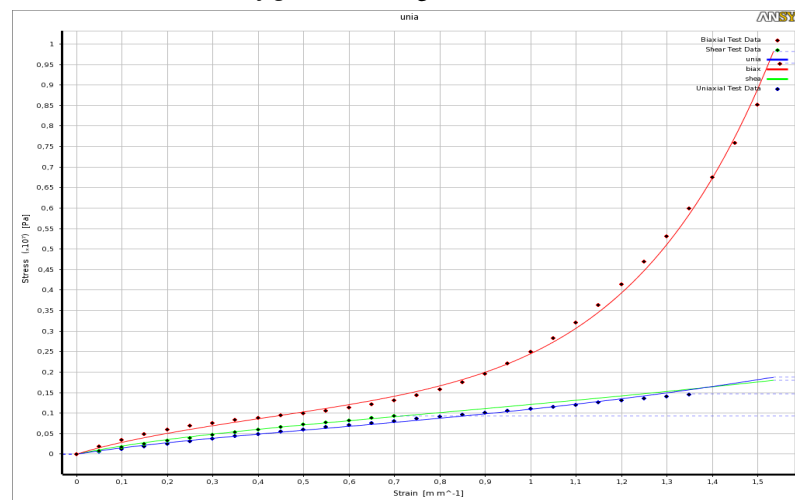


fig. 7.07 - Fit Mooney-Rivlin 5<sup>th</sup> ordine

Come è evidente dai grafici riportati, fra tutti i modelli, quello che meglio rappresenta il materiale testato è il modello di *Mooney-Rivlin* a 5 parametri.

In particolare, osservando i dati sperimentali, è possibile considerare *a priori* che modelli di basso ordine non sono adatti a spiegare il flesso della curva di test biassiale[42], qualora, infatti, si fosse riscontrato un secondo flesso (fig. 9.08) anche questo modello sarebbe risultato insufficiente.

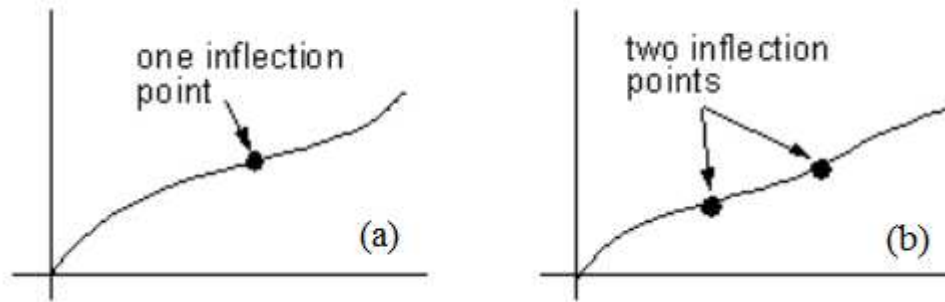


fig. 7.08 – Esempi di curve con uno (a) o due flessi (b)[42]

Il materiale rispecchia quindi la funzione densità di energia di deformazione  $\mathbf{W}$ , già nota al Capitolo 2 (eq.2.22), che viene riportata di seguito.

$$W_{M-R} = \sum_{i,j=0} C_{ij}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j \quad (7.01)-(2.22)$$

Le cui costanti ottenute dal *fitting*, sono riportate in tab 7.01.

$C_{10}$	214695.22	[Pa]
$C_{01}$	68960.219	[Pa]
$C_{20}$	24423.935	[Pa]
$C_{02}$	7143.658	[Pa]
$C_{11}$	-27798.689	[Pa]

**Tab. 7.01** – Coeff. Di Fitting per Mooney-Rivlin

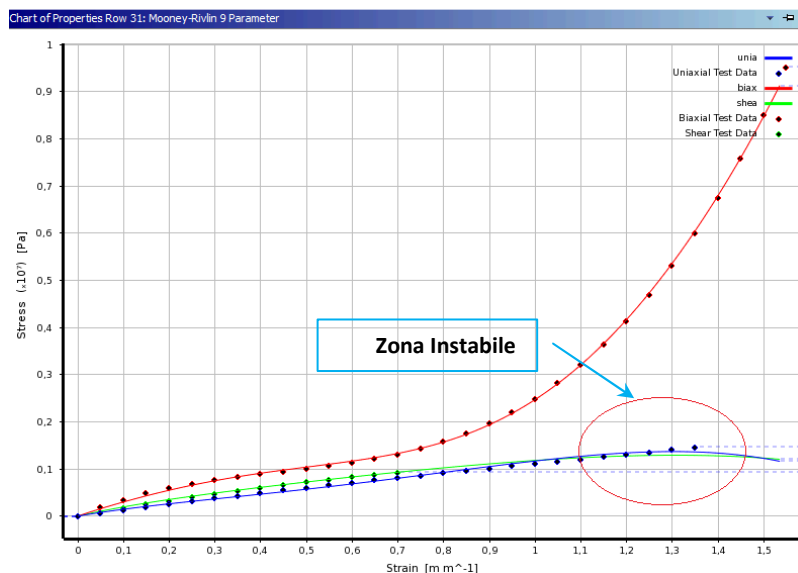


In realtà anche il modello a 9 parametri di *Mooney-Rivlin* dava un buon *fit* dei dati sperimentali, ma le curve ottenute non rispettano la condizione fondamentale di *stabilità*, soprattutto per i dati provenienti dal test planare.

La condizione prima citata (*Druckers Stability Postulate*), viene espressa dalla relazione[33][42]:

$$d\varepsilon * d\sigma > 0 \tag{7.02}$$

Di seguito viene riportato il grafico del *fitting* dei dati sperimentali con il modello a 9 parametri dove è evidente l'ottima risposta del modello e viene evidenziata la zona di instabilità a tangente orizzontale prima discussa.



*fig. 7.09 –Fitting Mooney-Rivlin 9 ordine*

Definito il modello che meglio rispecchia il materiale, sono state eseguite delle analisi agli elementi finiti con l'obiettivo di valutare la bontà del modello, sia per il test mono-assiale sia per il modello bi-assiale.

In particolare, per meglio valutare la bontà del modello, l'analisi nel modello bi-assiale è stato riprodotto il sistema di marker apposto durante la fase sperimentale.

## 7.2. Analisi FEM mono – assiale

La stretta dipendenza dal *coeff.* di *Poisson* al parametro  $D_1$ , unita alla difficoltà di determinarne con esattezza il valore che quest'ultimo assume nei primi istanti della prova, e poiché questo è valore da tener in considerazione per la definizione del parametro, hanno portato alla decisione di ottenerlo mediante una *procedura inversa*.

Il metodo iterativo proposto consiste nel ripetere una simulazione strutturale statica, mediante analisi degli elementi finiti, riproducendo il test meccanico, parametrizzando per l'appunto  $D_1$ , fino alla convergenza dei valori di reazione.

Allo scopo quindi, per l'analisi del test di trazione monoassiale, è stato costruito un modello simmetrico del provino monoassiale di dimensioni corrispondenti a quelle reali, aggiungendo una parte, individuata dalla lettera **B** in fig. 7.10, che ha l'obiettivo di rendere più graduale lo stacco della *mesh* nella zona delle ganasce.

L'inserimento della zona **B** è anche motivato dall'eventuale *errore di Huorglass* che di seguito sarà meglio discusso[34][45].

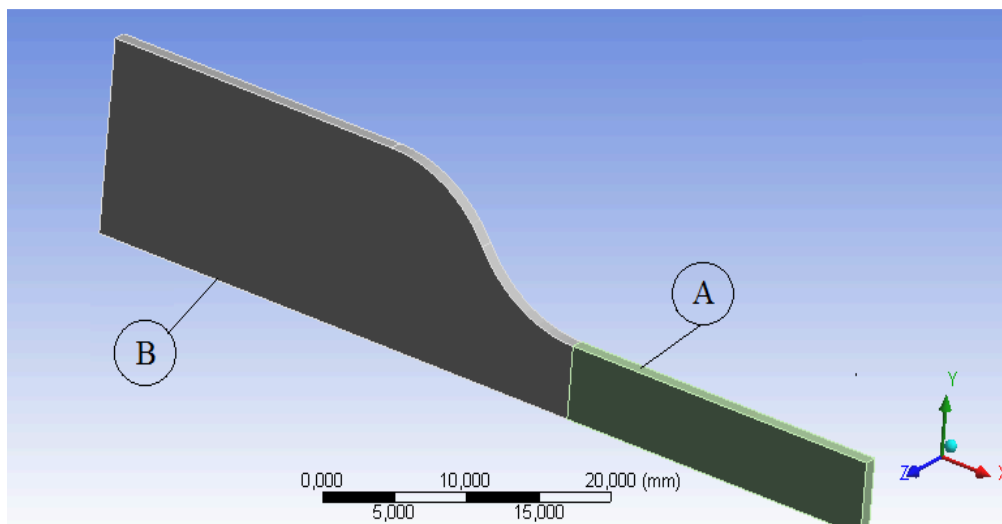
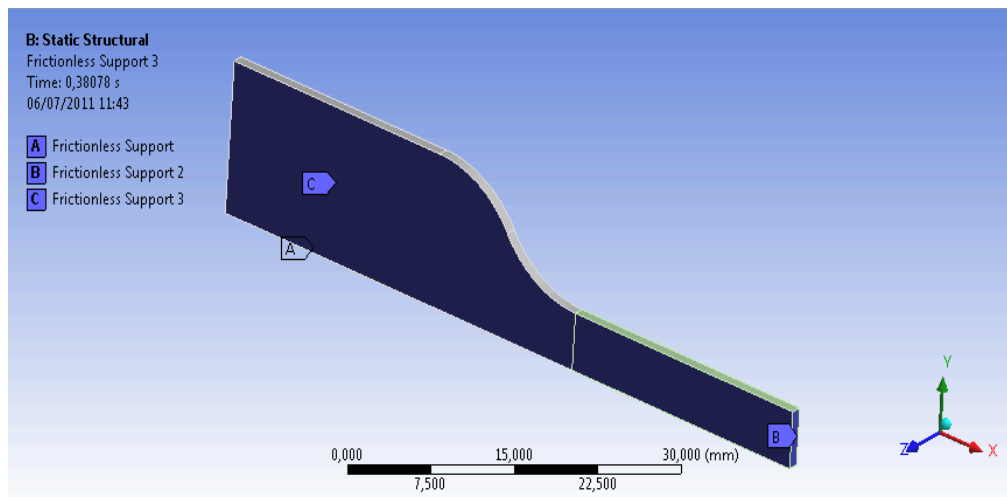


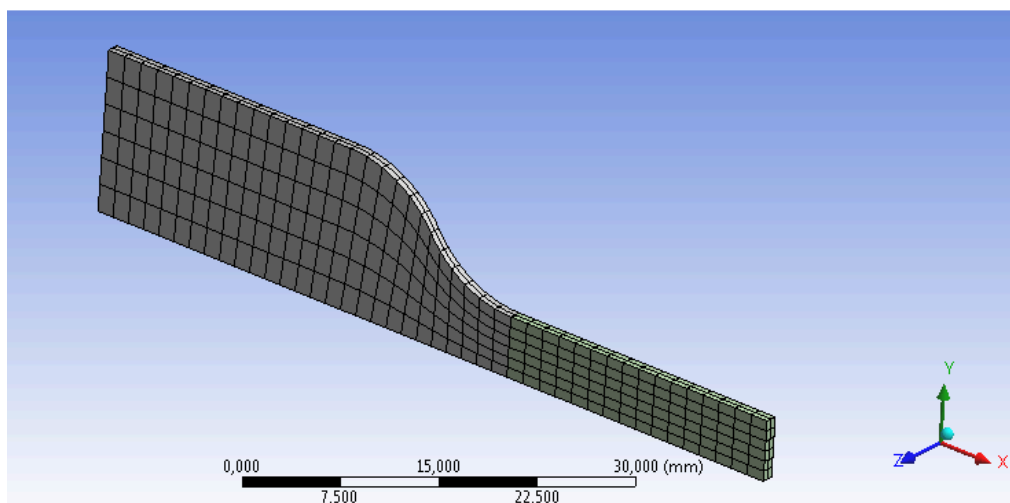
fig. 7.10 – Modello del provino mono-assiale (1/4)

In fig. 7.11 sono visibili i vincoli imposti nelle zone che identificano le simmetrie, indicati con *Frictionless-Support*.



*fig. 7.11 – Impostazione del modello e dei vincoli per la simmetria*

Per quanto riguarda la *mesh*, è stata realizzata una *mesh* di tipo *Sweep*, che permette di ottenere una massima regolarità sulla geometria, con elementi esaedrici senza nodi intermedi, il più regolare possibile, e senza spingere troppo la suddivisione del modello.



*fig. 7.12 – Mesh*

La qualità della *mesh*, per analisi in cui il materiale è di tipo iperelastico, diventa di fondamentale importanza, perché non solo è funzionale del risultato ma anche della convergenza fino a fine analisi.

Infatti, una scarsa discretizzazione del dominio porta sicuramente a convergenza il solutore ma i risultati sono poco affidabili, mentre una eccessiva discretizzazione porta di sicuro al blocco del solutore per *errore di Huorglass*.

Facendo riferimento alla fig. 7.10, ed in particolare alla zona **B** prima discussa, la gradualità crescente della mesh è importante a riguardo dell'errore di *Hourglass*, infatti aumentando il numero di nodi su cui distribuire la forza diminuisce la probabilità che si blocchi il solutore.

La scelta, invece, di un elemento solido con il minor numero di nodi (fig. 7.12) è dovuta al fatto che più l'elemento ha nodi e più quest'ultimo presenta modi rigidi (*Modi a Clessidra*). Infatti, l'elemento solido ad 8 nodi possiede 24 gradi di libertà, ovvero 24 modi di deformazione. Di questi 6 sono associati ai moti rigidi; 6 hanno associati termini di rigidezza non nulli e sono i modi deformativi reali, mentre gli altri 12 modi non hanno associato alcun termine di rigidezza e originano i modi di *Hourglass*

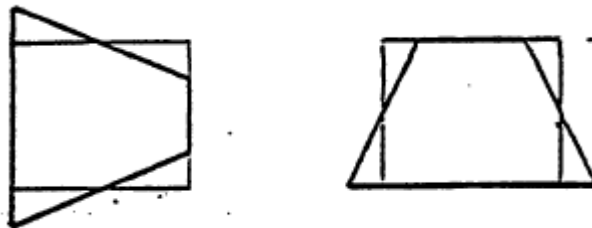


fig. 7.12 – Esempio di modi di Hourglass

In tabella seguente sono riportati i dati *mesh*:

	Solido A	Solido B
<b>Elementi</b>	192	324
<b>Nodi</b>	1237	2051

**Tab. 7.02 – Risultati Mesh**

Imposte le condizioni di vincoli che identificano le condizioni di simmetria e di vincolo reale, è stato imposto un carico assiale all'estremo **B** del modello, di intensità pari ad una rampa si 20 KN, compatibile al valore massimo determinato in laboratorio in fase sperimentale, fig.7.13.

La durata dell'analisi è stata imposta ad 1 [s] ed un numero fisso di *substeps* di 300.

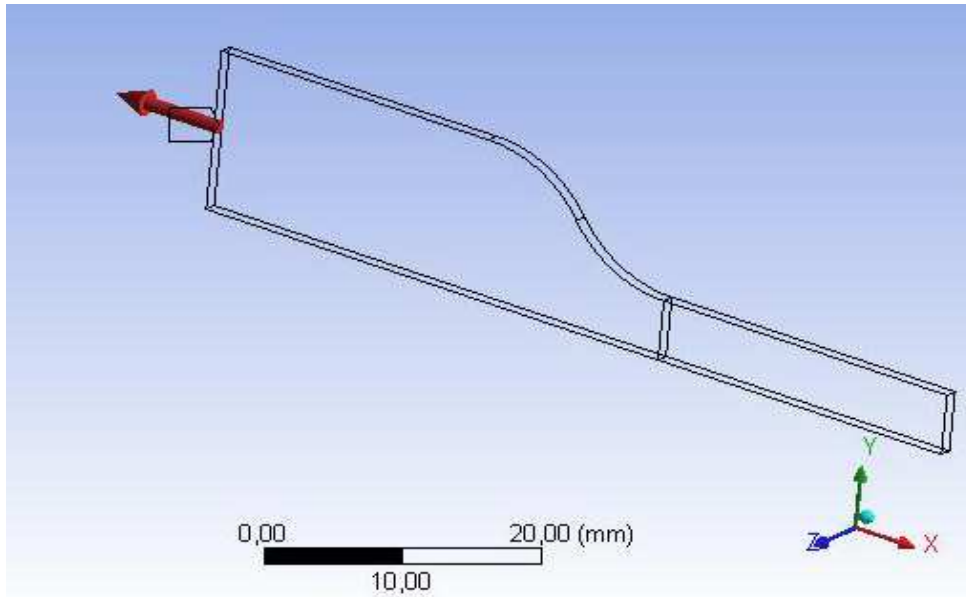
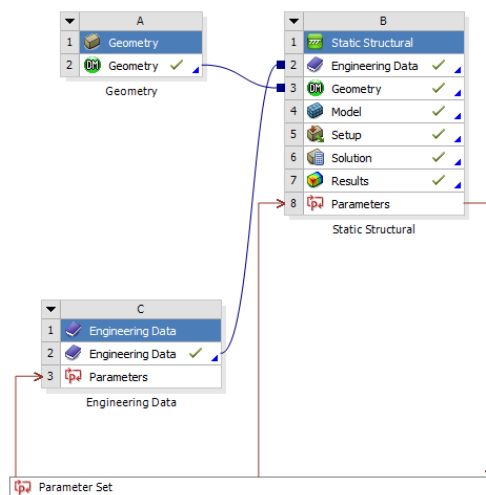


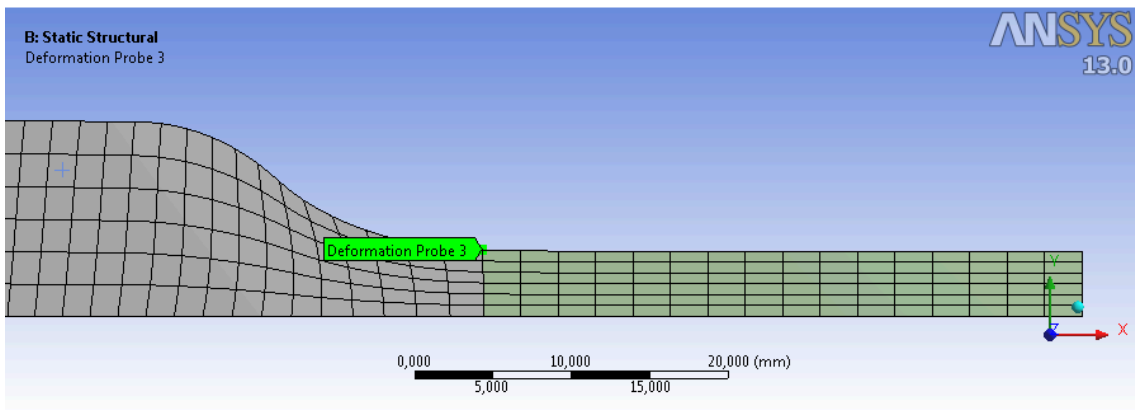
fig. 7.13 – Applicazione di una rampa di carico sul modello

Per effettuare un confronto tra i risultati sperimentali e l'analisi numerica è stata valutata la reazione ad ogni *Substeps* (*Force Reaction*) ed i corrispondenti valori di spostamento, entrambe in direzione *X* e i valori di spostamento lungo la direzione *Y*, ortogonalmente alla direzione di carico (*Deformation Probe*).

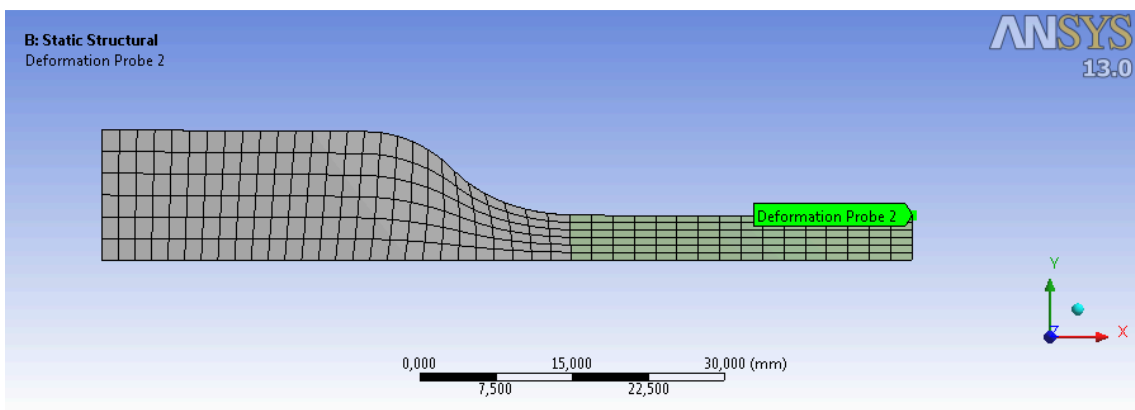
Di seguito in fig. 7.14-15-16 vengono mostrati i nodi e le superfici di valutazione degli allungamenti e della reazione.

Come già detto all'inizio del paragrafo, l'obiettivo dell'analisi numerica è quella di, mediante procedura inversa, cercare di tarare il modello di *Mooney-Rivlin* che caratterizza il materiale testato, al varare del termine  $D_1$ , fin quando non si ha la convergenza al valore obiettivo. Per effettuare la parametrizzazione del modello in ambiente Ansys®, si è imposto l'iter delle analisi come mostrato in figura seguente.

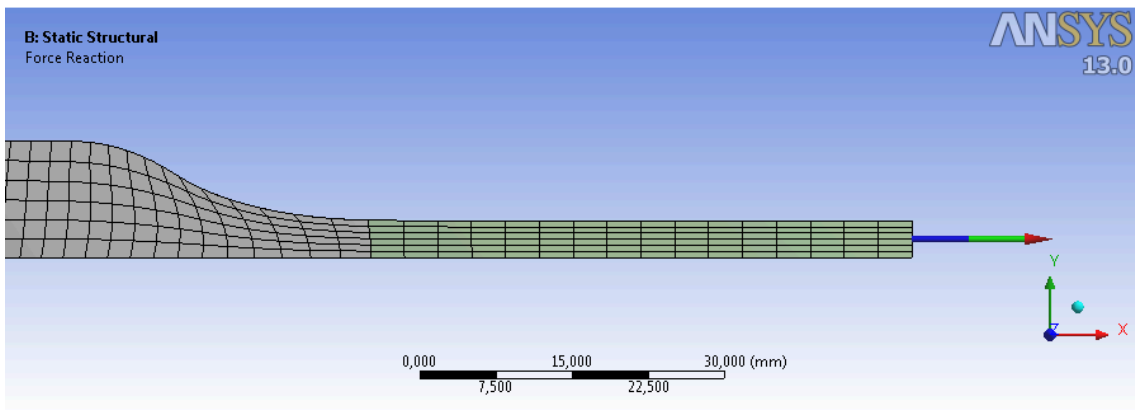




*fig. 7.14 – Nodo di valutazione allungamento normale*



*fig. 7.15 – Nodo di valutazione allungamento ortogonale*



*fig. 7.16 – Sezione di valutazione della reazione*

## 7.2.1. Analisi dei risultati

In base alla definizione del modello numerico, così come esposto nel precedente paragrafo, i risultati sono riferiti al modello con doppia simmetria rispetto alla geometria reale.

Per quanto discusso nel Capitolo 3 sul calcolo della tensione e sull'importanza del termine in  $\mathbf{D}_1$ , funzione del *coeff.* di *Poisson*, confrontando i risultati ottenuti dall'analisi numerica ed utilizzando il *best – fit* del materiale sperimentale, ci si rende conto che ci sono degli scostamenti tra la curva ottenuta dal *fit* ed i risultati dell'analisi.

Facendo variare, infatti, il parametro  $\mathbf{D}_1$ , in un *range* compreso tra il limite teorico di 0,5, che identifica un materiale incomprimibile, e 0.40, si ottengono i risultati esposti in fig. 7.17- 18- 19- 20, dove vengono messi a confronto le deformazioni ottenute in fase sperimentale e numerica a parità di carico imposto.

Il limite inferiore imposto nell'analisi è stato deciso in funzione del fatto che al modello deve essere dato il valore iniziale del *coeff.* di *Poisson* e poiché in tale intervallo in fase sperimentale non si ha una buona risoluzione soprattutto per i motivi esposti nel Capitolo 3.

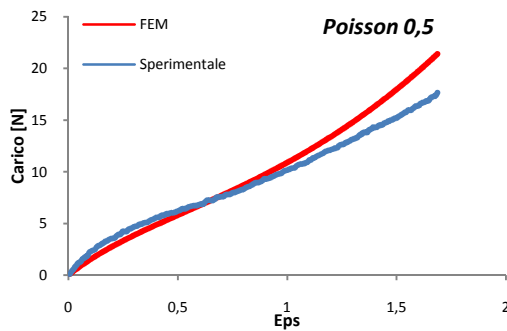


fig. 7.17

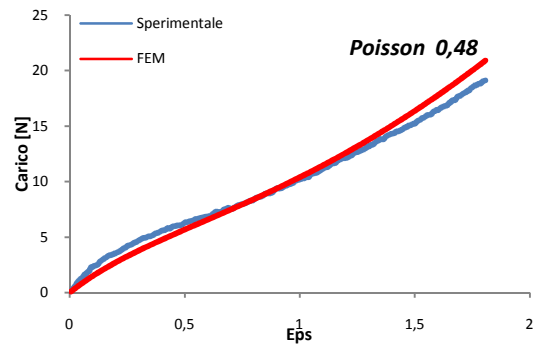


fig. 7.18

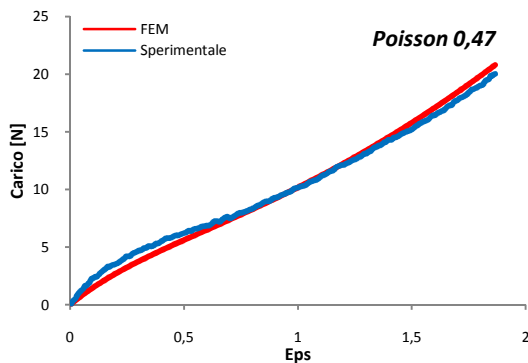


fig. 7.19

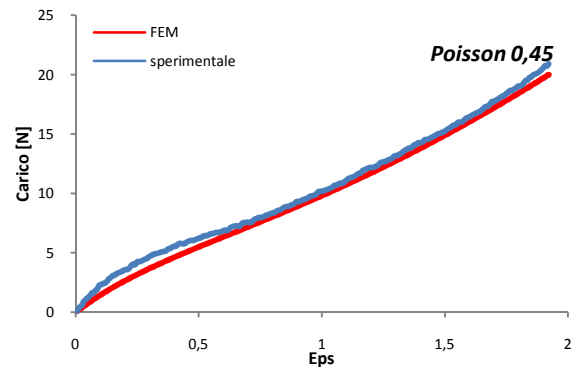


fig. 7.20

Com'è evidente dai risultati ottenuti, tranne che per il tratto iniziale, al variare del termine  $\mathbf{D}_1$ , e quindi del *coeff.* di *Poisson*, si ha una migliore risposta del modello.

Al fine di identificare il valore di  $\mathbf{D}_1$ , che dia la migliore risposta globale, è stato valutato l'MSE (errore quadratico medio) (7.03) su ogni prova, valutato tra i carichi ottenuti sperimentalmente e numericamente al variare della deformazione longitudinale.

$$MSE = \frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x}_i)^2}{n} \quad (7.03)$$

Dove con  $x_i$  viene indicato il valore ottenuto sperimentalmente e  $\bar{x}_i$  il valore ottenuto dall'analisi sperimentale.

In figura seguente vengono riportati i risultati numerici dove si può osservare, ma era già evidente dalle fig. 7.18-19-20, che il *coeff.* di *Poisson*, che ottimizza il modello, è compreso tra 0,47 e 0,45.



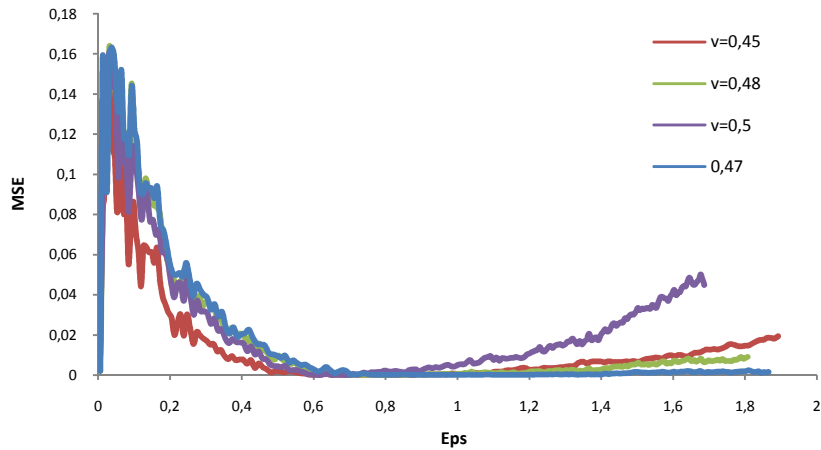


fig. 7.21 -

Per meglio identificare il valore del *coeff. di Poisson* che ottimizzi il comportamento del materiale è stata fatta una valutazione dell'RMSEP (7.04) (radice della media dei quadrati percentuali) e successivamente, fittando i valori, è stato identificato il minimo.

$$RMSEP = \sqrt{\frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x}_i)^2}{n}} \quad (7.04)$$

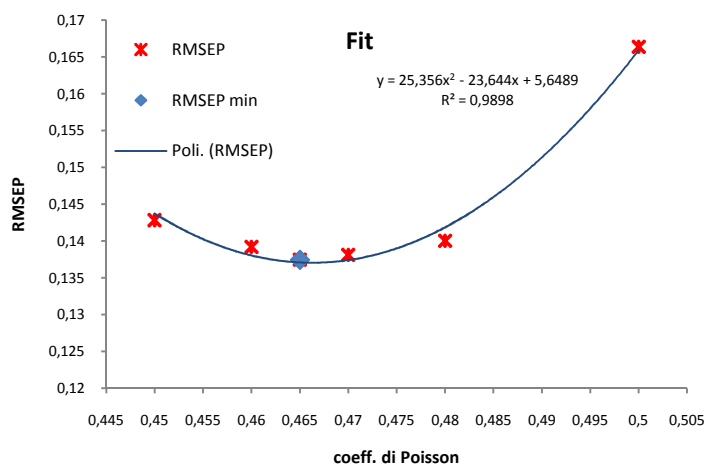


fig. 7.22- RSMEP

Come prima detto in fig. 7.22 è possibile identificare il valore di *Poisson* con il minimo a 0.465.

Il grafico riportato di seguito esemplifica il confronto numerico-sperimentale, in cui si evince la completa corrispondenza dei valori, ad eccezione della parte iniziale, una volta individuato il valore di Poisson che minimizza l'errore globale.

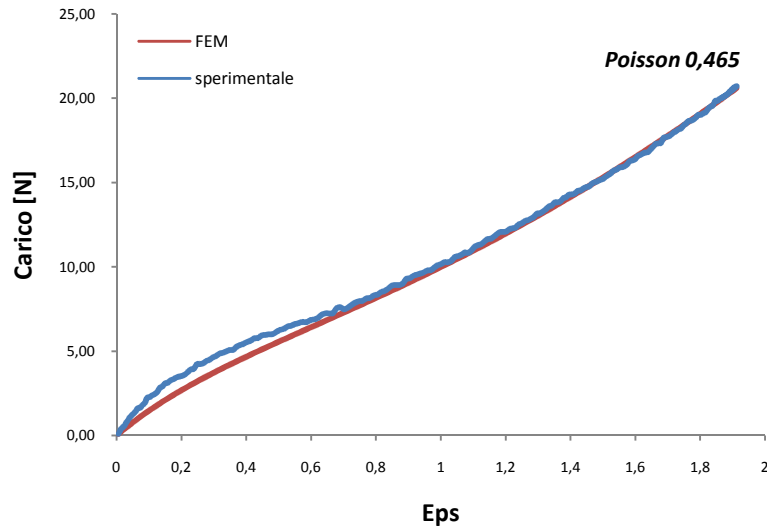


fig. 7.23 - Sperimentale - Numerico,  $\nu=0.465$

Gli errori ottenuti, per il modello, sono riassunti in tabella seguente 7.03, ed in fig. 7.24:

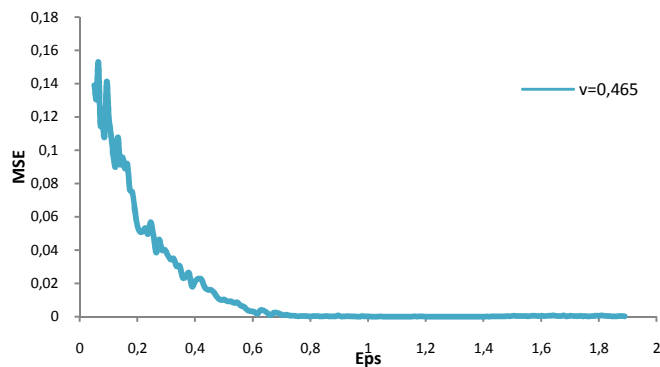


fig. 7.24

$\nu$	0,5	0,48	0,47	0,465	0,46	0,45
$MSE_{max}$	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,19
$MSE_{min}$	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$1,09 \cdot 10^{-9}$	$2,54 \cdot 10^{-7}$	0,00	$2,93 \cdot 10^{-11}$	0,00

Tab. 7.03

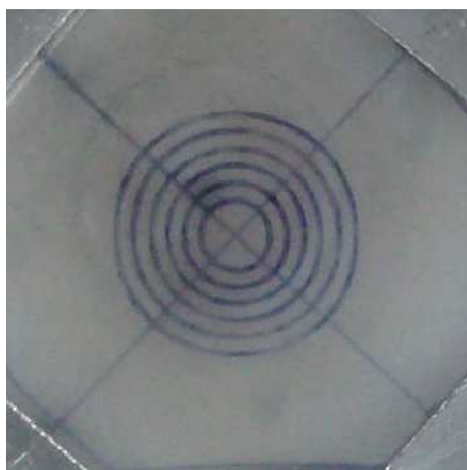
### 7.3. Analisi FEM biassiale

Per l'analisi numerica relativa al test biassiale è stata seguita la stessa parametrizzazione del parametro  $D_1$ , fino alla convergenza della reazione, applicata per l'analisi monoassiale.

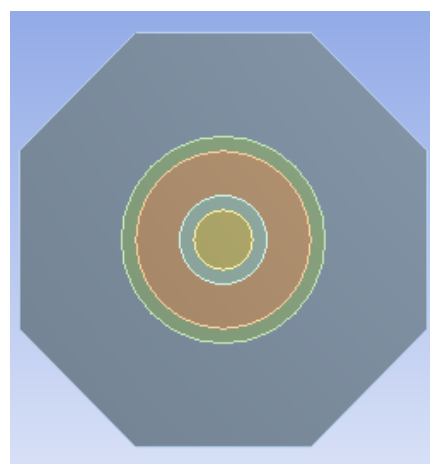
A differenza del caso monoassiale, nel caso del test biassiale, la taratura del modello viene anche eseguita guardando la convergenza dei risultati di spostamento dei lembi liberi del modello e delle deformate assunte dai *markers*.

Per quanto prima detto, il dominio di calcolo è stato realizzato in modo da poter seguire in fase di post-processing le deformate dei marker.

In fig. 7.25 – 26 viene mostrata la riproduzione dei marker sul dominio di calcolo. In particolare sul dominio di calcolo sono state definite le corone con diametri  $D_0$  e  $D_1$  e quella più esterna definita dai diametri  $D_4$  e  $D_5$ .



*fig. 7.25-Markers sul provino*



*fig. 7.26-Riproduzione dei markers sul dominio di calcolo*

Quest'accorgimento è utile, infatti, a valutare non solo gli spostamenti e quindi la forma assunta dai *markers*, ma anche la geometria assunta dal provino.

Il dominio di calcolo è stato definito mantenendo le misure reali (70 [mm]x70[mm]x1[mm]), ma escludendo le zone all'interno degli afferraggi, che di fatto non subiscono la sollecitazione di trazione imposta ma sola traslazione rigida lungo la direzione di carico.

Alle sezioni ottenute viene imposta una *rampa di spostamento* (fig.7.28) lungo la normale alla superficie e bloccato lo spostamento laterale (*displacement*), in fig. 7.27, sono indicate con A, B, C, D.

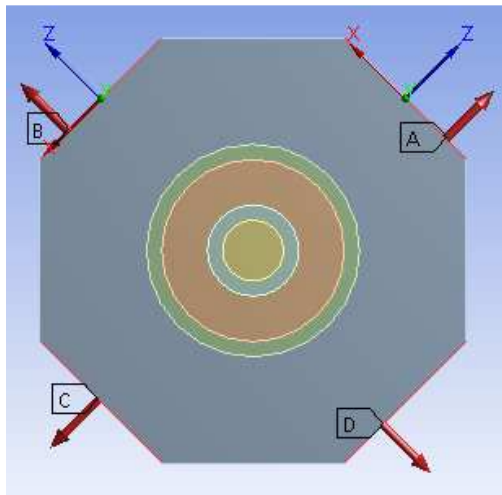


fig. 7.27 - BC's

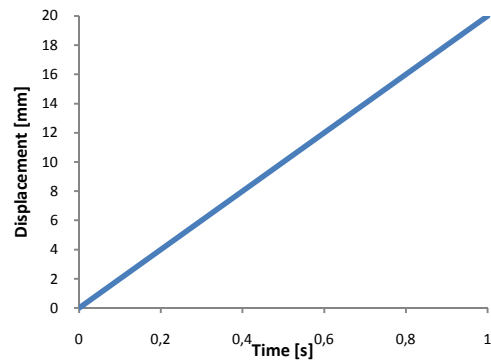


fig. 7.28 – Rampa d spostamento imposto

Come è evidente dalla fig. 7.27, per la determinazione della direzione di carico, sui lembi in alto in figura, sono stati posti due sistemi di riferimento locali, in modo da identificare in maniera univoca le direzioni ortogonali di carico.

La rampa di spostamento imposta su ogni lembo, per migliorare la convergenza, è stata suddivisa in 300 *substeps*.

Per quanto riguarda la *mesh*, è stata realizzata una *mesh* da elementi tipo *Shell a membrana* con dominanza di elementi Quad8, al quale è stato imposto lo spessore di 1[mm], con una maggiore definizione dall'esterno verso l'interno delle corone. Ovviamente per gli stessi motivi esposti nel caso della monoassiale, gli elementi utilizzati sono senza nodi intermedi (Errore di *Hourglass*).

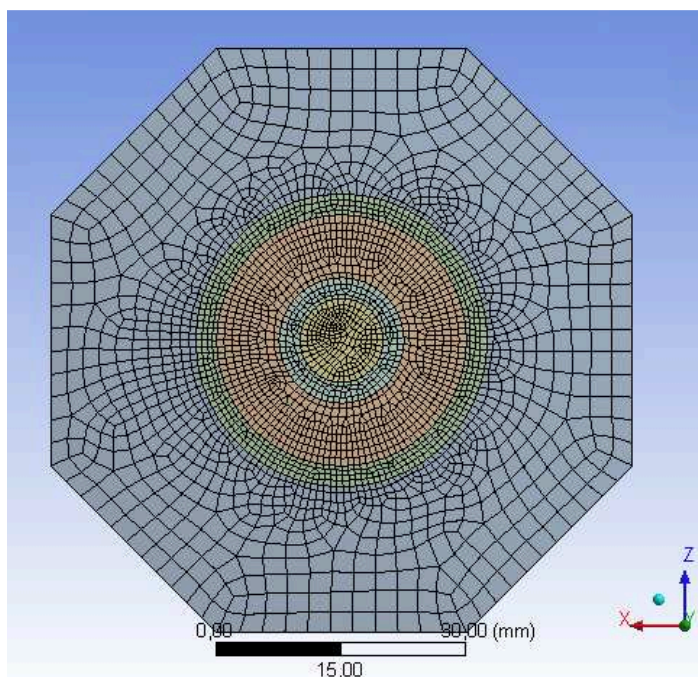


fig. 7.30 – Mesh

In tabella seguente sono riportati i dati *mesh*:

Dominio	
<b>Elementi</b>	8754
<b>Nodi</b>	2899

**Tab. 7.04 – Risultati Mesh**

Per quanto detto all’inizio del paragrafo, la parametrizzazione del modello avviene sul coefficiente  $D_1$  valutando la convergenza della reazione ai vincoli, a parità di spostamento sul lembo, congiuntamente alla deformazione dei diametri  $D_i$ , che definiscono le due corone e dei lembi liberi.

I casi analizzati sono riassunti nella seguente tabella:

C10 [MPa]	C01[MPa]		
214695,92	68960,21		
Design Point	v	D1	
0	0,5	0	
1	0,48	1,41E-07	
2	0,47	2,12E-07	
3	0,46	2,82E-07	
4	0,45	3,53E-07	
5	0,44	4,23E-07	
6	0,465	2,47E-07	

**Tab. 7.05**

dove il parametro  $D_1$  è stato calcolato con la seguente relazione, già nota dai Cap. precedenti:

$$D1 = \frac{(1 - 2\nu)}{(C_{10} + C_{01})} \quad (7.05)$$

Lo schema di parametrizzazione sul solutore Ansys® è analogo a quello utilizzato nel caso dell'analisi monoassiale (fig.7.30).

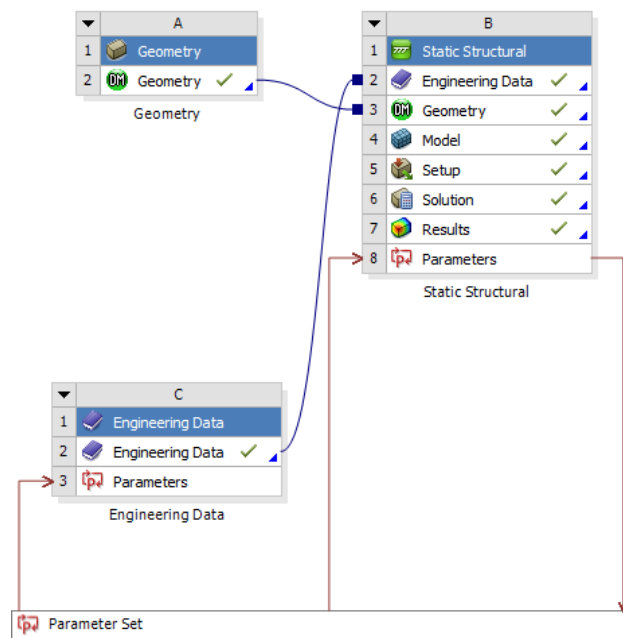


fig. 7.30 – Parametrizzazione

### 7.3.1. Analisi dei risultati

Un confronto tra valori sperimentali e simulati di una misura globale, che tenga conto delle condizioni al contorno, può avere un grande peso nella scelta del *coeff.* di *Poisson*, quest'ultimo infatti influenza fortemente le modalità di deformazione del materiale sottoposto a sollecitazioni esterne.

Le misure scelte per eseguire questo confronto sono la lunghezza dei lati liberi fra gli afferraggi e la deformazione delle circonferenze *markers*, che nel dominio di calcolo definiscono il contorno delle due areole concentriche.

Per capire come evolve la geometria al variare del parametro  $D_1$ , di seguito viene riportata una sequenza di *post-processing*, dove è possibile osservare la deformazione della geometria al variare del parametro  $D_1$ , in due *steps* differenti, relativi ad una reazione di 10[N] e 20[N] su ogni afferraggio, in particolare sono evidenti i valori di spostamento globale.

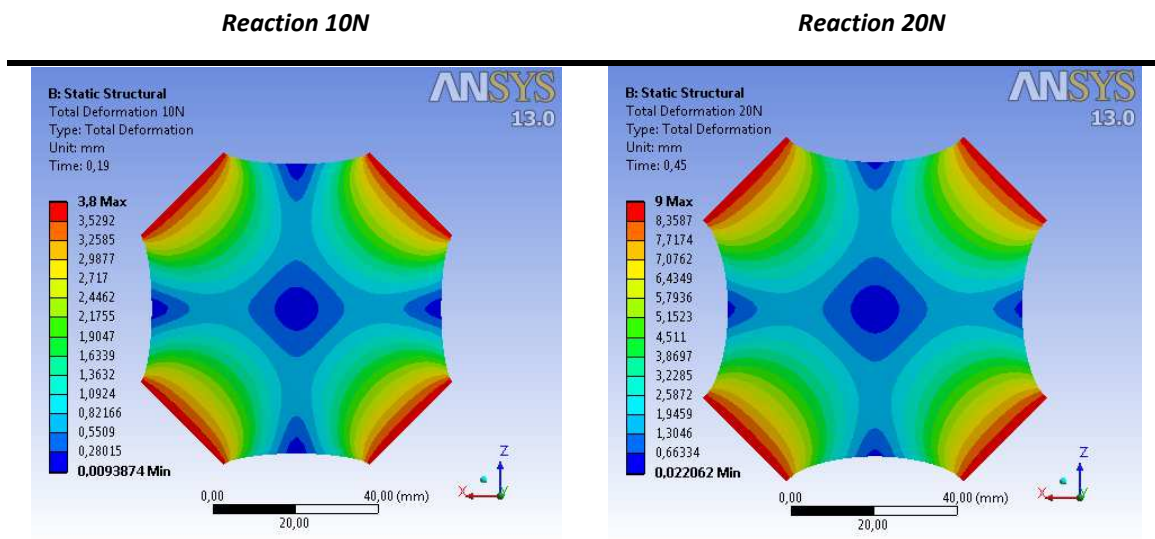


fig. 7.31–Total def.-  $\nu=0.5$

fig. 7.32–Total def -  $\nu=0.5$



Reaction 10N

Reaction 20N

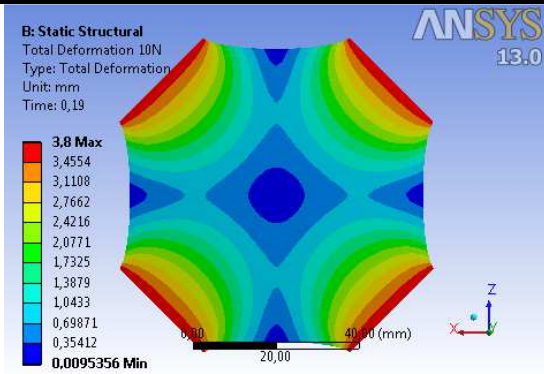


fig. 7.33–Total def. - v=0.48

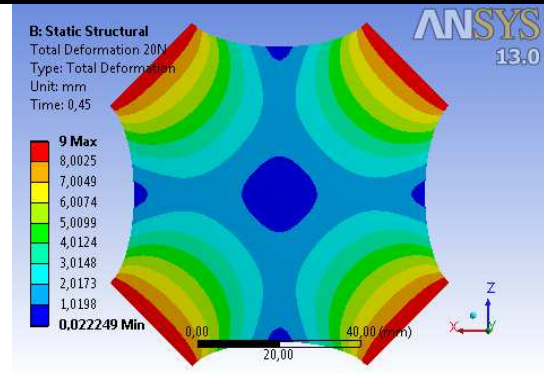


fig. 7.34–Total def. - v=0.48

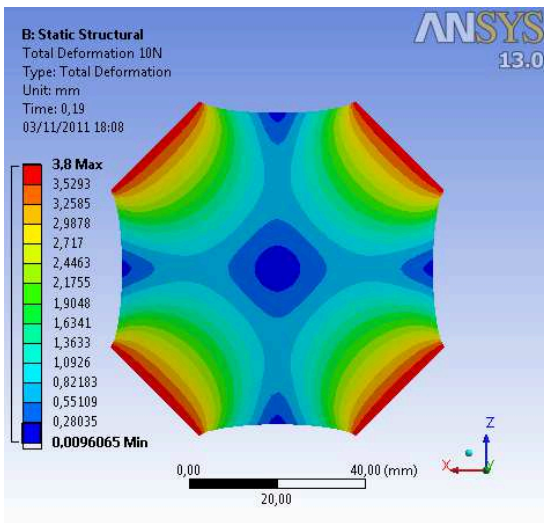


fig. 7.35–Total def. - v=0.47

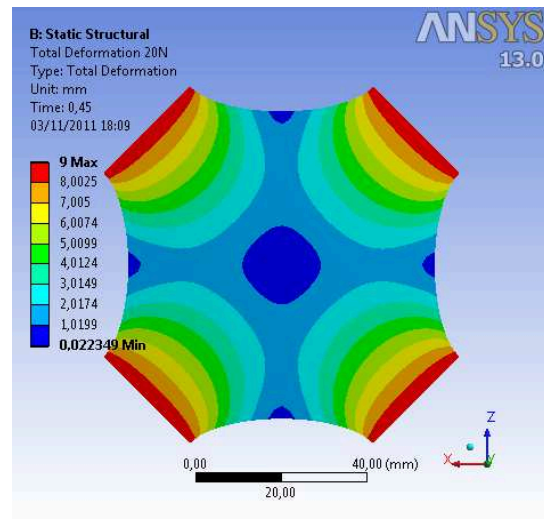


fig. 7.36–Total def. - v=0.47

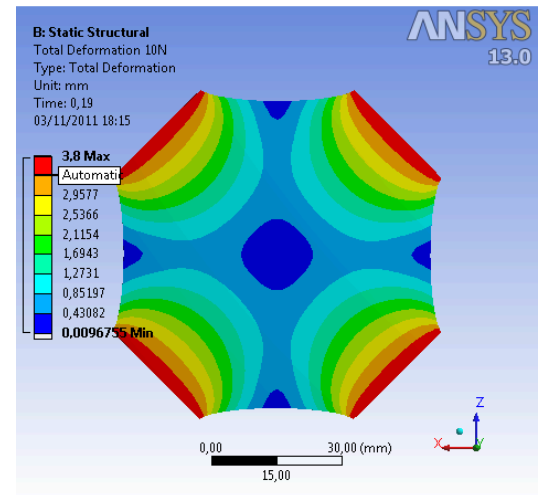


fig. 7.37–Total def. - v=0.46

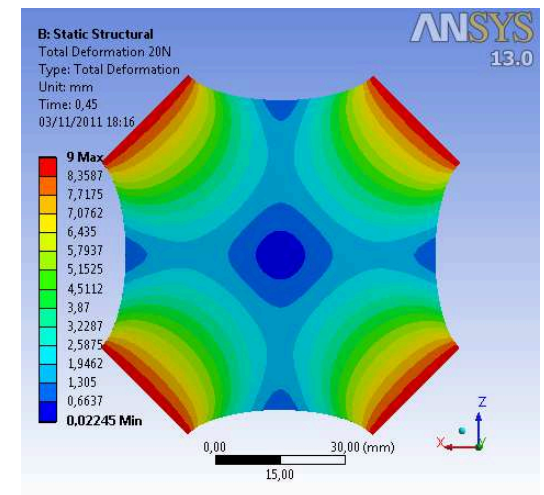


fig. 7.38–Total def. - v=0.46



Reaction 10N

Reaction 20N

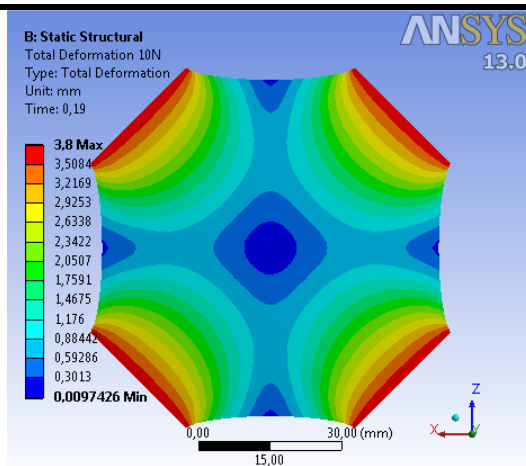


fig. 7.39-Total def. -  $\nu=0.45$

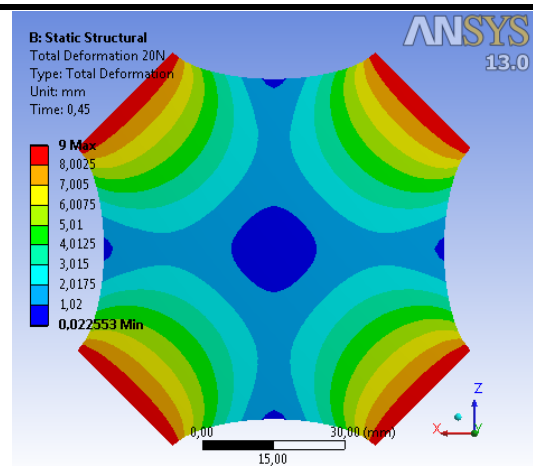
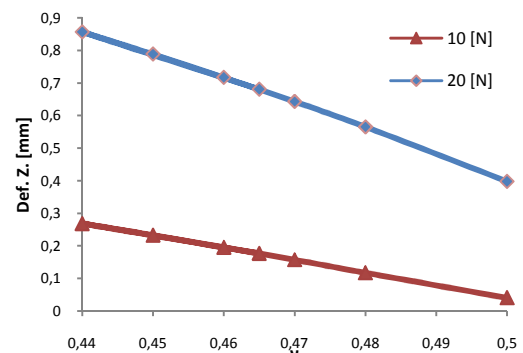


fig. 7.40 -Total def. -  $\nu=0.45$

Nella seguente tabella sono riassunti i valori di deformazione del lembo libero lungo la direzione **Z** (equivalenti agli spostamenti in direzione **X** per simmetria del modello).

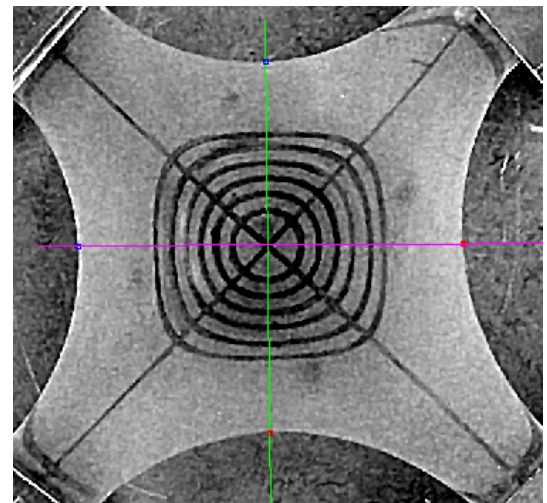
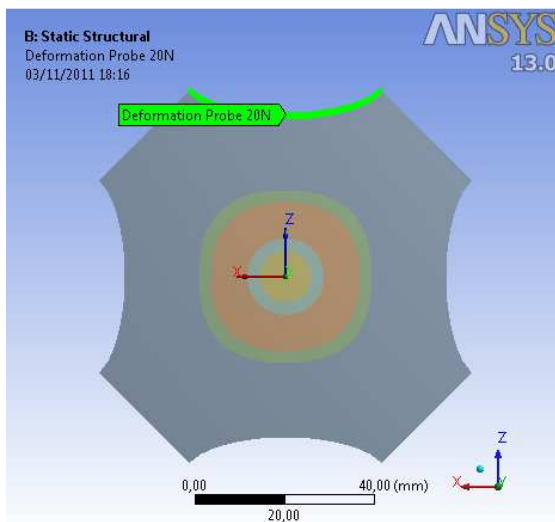
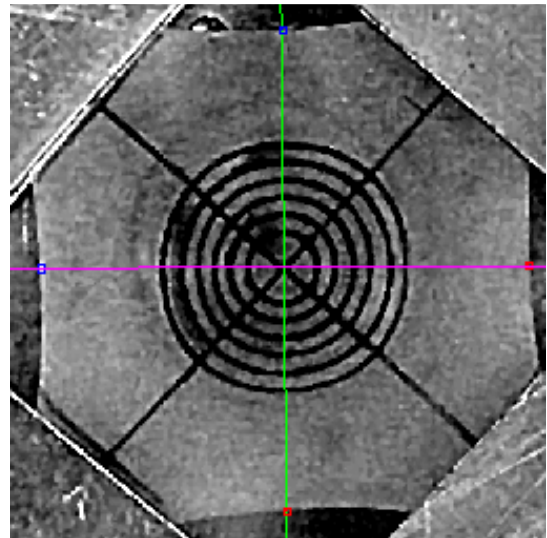
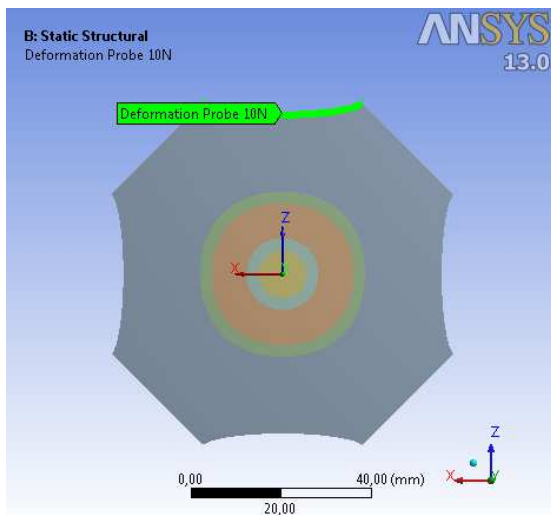
Design Point	$\nu$	Def. Z [mm] 10 [N]	Def. Z [mm]. 20 [N]
0	0,5	0,040564	0,39781
1	0,48	0,11737	0,56516
2	0,47	0,15724	0,64286
6	0,465	0,17662	0,68038
3	0,46	0,19564	0,71709
4	0,45	0,23268	0,78817
5	0,44	0,26845	0,85638

Tab. 7.06

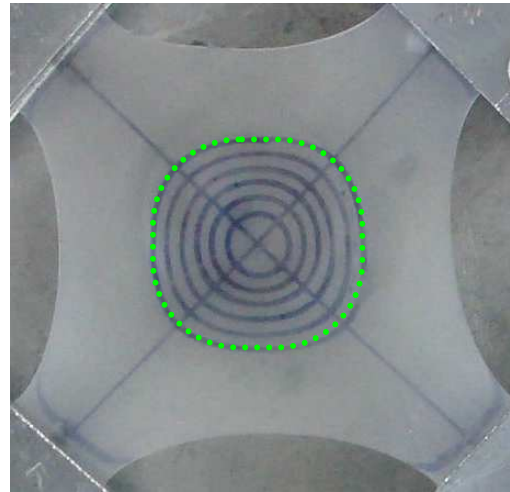
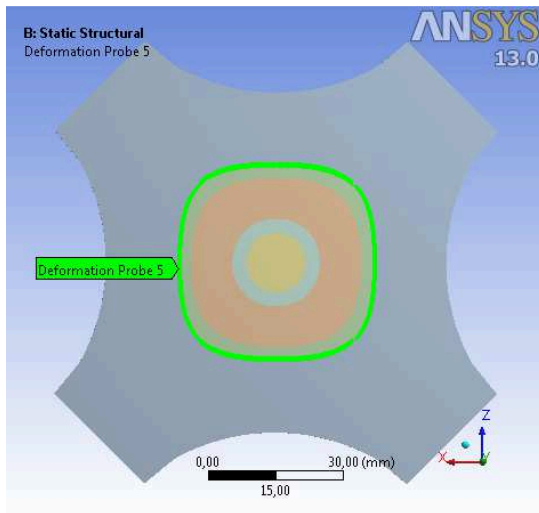


È evidente, come visto nel caso della monoassiale, che a parità di reazione, minore è il valore di  $\nu$  e maggiore sarà la deformazione volumetrica subita dal materiale e, di conseguenza, la contrazione dei lembi liberi.

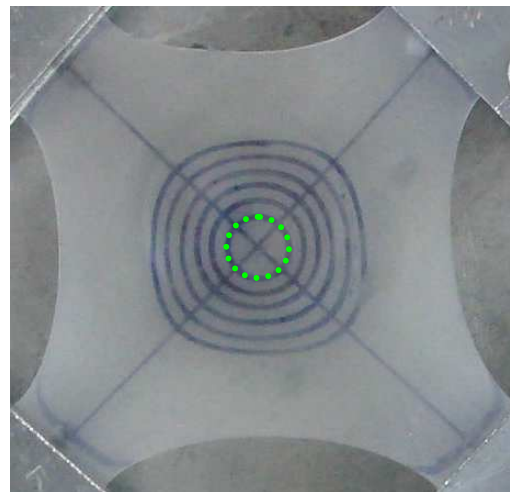
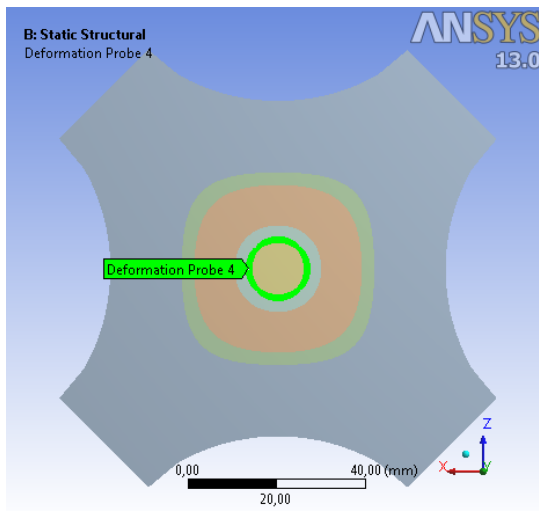
Di seguito viene mostrato un confronto, a parità di carico, dei risultati di deformazione dell'analisi numerica e dell'analisi ottica dei lembi liberi, fig. 7.41 e dei marker **D0** e **D5** in fig. 7.42-43.



*fig. 7.41 – Confronto spostamento lembi liberi*



*fig. 7.42 – Confronto deformazione circonferenza D5*



*fig. 7.43 – Confronto deformazione circonferenza D0*

Com'è evidente, dal *post-processing* e dall'analisi delle immagini, la zona di bi-assialità si mantiene all'interno del diametro **D0** o comunque all'interno dell'areola definita dai diametri **D0** e **D1**, ovvero nella zona contenuta dai *markers* circolari che durante la prova si mantengono tali. A conferma di quanto detto, dal *post-processing* seguente, fig.7.44-45, è evidente che la zona di tensione equi-biassiale si estende dal centro fino alla prima areola.

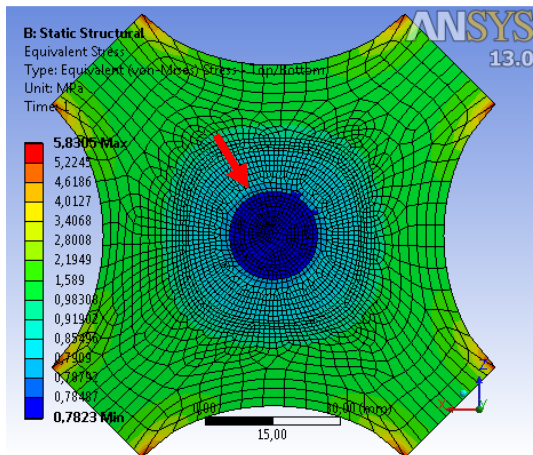


fig. 7.44 – Stress- time 1[s]

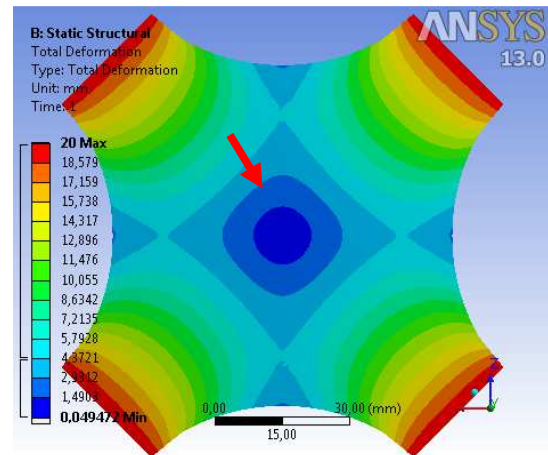


fig. 7.45 – Total def.- time 1[s]

Poiché dall’analisi iterativa (Par. 7.2.1) delle prove di trazione monoassiale non è sufficiente a stabilire quale sia il *coeff.* di *Poisson* effettivo del materiale testato, e ciò è dovuto all’incertezza iniziale, la valutazione degli scostamenti fra valori simulati e sperimentali su una prova biassiale ha maggiore efficacia.

A tal fine la divisione in corone concentriche e l’apposizione di *markers* circolari sul provino permettono di individuare e analizzare la zona corretta, soggetta a sollecitazione equi-biassiale.

Oltre a quanto detto l’analisi dei lembi liberi fornisce, per quanto mostrato prima, informazioni utili alla definizione del *coeff. v*.

Per l’identificazione di *v*, e quindi del parametro  $\mathbf{D}_1$ , è stato applicato il criterio di valutazione dell’RMSEP (Par. 7.2.1), già utilizzato nelle prove monoassiali, sulla dimensioni dei *markers* circolari e sulla deformazione dei lembi liberi rispetto al test sperimentale, a parità di reazione.

Indicando con  $x_i$  il valore ottenuto sperimentalmente e con  $\bar{x}_i$  il valore ottenuto dall’analisi sperimentale, sia ha:

$$RMSEP = \sqrt{\frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x}_i)^2}{n}} \tag{7.06}$$

$\nu$	RMSEP D0	RMSEP D1	RMSEP D4	RMSEP D5	RMSEP Lembi
0,50	2,262	2,253	0,930	1,143	2,09
0,48	1,239	1,251	0,763	1,751	1,24
0,47	0,882	0,956	0,967	2,058	0,90
0,465	0,796	0,854	1,117	2,208	0,75
0,46	0,761	0,839	1,251	2,343	0,71
0,45	0,905	1,016	5,584	2,637	0,49
0,44	1,149	1,266	1,828	2,890	0,54

Tab. 7.07– Confronto degli errori al variare di  $\nu$  per il test biassiale

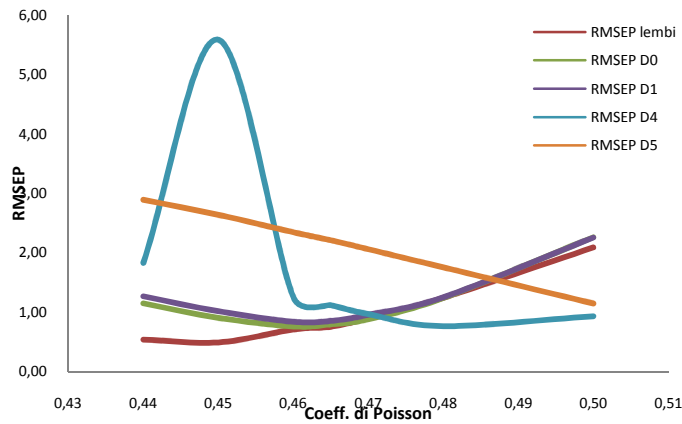


fig. 7.46

Dal grafico di fig. 7.46 è evidente che ad esclusione dei *markers* più esterni e soprattutto del diametro **D5**, l'errore presenta un minimo comune fra i valori di 0.46 e 0.47 del *coeff. di Poisson*.

Mediando gli errori si ottiene che l'analisi che meglio rispecchia i test sperimentali è quella che ne presenta il minimo, come già visto per l'analisi monoassiale, al *coeff. di Poisson* pari a 0.465 (fig.7.47).

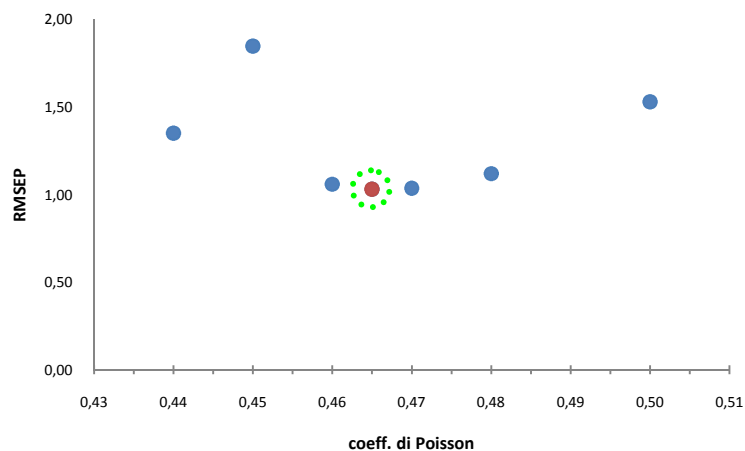


fig. 7.46 – Media errore

Volendo confrontare la variazione di diametro in funzione della reazione agli afferraggi al variare del *coeff. di Poisson*, si hanno i seguenti risultati.

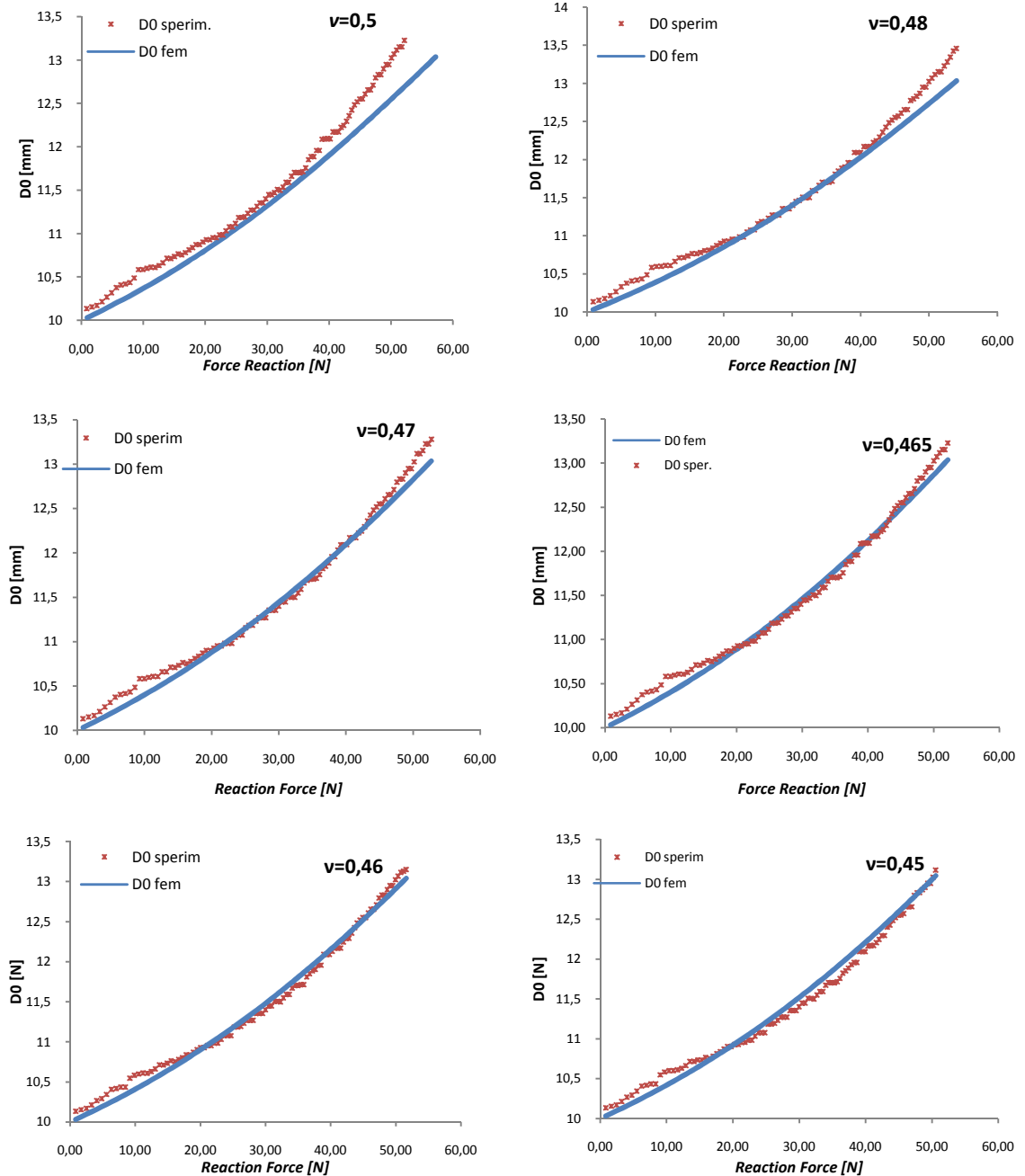


fig. 7.47 – Confronto Simulato Sperimentale sul diametro  $D_0$

Come si vede dai risultati grafici in fig. 7.47 i risultati del *fit* migliorano complessivamente nel range 0.46-0.47 del *coeff. di Poisson*. Appare anche evidente che variando il parametro  $D_1$  il primo tratto delle curve mostrate non subisce nessun cambiamento ciò è dovuto al fatto che il solutore sta seguendo comunque la curva

caratteristica fittata, sostanzialmente funzione dei parametri  $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{20}$ ,  $C_{11}$  e  $C_{02}$  in tab.7.08, e risulta più bassa rispetto alla curva sperimentale. Quanto detto appare chiaro se guardiano la seguente fig. 7.48 nella zona vicina all'origine.

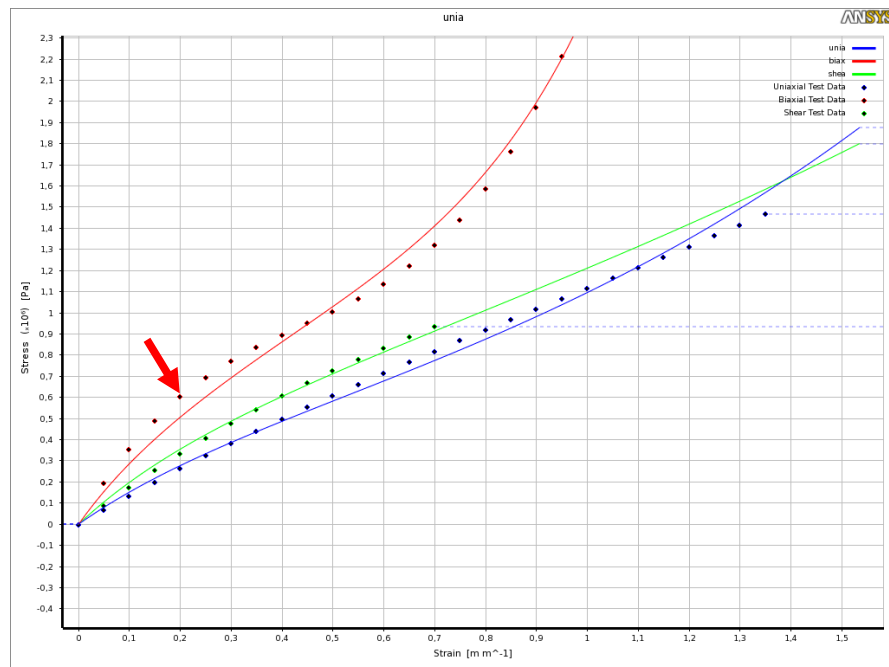


fig. 7.48

Parametro	$C_{10}$	$C_{01}$	$C_{20}$	$C_{11}$	$C_{02}$	D1
[Pa]	214695,921	68960,219	29423,935	-27798,689	7143,658	2,47E-07

**Tab. 7.08**–Parametri di fitting Mooney-Rivlin

# 8

## Conclusioni



## 8. Conclusioni

---

Il presente lavoro è incentrato sulla caratterizzazione di materiali a comportamento iperelastico, e quindi volto alla determinazione di tutti quei parametri che definiscono le sue proprietà meccaniche. Lo studio di questi materiali è spesso dispendioso sia in termini di tempo sia in termini economici dovuto al fatto che una completa caratterizzazione prevede diverse tipologie di prove, quindi un *set-up* sperimentale dedicato.

Per la caratterizzazione del materiale, nello specifico per la realizzazione delle prove meccaniche, sono stati progettati e realizzati i sistemi di test di tipo planare, utilizzati anche per prove monoassiali, ed un opportuno sistema per test biassiali. La realizzazione dei sistemi prima accennati permette in maniera agevole di poter effettuare i test necessarie e passare in maniera veloce da un *set-up* ad un altro.

Solitamente, l'impossibilità di poter applicare le tecniche di estensimetria di contatto, per via delle grandi deformazioni in gioco, vengono utilizzati estensimetri ottici. Sebbene queste tecniche permettono di fare misure con elevata precisione, i problemi relativi all'investimento iniziale o alle dimensioni ne limitano la loro applicazione.

Alla luce di quanto detto, quindi, i test presentati sono stati corredati di un sistema di rilievo delle deformazioni utilizzando una sola camera CCD ad alta risoluzione e di una procedura automatica di post elaborazione e sincronizzazione dei dati provenienti dalla prova.

Il sistema misuristico messo a punto ha dato ottimi risultati e la perfetta sovrapposizione delle curva sforzo-deformazione ottenute con le curve provenienti dalla macchina di prova, nel caso di prove monoassiali e planari, mostrando la bontà della procedura e l'applicabilità sui test biassiali dove non è possibile effettuare un confronto diretto con i dati provenienti dalla macchina monoassiale. Nel caso di test biassiali ci si è avvalsi infatti, per l'ottenimento della curva caratteristica, dei dati carico

provenienti dalla sola cella di carico installata sulla macchina di prova di trazione e dei dati di deformazione derivati dall'indagine ottica.

Il materiale utilizzato al raggiungimento dello scopo è un silicone commerciale, prodotto dalla Angst + Pfister, con sigla VMQ.

Infine, ottenute le curve caratteristiche, quindi caratterizzato il materiale secondo il miglior fit con i modelli disponibili in letteratura, è stata verificata la rispondenza del modello con l'analisi numerica.

Poiché le sole tre prove citate sono necessarie ma non sufficienti alla completa caratterizzazione del materiale, si è data particolare attenzione all'identificazione della componente volumetrica del materiale per by-passare il test volumetrico.

È stato proposto, quindi, un metodo iterativo basato sull'analisi dell'immagine e analisi numeriche agli elementi finiti. La convergenza delle reazioni lette dalla cella di carico, nel rispetto delle deformazioni dei marker e dei lembi liberi rilevati otticamente per il test biassiale, ha permesso di minimizzare l'errore dal 2% allo 0.7%.

Concludendo, il presente lavoro non ha avuto come unico obiettivo quello di testare un materiale a comportamento non lineare, ma anche quello di realizzare in maniera semplice ed accessibile una metodologia di test soprattutto nel caso bi-assiale e nel contempo capire e darne il giusto peso al termine volumetrico nei modelli di energia di deformazione.

# Appendice

---

## Synchro.m

```
Select=str2num(input...  
( 'Analysis? Mono_Axial <0>, Planar <1>, Bi-Axial <2>:  
' , 's' ));  
if Select==0  
    synchro_mono.m  
elseif Select==1  
    synchro_planar.m  
else  
    synchro_biax.m  
end
```

## synchro\_mono.m

```
clc;clear;
sprintf('%s','Test-Mono-axial')
sprintf('%s','Replace Dot with a Comma')

index=str2num(input('frame breakin (CCD): ','s'));
hz=str2num(input('Freq. frame aquisition (CCD): ','s'));
S_Prov=str2num(input...
('Thickness [mm]: ','s'));
M_Prov=str2num(input...
('Longitudinal dimension/displacement Grip[mm] : ','s'));
L_Prov=str2num(input...
('Dimension trasversal speciment for Sigma [mm]: ','s'));

%Calcolo del tempo da associare ad ogni immagine
timeBreak_CAM = index/hz;

%Load file in formato testo
[a,b]=uigetfile('*.txt','Load file Orizzontal
Displacement');
[c,d]=uigetfile('*.txt','Load file Vertical Displacement');
[e,f]=uigetfile('*.txt','Load file Test Machine');

lo = importdata(a, '\t', 5);
lv = importdata(c, '\t', 5);
ZW = importdata(e, ';', 1);

ZW = ZW.data;
lo=lo.data;
lv=lv.data;

%Azzeramento dei valori alla traversa e del carico
ZW(:, 2) = ZW(:, 2) - ZW(1, 2);
ZW(:, 3) = ZW(:, 3) - ZW(1, 3);
ZW_norm = ZW;

[maxF, maxI] = max(ZW(:, 3));

%Individuazione del tempo di rottura macchina di prova
timeBreak_ZW = ZW(maxI, 1);

%Azzeramento dei carichi e spostamenti della macchina di
prova
ZW_norm = ZW_norm(1:maxI, :);
Sig_Nominal=[ZW_norm(:,1) ZW_norm(:,2)
((ZW_norm(:,3)/(L_Prov*S_Prov)))]];

%Plot carico-spostamento della macchina di prova
subplot(2,2,1)
plot(ZW_norm(:,2), ZW_norm(:,3),'--b');
title('Force Vs Displacement Machine','Color','b');
ylabel('Force [N]','Color','r');
xlabel('Displacement Machine [mm]','Color','r');grid;

%Plot Sigma-Spostamento traversa, con Sigma calcolata
```

```

sull'area

Eps_machine=ZW_norm(:,2)./M_Prov;
subplot(2,2,2)
plot(Eps_machine, Sig_Nominal(:,3),'--b');
title('Sigma Vs Displacement Machine','Color','b');
ylabel('Sigma [MPa]','Color','r');
xlabel('Eps Machine','Color','r');grid;

%Salva in formato testo la curve macchina Azzerati
save ZW_norm.txtZW_norm-ASCII;

%Salva in formato testo la curva spostamento traversa -
sigma
save Sig_Nominal.txtSig_Nominal-ASCII;

%Calcolo Differenza temporale per la sincronizzazione
deltaT = -timeBreak_CAM + timeBreak_ZW;

%Analisi Dim. Verticali

LV = [ (0:1:size(lv,1)-1)' lv];
LV(1,1)=deltaT;

for i=2:size(LV(:,1))

    LV(i,1)=LV((i-1),1)+(1/hz);

end

LV_eps = [(LV(:,1)) ((LV(:,2)-LV(1,2))/LV(1,2))];

%Analisi Dim. Orizzontali

LO = [ (0:1:size(lo,1)-1)' lo ];
LO(1,1)=deltaT;

for i=2:size(LO(:,1))

    LO(i,1)=LO((i-1),1)+(1/hz);

end

LO_eps = [(LO(:,1)) ((LO(:,2)-LO(1,2))/LO(1,2))];

%Interpolazione per la ricerca del tempo ad asse comune
LO_eps_norm = interp1(LO_eps(:,1), LO_eps(:,2),
ZW_norm(:,1), 'spline');

LV_eps_norm = interp1(LV_eps(:,1), LV_eps(:,2),
ZW_norm(:,1), 'spline');

%Assembl. matrici per esportazione della curva Eps-Sigm ed
azzeramento del carico dovuto all'alzata delle basette

```

```

%Curva sigm-Eps sincronizzata orizz.
Sig_Eps_O=[LO_eps_norm (ZW_norm(:,3)/(L_Prov*S_Prov))];

%Curva Sigma - Eps sincronizzata longit.
Sig_Eps_V=[LV_eps_norm (ZW_norm(:,3)/(L_Prov*S_Prov))];

%Plot Sigm-Eps longitudinale
subplot(2,2,4)
plot(Sig_Eps_V(:,1),Sig_Eps_V(:,2),'--b')
title('Sigma Vs Eps Longitudinal','Color','b');
ylabel('Sigma [MPa]','Color','r');
xlabel('Eps Longitudinal','Color','r');grid;

subplot(2,2,3)
%Calcolo del Coeff. di Poisson
Poisson=-(LO_eps(:,2)./LV_eps(:,2));
plot(LV_eps(:,2),Poisson,'ob');
title('Poisson Vs Eps Longitudinal','Color','b');
ylabel('POisson','Color','r');
xlabel('Eps Longitudinal','Color','r');grid;
axis([0 5 0 0.55]);

figure
%subplot(1,2,1)
plot(Eps_machine, Sig_Nominal(:,3),'--b');
title('Sigma Vs Displacement Machine','Color','b');
ylabel('Sigma [MPa]','Color','r');
xlabel('Eps Machine','Color','r');grid;

hold on
%subplot(1,2,2)
plot(Sig_Eps_V(:,1),Sig_Eps_V(:,2),'--r');

%Calcolo Lambda
L1=LV_eps(:,2)+1;
L2=1./sqrt(L1);
L3=L2;
%Calcolo della sezione Vera
L_Prov_True=L_Prov+(L2-1);%Larghezza vera
S_Prov_True=S_Prov+(L3-1);%Spessore vero calcolato con
l'invariante
A_True=L_Prov_True.*S_Prov_True;

%Confronto macchina-ottico

%Salvataggio dei file Eps-Sigm per i diametri

save Sig_Eps_O_Axial.txtSig_Eps_O-ASCII
save Sig_Eps_V_Axial.txtSig_Eps_V-ASCII

```

## synchro\_planar.m

```
clc;clear;
sprintf('%s','Test-Planar')
sprintf('%s','Replace Dot with a Comma')

index=str2num(input...
('frame breakin (CCD): ','s'));
hz=str2num(input...
('Freq. frame aquisition (CCD): ','s'));
S_Prov=str2num(input...
('Thickness [mm]: ','s'));
M_Prov=str2num(input...
('Longitudinal dimension/displacement Grip[mm] : ','s'));
L_Prov=str2num(input...
('Dimension trasversal speciment for Sigma [mm]: ','s'));

%Calcolo del tempo da associare ad ogni immagine
timeBreak_CAM = index/hz;

%Load dei file in formato testo
[c,d]=uigetfile('*.txt','Load file Vertical...
Displacement');
[e,f]=uigetfile('*.txt','Load file Test Machine');

lv = importdata(c, '\t', 5);
ZW = importdata(e, ';', 1);

ZW = ZW.data;
%lo=lo.data;
lv=lv.data;

%Azzeramento dei valori traversa e carico
ZW(:, 2) = ZW(:, 2) - ZW(1, 2);
ZW(:, 3) = ZW(:, 3) - ZW(1, 3);
ZW_norm = ZW;

[maxF, maxI] = max(ZW(:, 3));

%Individuazione del tempo di rottura macchina di prova
timeBreak_ZW = ZW(maxI, 1);

%Azzeramento dei carichi e spostamenti della macchina di
prova
ZW_norm = ZW_norm(1:maxI, :);
Sig_Nominal=[ZW_norm(:,1) ZW_norm(:,2)
((ZW_norm(:,3)/(L_Prov*S_Prov)))]];

%Plot carico-spostamento della macchina di prova
subplot(2,2,1)
plot(ZW_norm(:,2), ZW_norm(:,3),'--b');
title('Force Vs Displacement Machine','Color','b');
ylabel('Force [N]','Color','r');
xlabel('Displacement Machine [mm]','Color','r');grid;
```

```

%Plot Sigma-Spostamento traversa, con Sigma calcolata
sull'area
Eps_machine=ZW_norm(:,2)./M_Prov;
subplot(2,2,2)
plot(Eps_machine, Sig_Nominal(:,3),'--b');
title('Sigma Vs Displacement Machine','Color','b');
ylabel('Sigma [MPa]','Color','r');
xlabel('Eps Machine','Color','r');grid;

%Salva in formato testo la curve macchina Azzerati
save ZW_norm.txtZW_norm-ASCII;

%Salva in formato testo la curva spostamento traversa e
sigma
save Sig_Nominal.txtSig_Nominal-ASCII;

%Calcolo Differenza temporale per la sincronizzazione
deltaT = -timeBreak_CAM + timeBreak_ZW;

%Analisi Dimensioni Verticali
%Calcolo della deformazione sulla dim. verticale
LV = [ (0:1:size(lv,1)-1)' lv];
LV(1,1)=deltaT;

for i=2:size(LV(:,1))

    LV(i,1)=LV((i-1),1)+(1/hz);

end

LV_eps = [(LV(:,1)) ((LV(:,2)-LV(1,2))/LV(1,2))];

%Interpolazione per la ricerca del tempo ad asse comune
LV_eps_norm = interp1(LV_eps(:,1), LV_eps(:,2),
ZW_norm(:,1), 'spline');

%Assemblaggio matrici per esport della curva Eps-Sigm ed
azzeramento del carico dovuto all'eventuale alzata delle
basette Curva Sigm-Eps sincronizzata longit.
Sig_Eps_V=[LV_eps_norm (ZW_norm(:,3)/(L_Prov*S_Prov))];

%Plot Sigm-Eps longitude.
subplot(2,2,[3 4])
plot(Sig_Eps_V(:,1),Sig_Eps_V(:,2),'--b')
title('Sigma Vs Eps Longitudinal','Color','b');
ylabel('Sigma [MPa]','Color','r');
Xlabel('Eps Longitudinal','Color','r');grid;
legend('CCD');

```



```

%Confronto ZW/CCD
figure
subplot(2,1,1)
plot(Eps_machine, Sig_Nominal(:,3), '--b');
title('Sigma Vs Eps Machine', 'Color', 'b');
ylabel('Sigma [MPa]', 'Color', 'r');
xlabel('Eps Machine', 'Color', 'r');grid;
legend('ZW');

subplot(2,1,2)
plot(Sig_Eps_V(:,1), Sig_Eps_V(:,2), '--r');
title('Sigma Vs Eps CCD', 'Color', 'b');
ylabel('Sigma [MPa]', 'Color', 'r');
xlabel('Eps CCD', 'Color', 'r');grid;
legend('CCD');

%Calcolo Lambda
L1=LV_eps(:,2)+1;
L2=1./sqrt(L1);
L3=L2;
%Calcolo della sezione Vera
L_Prov_True=L_Prov+(L2-1);%Larghezza vera
S_Prov_True=S_Prov+(L3-1);%Spessore vero calcolato con
l'invariante
A_True=L_Prov_True.*S_Prov_True;

%Salvataggio del file Eps-Sigm per i diametri

save Sig_Eps_V_Planare.txtSig_Eps_V-ASCII

```

## synchro\_biax.m

```
clc;clear;
sprintf('%s', 'Test Bi-Axial')
sprintf('%s', 'Replace Dot with a Comma')

index=str2num(input...
    ('frame breakin (CCD): ', 's'));
hz=str2num(input...
    ('Freq. frame aquisition (CCD): ', 's'));
Diametro=str2num(input...
    ('Diameter? D0-to-D5: ', 's'));
L_Prov=str2num(input...
    ('Dimension trasversal speciment for Sigma [mm]: ', 's'));

%Individuazione della colonna sul foglio di Output del
Vision Builder
Diametro=Diametro+2;

%Calcolo del tempo da associare ad ogni immagine
timeBreak_CAM = index/hz;

%Load file in formato testo
[a,b]=uigetfile('*.txt', 'Load file Orizzontal
Displacement');
[c,d]=uigetfile('*.txt', 'Load file Vertical Displacement');
[e,f]=uigetfile('*.txt', 'Load file Test Machine');

lo = importdata(a, '\t', 5);
lv = importdata(c, '\t', 5);
ZW = importdata(e, ';', 1);

ZW = ZW.data;

%Azzeramento dei valori alla traversa e del carico
ZW(:, 2) = ZW(:, 2) - ZW(1, 2);
ZW(:, 3) = ZW(:, 3) - ZW(1, 3);
ZW_norm = ZW;
ZW_norm(:,3) = ZW_norm(:,3) .* (sqrt(2)/4);

[maxF, maxI] = max(ZW(:, 3));

%individuazione del tempo di rottura macchina di prova
timeBreak_ZW = ZW(maxI, 1);

%Azzeramento dei carichi e spostamenti della macchina di
prova
ZW_norm = ZW_norm(1:maxI, :);
Sig_Norm=[ZW_norm(:,1) ZW_norm(:,2)
    ((ZW_norm(:,3)/L_Prov))];

%Plot carico-spostamento della macchina di prova
subplot(2,2,1)
plot(ZW_norm(:,2), ZW_norm(:,3), '--b');
title('Force Vs Displacement Machine', 'Color', 'b');
```

```

ylabel('Force[N]', 'Color', 'r');
xlabel('Displacement Machine[mm]', 'Color', 'r');grid;

%Plot Sigma-Spostamento traversa, con Sigma calcolata sulla
lunghezza trasversale a 45 gradi
subplot(2,2,2)
plot(Sig_Norm(:,2), Sig_Norm(:,3), '--b');
title('Sigma Vs Displacement Machine', 'Color', 'b');
ylabel('Sigma[MPa]', 'Color', 'r');
xlabel('Displacement Machine[mm]', 'Color', 'r');grid;

%Salva in formato testo la curva macchina Azzerati
save ZW_norm.txtZW_norm-ASCII;

%Salva in formato testo la curva spostamento traversa e
sigma
save Sig_norm.txtSig_Norm-ASCII;

%Calcolo Differenza temporale per la sincronizzazione
deltaT = -timeBreak_CAM + timeBreak_ZW;

%Analisi Diametri Orizz.-Calcolo della deformazione sul
diametro Verticale
LV = [ (0:1:size(lv.data,1)-1)' lv.data ];
LV(:, 1) = LV(:, 1) ./hz;
LV(1,1)=deltaT;

for i=2:size(LV(:,1))

    LV(i,1)=LV((i-1),1)+(1/hz);

end

LV_eps = [(LV(:,1)) ((LV(:,Diametro)-
LV(1,Diametro))/LV(1,Diametro))];

%Analisi Lembi Verticali-Calcolo della deformazione al
diametro Orizzontale
LO = [ (0:1:size(lo.data,1)-1)' lo.data ];
LO(:, 1) = LO((i-1), 1) ./hz;
LO(1,1)=deltaT;

for i=2:size(LO(:,1))

    LO(i,1)=LO((i-1),1)+(1/hz);

end

LO_eps = [(LO(:,1)) ((LO(:,Diametro)-
LO(1,Diametro))/LO(1,Diametro))];

%Interpolazione per la ricerca del tempo ad asse comune
LO_sig_norm=interp1(Sig_Norm(:,1),
Sig_Norm(:,3),LO_eps(:,1), 'linear');

LV_sig_norm=interp1(Sig_Norm(:,1),

```

```

Sig_Norm(:,3),LV_eps(:,1),'linear');

%Assemblaggio matrici per esportazione della curva Eps -
%Sigma ed azzeramento del carico dovuto all'eventuale
%all'alzata delle basette
Sig_Eps_O=[LO_sig_norm LO_eps(:,2)];
Sig_Eps_V=[LV_sig_norm LV_eps(:,2)];

%Plot Sigm-Eps sincronizzato sul diametro orizzontale
selezionato
subplot(2,2,3)
plot(Sig_Eps_O(:,2),Sig_Eps_O(:,1),'--b')
title('Sigma Vs Eps Orizz. Diameter','Color','b');
ylabel('Sigma[MPa]','Color','r');
xlabel('Eps Orizz. Diameter','Color','r');grid;

%Plot Sigm-Eps sincronizzato sul diametro verticale
selezionato
subplot(2,2,4)
plot(Sig_Eps_V(:,2),Sig_Eps_V(:,1),'--b')
title('Sigma Vs Eps Vert. Diameter','Color','b');
ylabel('Sigma[MPa]','Color','r');
Xlabel('Eps Vertical Diameter','Color','r');grid;

%Salvataggio dei file Eps-Sigm per i diametri
nome_O = strcat('Sig_Eps_O_Bi_Ax', num2str(Diametro-2),
'.txt');
nome_V = strcat('Sig_Eps_V_Bi_Ax', num2str(Diametro-2),
'.txt');

save nome_OSig_Eps_O-ASCII
save nome_VSig_Eps_V-ASCII

%Controllo dei diametri ortogonali
%plott. confronto delle deformazione
Max_Sig_Eps_O=max(Sig_Eps_O(:,2));
Max_Sig_Eps_V=max(Sig_Eps_V(:,2));

ret_x=[0,0.01,1];
ret_y=[0,0.01,1];
[aa bb]=size(Sig_Eps_O);
[cc dd]=size(Sig_Eps_V);
if aa>cc

figure
subplot(2,1,1)
hold on
plot(Sig_Eps_O(1:cc,2),Sig_Eps_V(:,2),'ob')
plot(ret_x,ret_y,'--g');
title('Eps Orizz Diameter Vs Eps Vertical
Diameter','Color','b');
xlabel('Eps ','Color','r');
ylabel('Sigma [MPa]','Color','r');
bestfit=legend('Best Fit');

else

figure

```

```

subplot(2,1,1)
hold on
plot(Sig_Eps_O(:,2),Sig_Eps_V(1:aa,2),'ob')
plot(ret_x,ret_y,'--g');
title('Eps Orizz Diameter Vs Eps Vertical
Diameter','Color','b');
xlabel('Eps ','Color','r');
ylabel('Sigma [MPa]','Color','r');
bestfit=legend('Best Fit');
end

subplot(2,1,2)
hold on
plot(Sig_Eps_V(:,2),Sig_Eps_V(:,1),'--b')
title('Sigma Vs Eps Vert./Orizz. Diameter','Color','b');
ylabel('Sigma[MPa]','Color','r');
Xlabel('Eps Vertical/Orizzontal
Diameter','Color','r');grid;

plot(Sig_Eps_O(:,2),Sig_Eps_O(:,1),'--b');
D_Vert=legend('D_V./D_O');

%Calcolo dei valori medi fra i due diametri
Sig_Eps_Mean=mean([Sig_Eps_V(:,2) Sig_Eps_O(:,2)]');
Sig_Eps_Mean=[Sig_Eps_Mean Sig_Eps_V(:,2)];
figure
plot(Sig_Eps_Mean(:,2),Sig_Eps_Mean(:,1));
title('Sigma Eps Mean');
ylabel('Sigma [MPa]','Color','r');
Xlabel('Eps Vertical/Orizzontal
Diameter','Color','r');grid;

save Sig_Eps_Mean.txtSig_Eps_Mean-ASCII

```

- [1] R. W. Ogden, *“Non linear elastic deformations”*, Dover Publication Inc., New York.
- [2] I. M. Ward, D. W. Hadley, *“Mechanical properties of solid polymers”*, John Wiley & Sons, Ltd.
- [3] S. Timoshenko and J. N. Goodier, *“Theory of Elasticity”*, McGraw – Hill, New York.
- [4] L. R. G. Treloar, *“The physics of rubber elasticity”*, Third Edition, Clarendon – Oxford, 1975.
- [5] M. C. Boyce, E. M. Arruda, *“Constitutive model for rubber”*, I. J. of Rubber Chemistry & Technology, Vol. 33, pp. 504 – 523.
- [6] I. M. Ward, J. Sweeney, *“The mechanical properties of solid polymers”*, John Wiley & Sons, Ltd.
- [7] A. Grillo, G. Zinali, D. Borrello, G. Giaquinta, *“Transport Phenomena in living continuum physics”*, Rivista nuovo cimento, Società italiana di fisica, Vol. 30-N. 11, 2007.
- [8] W. M. Lai, D. Rubin, E. Krempl, *“Introduction to continuum mechanics”*, Third Edition, Butterworth Heinemann, 1993.
- [9] V. Moretti, *“Introduzione alla meccanica dei continui”*, Dispense Uni – Tn., 2009 – 2010.
- [10] P. A. L. S. Martins, R. M. Natal Jorge, A. J. M. Ferreira, *“A comparative study and several material Models for prediction of hyperelastic properties: Application to silicone – rubber and soft tissues”*, Strain, Blackwell Publishing Ltd., Vol.42, pp.135 – 147.
- [11] Xiamei Jiang, *“On deformation of compressible hyperelastic material”*, Ph.D. Thesis, University of Glasgow, 1998.
- [12] O. L. Pamies, *“A new  $I_1$  base hyperelastic model for rubber elastic material”*, C. R. Mecanique, Elsevier, Vol. 338, pp.3 – 11, 2011.
- [13] E. D. George, JR., G. A. Haduch, S. Jordan, *“The integration of analysis and testing for the simulation of the response of hyperelastic material”*, Finite Elements, Analysis and Design, Vol. 4, pp. 19 – 42.
- [14] M. H. Hamza, H. M. Alwan, *“Hyperelastic constitutive modeling of rubber and rubber – like material”*, Eng. & Tech. Journal, Vol. 28, N. 13, 2010.
- [15] K. Kajiwara, Y. Kameda, Y. Ikeda, H. Urakawa, *“Biaxial tensile behavior of rubber vulcanizates: Silica and Gum Stocks”*, Fall Rubber Division, ACS, Meeting, Cleveland, October 16 – 19, Paper 89, 2003.
- [16] M. M. Attard, G. W. Hunt, *“Hyperelastic constitutive modeling under finite strain”*, I. J. of Solid and Structures, Elsevier, Vol. 41, pp. 5327 – 5350, 2004.
- [17] F. Laraba - Abbes, P. Ienny, r. Piques, *“A new ‘Tailor – made’ methodology for the mechanical behavior analysis of rubber – like material: Application to the hyperelastic behavior characterization of a carbon – black filled natural rubber vulcanizate”*, Polymer, Elsevier, Vol. 44, pp. 821 – 840.

- [18] M. F. Beatty, S. Krishnaswamy, "A theory of stress-softening in incompressible isotropic materials", I. J. of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier, Vol. 48, pp. 1931 – 1965, 2000.
- [19] E. H. Twizell, R. W. Ogden, "Non – liner optimization of the material constant in Ogden's stress – deformation function for incompressible isotropic elastic material", I. J. Austral. Math. Soc. Ser. Vol. 24, pp. 424 – 434.
- [20] A. F. M. S. Amin, S. I. Wiraguna, A. R. Bhuiyan, Y. Okui, "Hyperelastic model for finite element analysis of natural and high damping rubber in compression and hear", I. J. of Engineering Mechanics, Vol. 132, pp. 54 -64.
- [21] J. S. Bergstrom, M. C. Boyce, "Constitutive modeling of the large strain time – dependent behavior of elastomers", I. J. of the Mechanics and Physics of Solid, Elsevier, Vol. 36, pp. 931 – 954, 1998.
- [22] L. Jiang, J. B. Haddow, "A finite element formulation for finite static axisymmetric deformation of hyperelastic membranes", I. J. Computers & Structures, Vol. 57, pp. 401 – 405, 1995.
- [23] R. Wangkiet, S. Sucharitpwatskul, C. Sirisinha, C. Deeprasertkul, P. Sae – Oui, " Characterization of material constant based on synthetic biaxial data", Science Asia, Vol. 34, pp. 395 – 399.
- [24] C. O. Hogan, G. Saccomandi, "Constitutive models for compressible nonlinearly elastic materials with limiting chain extensibility", I. J. of Elasticity, Vol. 77, pp. 123 – 138, 2004.
- [25] R. W. Ogden, G. Saccomandi, I. Sgura, "Fitting hyperelastic models to experimental data", Computational Mechanics, Springer, 2004.
- [26] T. Kastes, I. Sack, A. Samani, "Measurement of the hyperelastic properties of ex vivo brain tissue slice", I. J. of Biomechanics, Elsevier, Vol. 44, pp. 1158 – 1163, 2011
- [27] A. Bojtos, G. Abraham, "Optical measument system for equibiaxial test of hyperelastic rubber – like material", 9<sup>th</sup> Youth Symposium on Experimental Solid Mechanism, Trieste, Italy, pp. 170 – 173, 2010.
- [28] B. C. Duncan, A. S. Maxwell, L. E. Crocker, R. Hunt, "Verification of hyperelastic test methods", NLP Report BMMT 226, 1999.
- [29] A. Smits, D. Van Hemelrijck, T. P. Philippidis, A. Cardon, "Design of a cruciform specimen for biaxial testing of fibre reinforced composite laminates", I. J. Composites sciences and Technology, Elsevier, Vol. 66, pp. 964 – 975.
- [30] N. Bhatnagar, R. Bhardwaj, P. Selvakumar, M. Brieu, "Development of a biaxial tensile test fixture for reinforced thermoplastic composites", I. J. Polymer Testing, Elsevier, Vol. 26, pp. 154 – 161, 2007.
- [31] L. Chevalier, Y. Marco, "Tools for multiaxial validation of behavior laws chosen for modeling hyper – elasticity of rubber – like materias", Polymer Engineering & Science, Wiley, Vol. 42, Issue 2, pp. 280 – 298, 2002.
- [32] P. Meier, S. Khader, R. Preuß, J. Dietrich, D. Voges, "Uniaxial and equi – biaxial tension tests of silicone elastomer", Constitutive models for rubber III, Proceedings, A. A. Balkema, 2003.
- [33] Msc, "Experimental Elastomer Analysis", MAR 103, 2005.
- [34] Msc, "Nonlinear finite element Analysis of Elastomers", Whitepaper.

- [35] A. M. Kucherskii, *"New characteristic of tensile stress – strain properties in rubbers"*, I. J. of Polymer Testing, Elsevier, Vol. 22, pp. 503 – 507, 2003.
- [36] Numerical modeling and biaxial tests for the Mullins effect in rubber, 6<sup>th</sup> European LS – Dyna Users' Conference.
- [37] G. Palmieri, M. Rossi, G. Chiappini, M. Sasso, *"Caratterizzazione di elastomeri attraverso l'applicazione della tecnica di correlazione digitale di immagini su prove di tensione planare"*, XXXVII Convegno AIAS, Roma, 2008.
- [38] M. Sasso, G. Palmieri, G. Chiappini, D. Amodio, *"Procedura inversa per l'identificazione dei parametri iperelastici attraverso prove in stato piano di tensione"*, XXXIX Convegno AIAS, Maratea, 2010.
- [39] M. Sasso, G. Palmieri, G. Chiappini, *"Sistema ottico di rilievo delle deformazioni per prove di tensione equibiassiale su elastomeri"*, XXXVI Convegno AIAS, Napoli, 2007.
- [40] M.Sasso, G. Palmieri, G. Chiappini, D. Amodio, *"Characterization of hyperelastic rubber-like stretching based on optical methods"*, I. J. of Polymer Testing, Elsevier, Vol. 27, pp. 995 – 1004.
- [41] NI Vision Builder for Automated Inspection Tutorial-National Instruments.
- [42] Ansys, Hyperelastic Curve Fitting,
- [43] ASTM D412/D695.
- [44] M. Brieu, J. Diani, N. Bhatnagar, *"A new fixture for uniaxial testing machine –A validation for hyperelastic behavior rubber – like materials"*, I. J. of Testing and Evaluation, Vol. 35,N. 4.
- [45] Ansys, User guide