

GIUSEPPE TOMMASO DI VENTI

MODELLAZIONE NUMERICA DELLA NASCITA E
DELLO SVILUPPO DI INTERFACCE MEDIANTE IL
METODO DELLE DISCONTINUITÀ FORTI
INTRAELEMENTO

Tesi per il conseguimento del titolo di Dottore di Ricerca



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
DOTTORATO DI RICERCA IN INGEGNERIA DELLE STRUTTURE
XXIII ciclo

10 Dicembre 2011

Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Strutture
XXIII Ciclo
Università degli Studi di Catania
Facoltà di Ingegneria
Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale
Viale Andrea Doria, 6
95125 Catania

Il tutor

Prof. Ing. Loredana Contrafatto

Il Coordinatore

Prof. Ing. Giuseppe Oliveto

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUZIONE | 1 |
| 1.1 | Scale dimensionali | 2 |
| 1.2 | Comportamento dei materiali | 4 |
| 1.3 | Approcci classici | 5 |
| 1.3.1 | Meccanica della frattura lineare elastica | 5 |
| 1.3.2 | Approccio con fratture discrete | 9 |
| 1.3.3 | Approccio al continuo con fratture distribuite | 10 |
| 1.3.4 | Approcci con continuo arricchito | 13 |
| 1.4 | Approccio SDA | 13 |
| 1.4.1 | Classificazione delle interfacce con discontinuità forti | 15 |
| 1.5 | Obiettivi della tesi | 16 |
| 2 | Problema solido SDA | 17 |
| 2.1 | Notazione | 17 |
| 2.2 | Cinematica | 21 |
| 2.3 | Modello costitutivo | 22 |
| 2.3.1 | Comportamento reversibile del continuo | 24 |
| 2.3.2 | Comportamento irreversibile del continuo | 26 |
| 2.3.3 | Comportamento reversibile dell'interfaccia | 32 |
| 2.3.4 | Comportamento irreversibile dell'interfaccia | 33 |
| 2.4 | Formulazione variazionale | 36 |
| 2.4.1 | Funzionale di Hellinger-Reissner | 40 |
| 2.4.2 | Regolarizzazione | 41 |
| 2.5 | Un semplice esempio | 44 |
| 3 | IMPLEMENTAZIONE FEM | 51 |
| 3.1 | Formulazione incrementale | 51 |
| 3.2 | Cinematica | 53 |
| 3.3 | Funzioni di forma | 54 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.3.1 | Salto costante | 58 |
| 3.3.2 | Salto lineare | 60 |
| 3.4 | Formulazione variazionale FEM | 62 |
| 3.5 | Strategia di soluzione | 67 |
| 3.5.1 | Soluzione delle equazioni costitutive | 67 |
| 3.5.2 | Soluzione delle equazioni di equilibrio | 73 |
| 3.5.3 | Integrazione delle matrici di rigidezza | 75 |
| 3.5.4 | Algoritmo di soluzione | 83 |
| 3.6 | Continuo elastico e interfaccia dissipativa | 85 |
| 3.7 | Bilancio energetico | 87 |
| 4 | APPLICAZIONI NUMERICHE | 89 |
| 4.1 | Elemento teso | 91 |
| 4.1.1 | Distribuzione di spostamenti costante | 91 |
| 4.1.2 | Distribuzione di spostamenti lineare | 94 |
| 4.2 | Lastra tesa | 97 |
| 4.2.1 | Distribuzione di spostamenti costante | 100 |
| 4.2.2 | Distribuzione di spostamenti lineare | 100 |
| 4.3 | Lastra con intaglio | 106 |
| 4.4 | Trave con intaglio | 106 |
| 4.5 | Conclusioni | 110 |

Elenco delle figure

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Rottura fragile di navi liberty. (a) la nave commerciale SS Schenectady, (b) particolare. | 1 |
| 1.2 | Diga del Gleno: (a) prima del collasso e (b) dopo il collasso. | 2 |
| 1.3 | Modellazione FEM: (a) di un femore. (b) di un tratto di arteria. | 3 |
| 1.4 | Scale dimensionali [50] | 3 |
| 1.5 | Comportamento di solidi con zone di localizzazione | 4 |
| 1.6 | (a) Frattura in calcestruzzo. (b) Bande di taglio in provino di acciaio. | 5 |
| 1.7 | Superfici di scorrimento nei terreni: (a) muro di sostegno, (b) pendio naturale e (c) fondazione superficiale. | 6 |
| 1.8 | Concetrazione delle tensioni sul bordo di fori e difetti. | 8 |
| 1.9 | Modi fondamentali di frattura | 9 |
| 1.10 | Modello di frattura coesiva | 10 |
| 1.11 | Confronto tra approccio discreto ed approccio al continuo | 11 |
| 1.12 | Spostamento e deformazione: (a) frattura diffusa, (b) discontinuità debole e (c) discontinuità forte | 14 |
| 2.1 | Solido attraversato da un'interfaccia: (a) e (b) interna, (c) e (d) con un estremo sulla frontiera. | 21 |
| 2.2 | Campo degli spostamenti all'interno della regione Ω_φ | 22 |
| 2.3 | Potenziale elastico e potenziale complementare legati attraverso la Trasformata di Legendre. | 25 |
| 2.4 | Esempio di coni delle normali all'insieme convesso K | 29 |
| 2.5 | (a) Lastra tesa, (b) legge trazione separazione, (c) spostamento longitudinale, (d) tensione normale σ_y , (e) salto e (f) spostamento trasversale. | 46 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.6 | Configurazione indeformata (tratteggio arancio) a confronto con configurazioni deformate: (a) all'innesco (tratteggio magenta), (b) durante l'apertura e (c) alla completa apertura dell'interfaccia. | 49 |
| 3.1 | Discretizzazione della geometrica: elementi integri ed attraversati dall'interfaccia. | 53 |
| 3.2 | Funzioni di forma singolari per interpolazione del salto: (a) costante; (b) e (c) lineare. | 55 |
| 3.3 | Derivate delle funzioni di forma singolari per interpolazione del salto: (a) e (b) costante; (c) e (d) lineare. | 56 |
| 3.4 | Funzioni di forma singolari per interpolazione del salto: (a) e (b) costante; (c) e (d) lineare. | 57 |
| 3.5 | Moto rigido: (a) salto costante e (b) salto lineare. | 59 |
| 3.6 | Funzioni di forma singolari (a) caso 1, (b) caso 2, (c) caso 3, (d) caso 4, (e) caso 5 e (f) caso 6. | 61 |
| 3.7 | Funzioni di forma singolari. | 63 |
| 3.8 | Punti di Gauss dei sottodomini $\Omega_{\varphi_i}^+$ e $\Omega_{\varphi_i}^-$ (a) e dell'interfaccia S per interpolazione del salto: (b) costante; (c) lineare. | 69 |
| 3.9 | Elemento finito integro: trasformazione tra elemento master in coordinate intrinseche e elemento in coordinate geometriche. | 76 |
| 3.10 | Ordine di integrazione e ubicazione dei punti di Gauss per elementi lineari e quadratici. | 77 |
| 3.11 | Elemento finito attraversato: trasformazione tra elemento master ed elemento in coordinate geometriche. (a) sottodomini quadrangolari e (b) sottodomini triangolari. | 79 |
| 3.12 | Discretizzazione della geometrica: elementi integri ed attraversati dall'interfaccia. | 80 |
| 3.13 | Intefaccia: trasformazione tra elemento master ed elemento in coordinate geometriche. | 81 |
| 3.14 | Ordine di integrazione e ubicazione dei punti di Gauss dell'interfaccia. | 82 |
| 3.15 | Non convergenza dell'algoritmo di soluzione a controllo di carico. | 83 |
| 3.16 | Schematizzazione dell'algoritmo di soluzione. | 84 |
| 3.17 | Schematizzazione dell'algoritmo di soluzione. | 87 |
| 4.1 | (a) Fase di generazione della mesh con il programma ADINA; (b) esecuzione del codice FracSDA8. | 90 |

| | | |
|------|---|-----|
| 4.2 | Legame costitutivo dell'interfaccia con softening: (a) lineare e bilineare. | 90 |
| 4.3 | Elemento teso | 91 |
| 4.4 | (a) Curva carico spostamento. (b) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde). | 92 |
| 4.5 | Spostamento direzione Y. Istanti: (a) 12, (b) 32 e (c) 94. . . | 93 |
| 4.6 | (a) Curva carico spostamento. (b) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde). | 94 |
| 4.7 | Elemento teso inflesso. | 95 |
| 4.8 | (a) Curva carico spostamento. (b) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde). | 95 |
| 4.9 | Spostamento direzione Y. Istanti: (a) 22, (b) 32 e (c) 37. . . | 96 |
| 4.10 | (a) Curva carico spostamento. (b) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde). | 97 |
| 4.11 | Spostamento direzione Y. Istanti: (a) 22, (b) 32 e (c) 37. . . | 98 |
| 4.12 | Lastra tesa. Distribuzione costante | 99 |
| 4.13 | (a) Curva carico spostamento. (b) Spostamento trasversale. (c) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde). | 101 |
| 4.14 | Spostamento direzione Y. Istanti: (a) 12, (b) 182, (c) 222 e (d) 1004. | 102 |
| 4.15 | Lastra tesa. Distribuzione lineare | 103 |
| 4.16 | (a) Curva carico spostamento. (b) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde). | 104 |
| 4.17 | (a) Curva carico spostamento. (b) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde). | 104 |
| 4.18 | Deformata della lastra. Istanti: (a) 152, (b) 162, (c) 172, (d) 182, (e) 192 e (e) 222. | 105 |
| 4.19 | Tre diverse discretizzazioni del problema. | 107 |
| 4.20 | Configurazione deformata a diversi istanti di tempo. . . | 108 |
| 4.21 | Curve carico spostamento relative alle tre discretizzazioni. | 109 |
| 4.22 | Mesh utilizzata per discretizzare la prova di flessione su tre punti. | 110 |

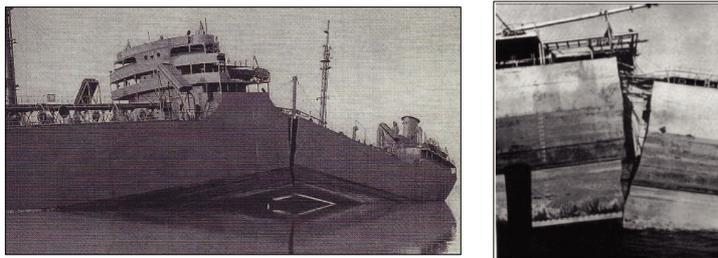
| | | |
|------|--|-----|
| 4.23 | (a) Curva carico spostamento. (b) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde). | 111 |
| 4.24 | Configurazione deformata a diversi istanti di tempo. | 112 |

Capitolo 1

INTRODUZIONE

L'interesse verso i processi di frattura e di collasso delle strutture è stato stimolato fin dall'inizio del '900 da fatti dai risvolti sociali a volte drammatici. Si pensi alle navi liberty costruite nei primi decenni del secolo scorso (Figure 1.1(a) e 1.1(b)), o alle navi da guerra impiegate nei due conflitti mondiali, colate a picco a causa di meccanismi di frattura rilevati sull'acciaio costituente le diverse parti strutturali.

Navi



(a)

(b)

Figura 1.1: Rottura fragile di navi liberty. (a) la nave commerciale SS Schenectady, (b) particolare.

Un altro esempio è costituito dalle dighe in calcestruzzo, spesso interessate dallo sviluppo di fessure che potrebbero pregiudicare la funzionalità dell'opera, con conseguenti problemi di siccità, o provocarne il collasso, come nel caso della diga del Gleno in Lombardia (Figure

Dighe in calcestruzzo

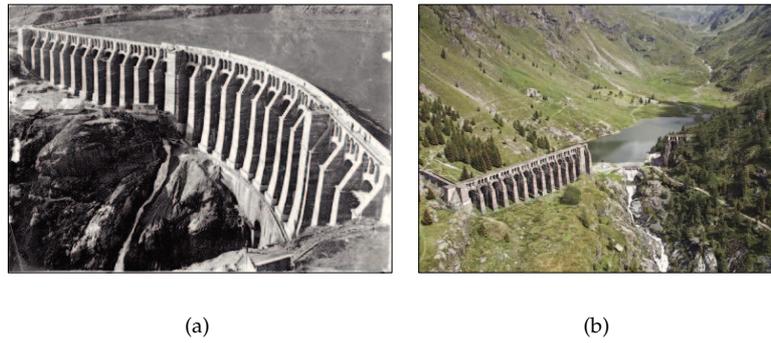


Figura 1.2: Diga del Gleno: (a) prima del collasso e (b) dopo il collasso.

1.2(a) e 1.2(b)).

Ulteriori stimoli arrivano dall'industria e dall'edilizia per lo sviluppo di nuovi materiali, componenti ed elementi strutturali, al fine di accrescere resistenza e durabilità.

*Ingegneria
biomedica*

Altri quesiti sono posti dall'ingegneria biomedica. Un problema tipicamente studiato è l'osteoporosi, fenomeno che consiste nella progressiva perdita di massa ossea con conseguente rischio di frattura dell'osso. In Figura 1.3(a) è riportato una modellazione numerica della testa di un femore. Al fine di evitare tale eventualità è necessario valutare con adeguata accuratezza la resistenza dell'osso e la sua propensione a fratturarsi. Un altro problema studiato è la frattura ed il danneggiamento delle arterie (Figura 1.3(b)) a causa di azioni esterne (come l'angioplastica) o a processi di fatica spontanei dovuti alla pressione del sangue [17].

1.1 Scale dimensionali del problema

Lo studio di tali fenomeni può essere effettuato a diverse scale dimensionali, che vanno dalla lettura del processo a livello atomistico fino all'interpretazione macroscopica dello stesso (Figura 1.4).

In macro meccanica si identifica il componente di riferimento come un mezzo omogeneo; l'approccio micro meccanico descrive invece il comportamento macroscopico di un materiale a partire dalla sua microstruttura, ovvero in base alle proprietà meccaniche dei componenti ed alla distribuzione delle singole fasi presenti attraverso una omo-

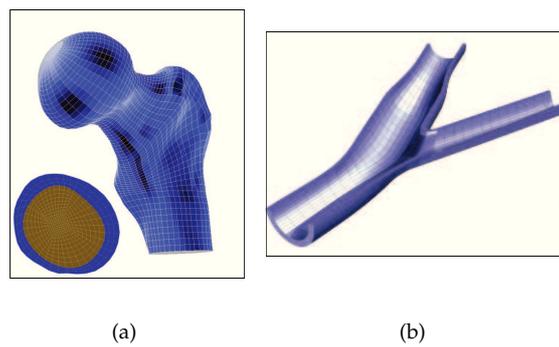


Figura 1.3: Modellazione FEM: (a) di un femore. (b) di un tratto di arteria.

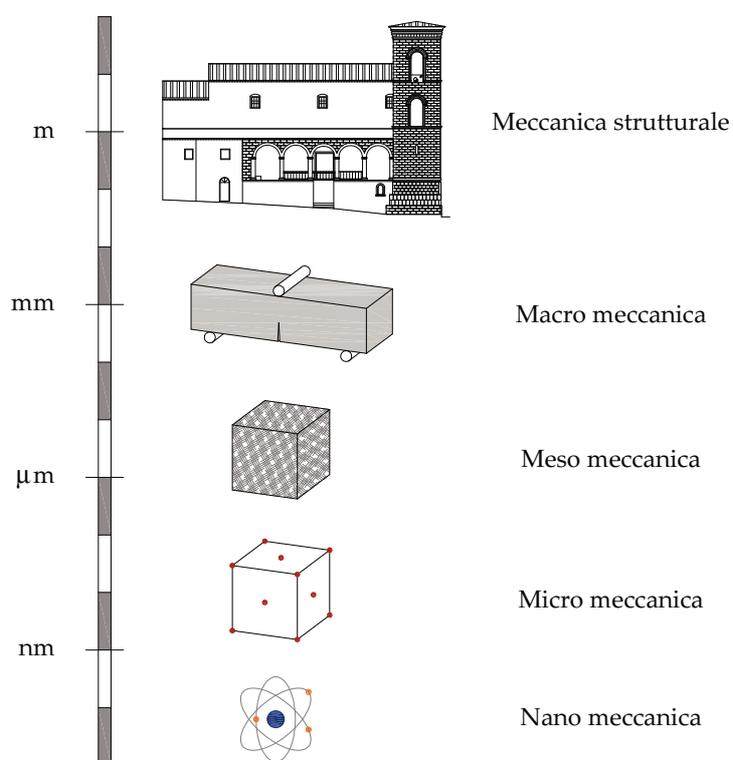


Figura 1.4: Scale dimensionali [50]

geneizzazione. L'approccio meso meccanico si colloca in via intermedia considerando ad esempio l'interazione tra una matrice composita interpretata come un omogeneo e particelle o aggregati di particelle. In nano meccanica si considerano i processi che avvengono a livello atomistico e molecolare.

Nella presente tesi si focalizzerà l'attenzione sullo studio del comportamento dei materiali a livello macroscopico.

1.2 Comportamento macroscopico dei materiali

Gli esperimenti condotti da von Karmàn nei primi decenni del XX secolo mostrarono che dei campioni di roccia sottoposti a pressione idrostatica esibivano deformazioni plastiche, caratterizzate da bande di taglio. Successivamente lo stesso effetto fu osservato in altri materiali quali il calcestruzzo, le ceramiche, la sabbia, il terreno, i metalli e così via. Si osserva una zona con concentrazione di deformazioni

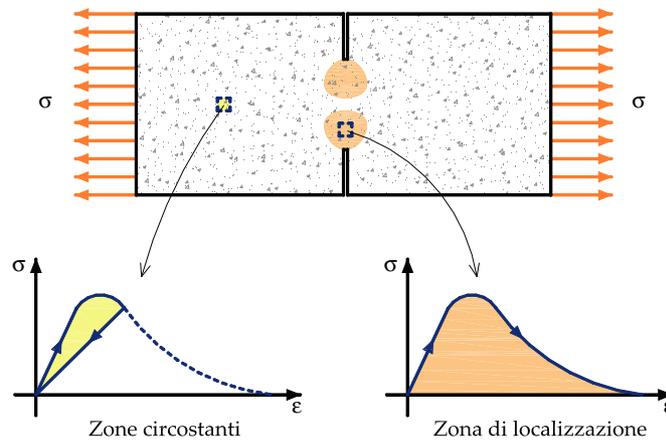


Figura 1.5: Comportamento di solidi con zone di localizzazione

inelastiche in una banda ristretta, chiamata zona di *localizzazione*, mentre le zone circostanti si scaricano (Figura 1.5). Il fenomeno della localizzazione è causato dalla presenza di vuoti, microfratture ed imperfezioni a livello microscopico; a livello macroscopico vengono osservati fratture nelle rocce o nel calcestruzzo (Figura 1.6(a)), bande di taglio nei

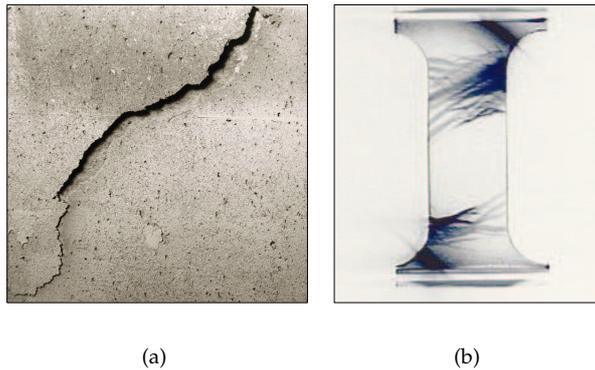


Figura 1.6: (a) Frattura in calcestruzzo. (b) Bande di taglio in provino di acciaio.

metalli (Figura 1.6(b)) e superfici di scorrimento nei terreni (Figura 1.7).

Dal punto di vista della modellazione macroscopica, la localizzazione può essere interpretata come un fenomeno di instabilità materiale (biforcazione materiale). L'innesco della localizzazione corrisponde ad una condizione di instabilità del legame costitutivo che descrive le deformazioni inelastiche del materiale. Ulteriori dettagli possono essere rintracciati in [7] e [50].

1.3 Approcci classici per modellare i meccanismi di frattura

I due contesti maggiormente accreditati per modellare i meccanismi di frattura e di collasso dei materiali a livello macroscopico sono la Meccanica della Frattura e la Meccanica del Continuo.

1.3.1 Meccanica della frattura lineare elastica

I primi impulsi allo studio della meccanica della frattura vennero da parte di Kirsch, che nel 1898 studiò, nell'ambito della teoria dell'elasticità, la concentrazione di sforzo intorno ad un foro circolare praticato su una lastra di grandi dimensioni (Figura 1.8(a)). Nel 1913 Inglis estese i risultati ottenuti da Kirsch alla lastra con foro ellittico (Figura 1.8(b)). Per $a/b \rightarrow \infty$ il valore della tensione sul bordo del foro con asse maggiore

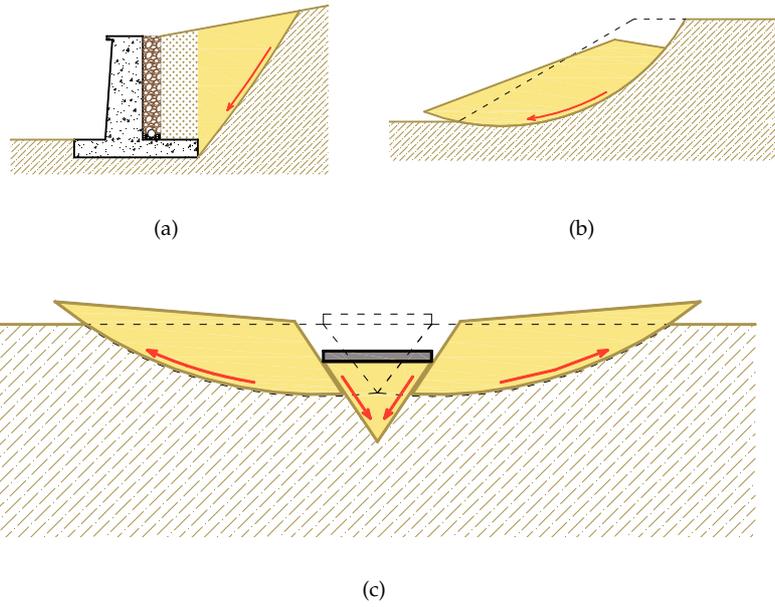


Figura 1.7: Superfici di scorrimento nei terreni: (a) muro di sostegno, (b) pendio naturale e (c) fondazione superficiale.

ortogonale alla forza esterna tende anch'esso all'infinito (Figura 1.8(c)). Pertanto sono sufficienti tensioni esterne molto piccole per superare la resistenza a trazione. Nella realtà tuttavia i solidi fessurati possono resistere anche a sollecitazioni considerevoli.

Successivamente, nel 1921, Griffith utilizzò i risultati ottenuti da Inglis per predire lo stato tensionale critico che causa la propagazione di fratture nel materiale [6]. Egli, al fine di superare le limitazioni del modello di Inglis, propose un criterio basato su considerazioni energetiche. In particolare suppose che, affinché una fessura preesistente di lunghezza $2a$ si propaghi, l'energia elastica rilasciata debba risultare maggiore o uguale a quella richiesta per estendere la fessura stessa:

$$\frac{dW_e}{da} \geq \frac{dW_s}{da}$$

dove

$$W_e = \pi a^2 \frac{\sigma^2}{E}$$

$$W_s = 2aG_f.$$

nella quale G_f è l'energia di frattura, ovvero l'energia necessaria per far aprire una frattura di area unitaria. La condizione di instabilità, perchè la fessura si propaghi, è perciò:

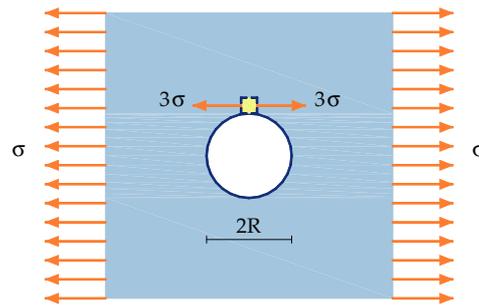
$$\sigma \geq \sqrt{\frac{G_f E}{\pi a}}$$

Il secondo membro dell'espressione precedente rappresenta la tensione di instabilità in funzione della semilunghezza della fessura. che per $a \rightarrow 0$, tende all'infinito. Tale risultato non è coerente con la supposta esistenza di una resistenza finita f_0 del materiale costituente la lastra. È possibile allora definire una lunghezza $2a_0$ della fessura, al di sotto della quale lo snervamento a trazione dell'intera lastra precede la propagazione instabile della fessura:

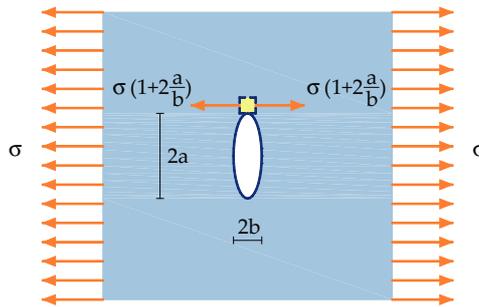
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \frac{G_f E}{f_0^2}. \quad (1.1)$$

La lunghezza $2a_0$ rappresenta la lunghezza equivalente delle microfessure e dei difetti, preesistenti nel materiale della lastra.

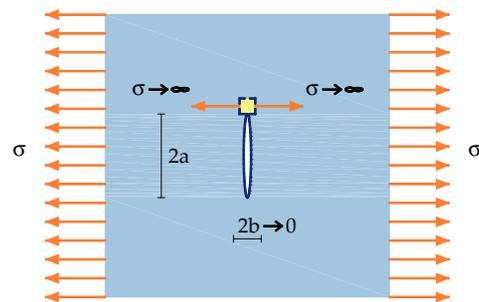
L'equazione (1.1) offre una spiegazione alle rotture fragili riscontrate nelle navi liberty discusse all'inizio del capitolo. Le dimensioni delle navi, infatti, sono di diversi ordini di grandezza superiore rispetto



(a)



(b)



(c)

Figura 1.8: Concentrazione delle tensioni sul bordo di fori e difetti.

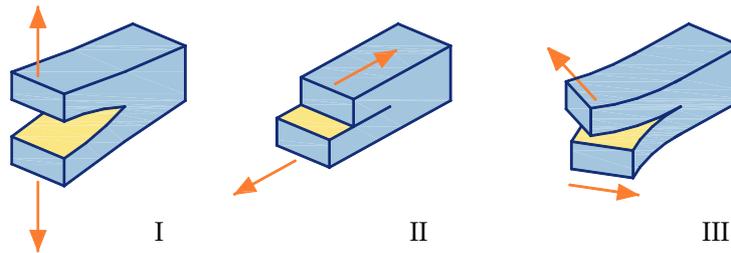


Figura 1.9: Modi fondamentali di frattura

alle dimensioni di un provino da laboratorio, che invece mostrano comportamento duttile e resistenze più alte.

Nella Figura 1.9 sono riportati i modi elementari di sollecitazione della fessura, definiti da Irwin nel 1957: Modo I (apertura), Modo II (scivolamento nel piano) e Modo III (strappo).

Successivamente, nel 1939, Westergaard individuò la potenza della singolarità che le tensioni presentano all'estremità della fessura, definendo il fattore di intensificazione degli sforzi. Egli estese tali risultati anche ai casi di Modo II, quei casi in cui la fessura subisce sollecitazioni antisimmetriche rispetto al proprio asse.

1.3.2 Approccio con fratture discrete

L'approccio con fratture discrete è basato sul modello di frattura coesiva. Il materiale viene caratterizzato da due coppie di leggi costitutive:

- una relazione tensione/deformazione per il continuo non danneggiato, solitamente elastica o elastoplastica con incrudimento positivo,
- ed una relazione tensione/apertura della frattura (Figura 1.10) con comportamento softening.

Dalla Figura 1.10 si evince che è possibile distinguere due zone: una, detta *zona coesiva*, danneggiata ma dove vengono trasmesse ancora tensioni da una parte all'altra della frattura ($w < w_{cr}$); l'altra dove è avvenuta la completa apertura ($w > w_{cr}$) e risulta perciò scarica.

L'area sottesa dalla curva definita dalla relazione tensione/apertura della frattura risulta pari all'energia di frattura G_f , che formalmente

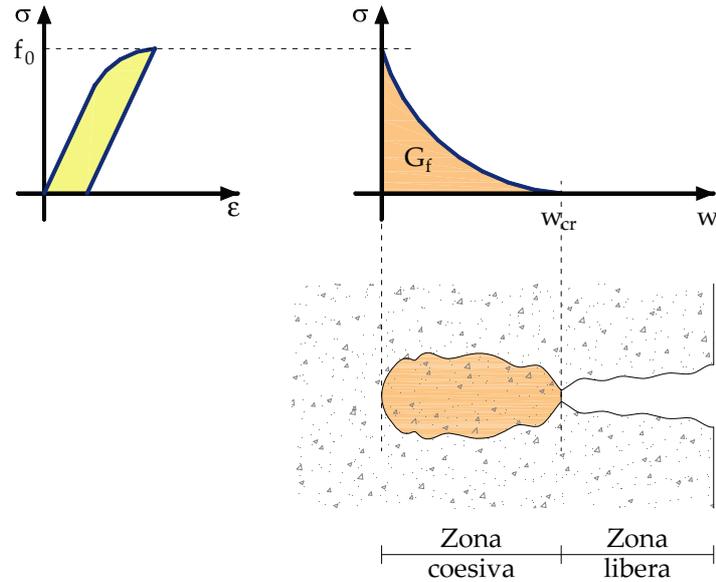


Figura 1.10: Modello di frattura coesiva

può essere definita

$$G_f = \int_0^{w_{cr}} \sigma dw \quad (1.2)$$

dove σ è la tensione normale trasmessa e w è l'apertura della frattura.

1.3.3 Approccio al continuo con fratture distribuite

Nei metodi al continuo con fratture distribuite (*Smearred crack approach*), proposto da Rashid nel 1968, si immaginano infinite fessure con apertura infinitamente piccola distribuite in tutto il corpo, considerato un mezzo continuo. Detto approccio si presta molto bene ad essere implementato nell'ambito del Metodo agli Elementi Finiti, poichè i comportamenti del continuo e delle fratture vengono trattati in maniera unica nel contesto della meccanica del continuo. Diversi i contributi in letteratura, tra i quali [33, 32, 51]

Tuttavia l'approccio al continuo con fratture distribuite non è scevro da problemi. L'elemento finito attraversato esibisce la completa perdita di rigidità in corrispondenza dell'innescio della frattura. Ciò provoca malcondizionamenti della matrice di rigidità globale del sistema che

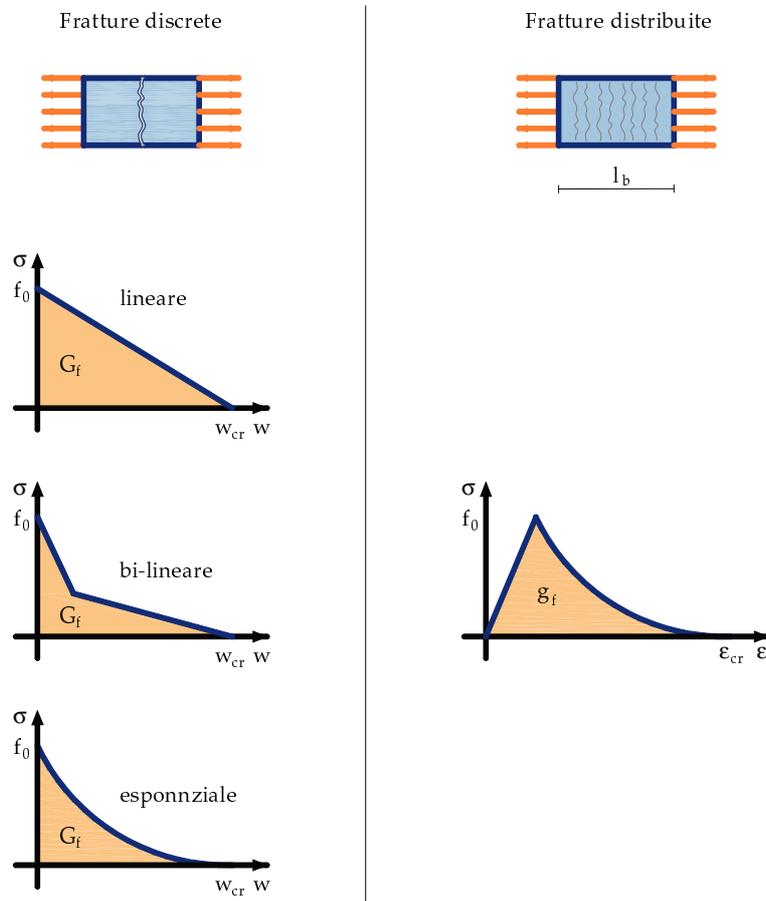


Figura 1.11: Confronto tra approccio discreto ed approccio al continuo

tende a diventare singolare. Inoltre, la necessità di utilizzare legami costitutivi *softening* per simulare il decremento delle tensioni all'aumentare delle deformazioni una volta superato il picco, rende la risposta del sistema dipendente dalla discretizzazione adottata per il dominio (*mesh dependency*).

Con riferimento al calcestruzzo, al giorno d'oggi vengono utilizzati due modelli basati sull'approccio al continuo con fratture distribuite: il modello con frattura fissa (*fixed-crack model*) e il modello con frattura rotante (*rotating-crack model*) [31]. Nel primo modello non appena la tensione principale di trazione accinge il valore di resistenza a trazione del calcestruzzo, la frattura si forma ortogonalmente alla corrispondente direzione principale mantenendo costante la propria direzione. Viceversa, il modello con frattura rotante prevede la possibilità che la direzione della frattura cambi durante il processo di carico. Il modello standard di frattura rotante, proposto da Cope nel 1980, è affetto da problemi di *stress locking*. Alcuni autori nell'intento di ridurre le tensioni spurie hanno usato il modello in combinazione con legami costitutivi con danno [20, 24, 23, 43, 41, 39].

Inoltre in [3] è mostrato che nei problemi di localizzazione l'energia dissipata da un mezzo continuo con comportamento *softening* è nulla, fenomeno che implica la non oggettività della risposta.

Al fine di superare tale difficoltà è stato sviluppato un modello, detto *Crack Band Model*, nell'ambito del quale si immagina di distribuire le fratture in una regione ristretta del corpo, chiamata banda di localizzazione. Detta ipotesi si trova in accordo con le osservazioni sperimentali descritte al paragrafo 1.2.

Al fine di definire il legame costitutivo del continuo, in questo modello l'energia di frattura definita dalla (1.2) viene distribuita nello spessore l_b della banda. Indicando con ε_b la deformazione normale alla direzione della frattura nella banda di localizzazione, l'apertura infinitesima è data dalla relazione:

$$dw = l_b d\varepsilon_b$$

che sostituita nella (1.2) la trasforma:

$$G_f = l_b \underbrace{\int_0^{\varepsilon_{cr}} \sigma d\varepsilon_b}_{g_f}.$$

La quantità g_f , energia per unità di volume, può essere espressa come

il rapporto tra l'energia di frattura e la larghezza della banda:

$$g_f = \frac{G_f}{l_b} \quad (1.3)$$

e rappresenta l'area sottesa dalla curva tensione/deformazione che definisce il legame costitutivo del continuo fratturato (Figura 1.11).

L'approccio al continuo con fratture distribuite può dare luogo ad una sovrastima delle tensioni tangenziali che si sviluppano in seno alla struttura, effetto noto con il nome di shear locking. Inoltre sono richieste discretizzazioni geometriche molto fitte al fine di cogliere gli spostamenti, che nella banda di localizzazione presentano brusche variazioni.

1.3.4 Approcci con continuo arricchito

I problemi formulati nel contesto della meccanica del continuo che coinvolgono materiali con comportamento softening affrontati risultano mal posti e presentano le patologie descritte al paragrafo precedente. Al fine di superare tali limiti il continuo viene arricchito, in modo da regolarizzare le equazioni che reggono il problema, mantenendole di forma ellittica [25].

Un primo esempio di continuo arricchito è quello proposto nel 1909 dai fratelli Cosserat, che assume come parametri indipendenti, oltre alle traslazioni, le rotazioni locali in ogni punto materiale. Detto modello è stato esteso al problema della localizzazione delle deformazioni [18], descrivendo la microstruttura del materiale con un parametro detto *lunghezza interna*.

*Continuo
di Cosserat*

Nei modelli non locali, la tensione in un punto dipende dalle deformazioni nell'intorno del punto. Il metodo si propone di individuare la banda di localizzazione indipendentemente dalla dimensione della discretizzazione adottata.

Modelli non locali

1.4 Approcci alle discontinuità deboli e forti

Il problema della localizzazione delle deformazioni può anche essere trattato introducendo una discontinuità nel campo delle deformazioni [22], mantenendo continuo lo spostamento (Figura 1.12(b)), o nel campo degli spostamenti (Figura 1.12(c)).

Nel primo caso, al fine di modellare discontinuità nel campo degli spostamenti, la localizzazione delle deformazioni viene concentrata in una banda ristretta [37, 38, 5].

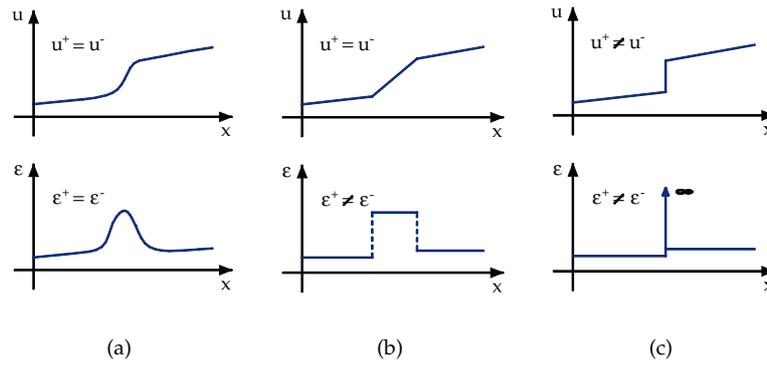


Figura 1.12: Spostamento e deformazione: (a) frattura diffusa, (b) discontinuità debole e (c) discontinuità forte

Il metodo classico dei modi incompatibili (*method of incompatible modes*) prevede l'utilizzo di elementi con prestazioni aggiuntive per la discretizzazione della banda di localizzazione. In [46] viene proposta una classe di *enhanced assumed strain method*, che assumono di decomporre il campo delle deformazioni in due parti:

$$\varepsilon = \mathbf{C}\mathbf{u} + \tilde{\varepsilon}$$

dove $\mathbf{C}\mathbf{u}$ è la parte simmetrica del campo degli spostamenti e $\tilde{\varepsilon}$ è la parte del campo di deformazione aggiuntiva.

In [44, 45] viene illustrato come dal contesto del metodo EAS nasce l'approccio alle discontinuità forti (SDA), che propone di cogliere i salti nel campo degli spostamenti attraverso superfici con spessore della banda nullo, considerando equazioni costitutive del solo continuo. Infatti è mostrato che il modello costitutivo discreto può essere interpretato come un caso limite del continuo al tendere a zero della larghezza della banda di localizzazione (superficie di discontinuità). In questo caso la deformazione è descritta dalla funzione generalizzata di distribuzione delta di Dirac. L'aspetto di maggiore interesse consiste nel fatto di analizzare il problema nel contesto della meccanica del continuo.

Altri autori definiscono separatamente la legge costitutiva della frattura in maniera indipendente dal continuo [27, 30, 28, 29].

In ogni caso l'approccio, di semplice implementazione nell'ambito del metodo agli elementi finiti, permette di regolarizzare il problema,

rendendo la soluzione indipendente dalla dimensione e dall'orientamento della discretizzazione, senza introdurre una lunghezza di scala per il materiale.

In letteratura inoltre sono rintracciabili contributi che estendono l'applicazione dell'approccio in deformazioni finite [35].

1.4.1 Classificazione delle interfacce con discontinuità forti

In letteratura esistono molti contributi basati sullo Strong Discontinuity Approach (SDA), che, nell'ambito del metodo agli elementi finiti, si possono complessivamente raggruppare in due diverse classi, in base al modo in cui viene inclusa un'interfaccia: interfacce interelemento ed interfacce intraelemento.

Nel primo caso la nascita e lo sviluppo di interfacce avviene in corrispondenza di specifici elementi finiti di spessore nullo (zero-thickness element), posti tra elementi finiti standard [13]. Il percorso di propagazione risulta fissato a priori, attraverso l'adozione della discretizzazione del dominio. Pertanto, per poter modellare la propagazione delle interfacce nel continuo sono necessarie tecniche di aggiornamento della discretizzazione (remeshing) [8, 2, 13].

Nel caso di interfacce intraelemento la nascita e lo sviluppo di interfacce avviene all'interno degli elementi finiti definiti dalla discretizzazione del dominio adottata. La discontinuità è introdotta attraverso un arricchimento del campo degli spostamenti, perseguito sommando al campo degli spostamenti standard (continuo) un campo di spostamenti discontinuo [44, 34, 1, 19, 28, 21, 12].

L'arricchimento della cinematica può essere perseguito a livello nodale o a livello dell'elemento finito [51, 15, 36]. Nel primo caso il metodo ricade nell'ambito dell'eXtended Finite Element Method (XFEM)[26, 48, 4, 52]. L'arricchimento consiste nell'introdurre gradi di libertà nodali aggiuntivi in tutti gli elementi attraversati dalla discontinuità, con conseguente aumento della dimensione del problema. Nel secondo caso l'arricchimento è introdotto a livello dell'elemento finito attraverso l'introduzione di gradi di libertà locali addizionali, che possono essere condensati a livello dell'elemento. In tal modo si lascia inalterata la dimensione del problema e non si accresce l'onere computazionale dell'analisi [19, 28, 21, 12].

1.5 Obiettivi della tesi

La tesi si rivolge alla modellazione numerica del fenomeno di formazione e di propagazione di interfacce nel contesto dell'approccio alle discontinuità forti.

L'obiettivo è lo sviluppo di una formulazione variazionale del problema del solido attraversato da discontinuità forti, descritta nel secondo capitolo.

Nel terzo capitolo è mostrata la strategia numerica adottata per la risoluzione del problema nell'ambito del metodo agli elementi finiti. In particolare viene proposto un algoritmo di soluzione che prevede l'utilizzo di elementi con discontinuità immerse, successivamente implementato nel codice di calcolo FracSDA8, realizzato ad hoc in ambiente MatLab.

Il quarto capitolo della tesi è dedicato alle analisi numeriche condotte con il codice FracSDA8 al fine di validare l'algoritmo di soluzione proposto.

Capitolo 2

PROBLEMA DEL SOLIDO ATTRAVERSATO DA DISCONTINUITÀ FORTI

Nel capitolo viene presentata la formulazione del problema del solido elastoplastico attraversato da discontinuità forti. Dopo aver descritto la cinematica delle discontinuità forti e i legami costitutivi adottati per il continuo e per l'interfaccia, si sono ricavate per via variazionale le equazioni che governano il problema. Infine si riporta un semplice esempio applicativo.

2.1 Notazione

Si richiama brevemente la notazione utilizzata nel capitolo per indicare le grandezze e gli operatori. Al fine di esprimere le equazioni che governano il problema in *forma operatoriale*, le componenti indipendenti dei tensori del secondo ordine, definiti nell'ambito della meccanica del continuo per descrivere lo stato deformativo e tensionale, sono raccolte in vettori. Analogamente le componenti indipendenti dei tensori del quarto ordine, utilizzati per caratterizzare i legami costitutivi, sono raccolte in matrici.

Operatori e grandezze cinematiche

Le sei componenti indipendenti del tensore di deformazione infinitesima sono raccolte nel vettore:

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}]^T. \quad (2.1)$$

Le tre componenti del campo di spostamento nel vettore:

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T. \quad (2.2)$$

Le equazioni di compatibilità all'interno del continuo in forma operatoriale assumono l'espressione:

$$\varepsilon = \mathbf{C}\mathbf{u} \quad (2.3)$$

dove la matrice \mathbf{C} è l'operatore di congruenza:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Sulla frontiera vincolata si ha:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (2.5)$$

nella quale con $\bar{\mathbf{u}}$ si sono indicati gli spostamenti assegnati. Nel caso piano le espressioni precedenti si particolarizzano:

- vettore delle deformazioni

$$\varepsilon = [\varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}]^T \quad (2.6)$$

- vettore degli spostamenti

$$\mathbf{u} = [u_y, u_z]^T \quad (2.7)$$

- operatore di congruenza

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Operatori e grandezze statiche

Le sei componenti indipendenti del tensore di tensione sono raccolte nel vettore

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}]^T, \quad (2.9)$$

le tre componenti delle forze di volume nel vettore

$$\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]^T \quad (2.10)$$

ed infine le tre componenti delle forze di superficie nel vettore

$$\mathbf{q} = [q_x, q_y, q_z]^T. \quad (2.11)$$

Le equazioni indefinite di equilibrio nel continuo in forma operatoriale assumono l'espressione:

$$\mathbf{C}'\sigma = \mathbf{b} \quad (2.12)$$

dove la matrice \mathbf{C}' è l'operatore di equilibrio

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.13)$$

sulla frontiera caricata si ha:

$$\mathcal{N}\sigma = \mathbf{q} \quad (2.14)$$

dove la matrice \mathcal{N} , i cui elementi sono le componenti della normale al contorno, è l'operatore di equilibrio al contorno

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & 0 & n_z & n_y \\ 0 & n_y & 0 & n_z & 0 & n_x \\ 0 & 0 & n_z & n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Dal confronti delle equazioni (2.4) e (2.15) si deduce la relazione:

$$\mathbf{C}' = -\mathbf{C}^T \quad (2.16)$$

Nel caso piano le espressioni precedenti si particolarizzano:

- vettore delle tensioni

$$\sigma = [\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}]^T, \quad (2.17)$$

- vettore delle forze di volume

$$\mathbf{b} = [b_y, b_z]^T \quad (2.18)$$

- vettore delle forze di superficie

$$\mathbf{q} = [q_y, q_z]^T. \quad (2.19)$$

- operatore di equilibrio

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad (2.20)$$

- operatore di equilibrio al contorno

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_z & n_y \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Operatori e grandezze costitutive

Si riporta la relazione costitutiva tra vettore delle tensioni e vettore delle deformazioni in forma operatoriale nel caso di legame iperelastico lineare:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.22)$$

dove \mathbf{E} è la matrice elastica:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & sim. & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Nel caso di stato piano di tensione la matrice elastica si particularizza:

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}; \quad (2.24)$$

nel caso di stato piano di deformazione diventa invece:

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}; \quad (2.25)$$

dove E è il modulo di elasticità normale, ν il coefficiente di Poisson.

2.2 Cinematica delle discontinuità forti

Al fine di descrivere la cinematica delle discontinuità forti, che ammette salti nel campo degli spostamenti, si consideri il solido di figura 2.1(a) che occupa la regione di spazio Ω .

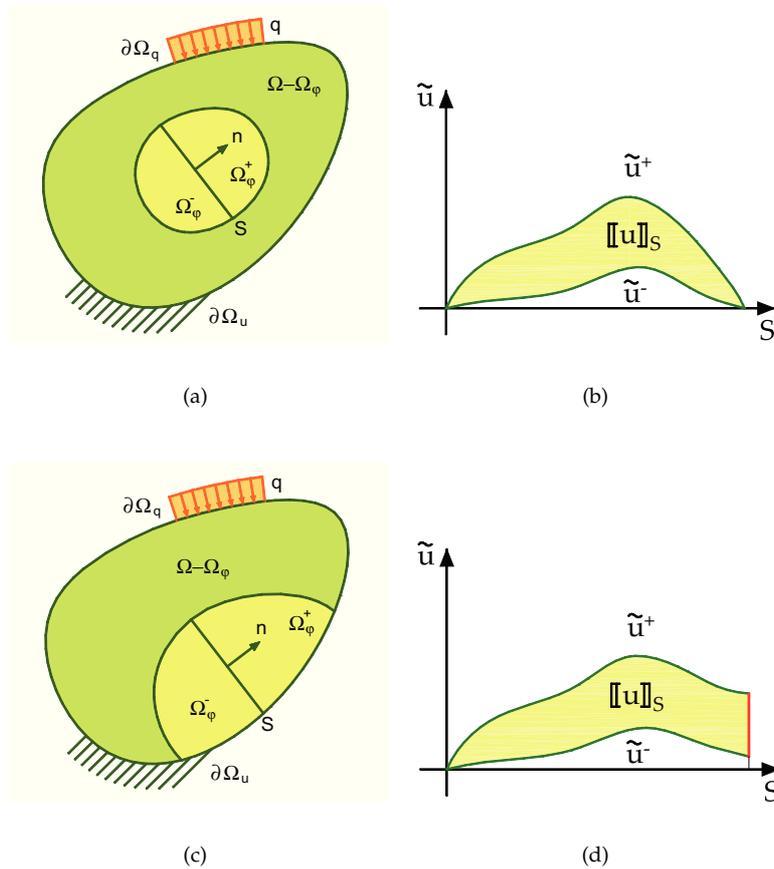


Figura 2.1: Solido attraversato da un'interfaccia: (a) e (b) interna, (c) e (d) con un estremo sulla frontiera.

La parte di frontiera del solido $\partial\Omega_q$ risulta caricata, mentre sulla parte di frontiera $\partial\Omega_u$ sono impressi degli spostamenti assegnati $\bar{\mathbf{u}}$.

Sia S una superficie (detta interfaccia) interna al solido in corrispon-

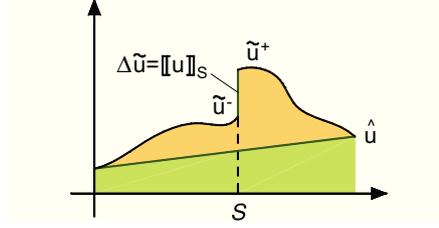


Figura 2.2: Campo degli spostamenti all'interno della regione Ω_φ .

denza della quale il campo degli spostamenti presenta una discontinuità. Si consideri la parte di solido Ω_φ interamente attraversato dall'interfaccia, il quale risulta diviso in due regioni Ω_φ^+ e Ω_φ^- . Indicata con \mathbf{n} la normale all'interfaccia, la regione Ω_φ^+ è la parte individuata dal verso positivo di \mathbf{n} .

Il campo degli spostamenti all'interno della regione Ω_φ può quindi essere pensato come la somma di una parte regolare $\hat{\mathbf{u}}$ e di una parte singolare $\tilde{\mathbf{u}}$ come evidenziato nella figura 2.2:

$$\mathbf{u} = \underbrace{\hat{\mathbf{u}}}_{\text{regolare}} + \underbrace{\tilde{\mathbf{u}}}_{\text{singolare}}, \quad (2.26)$$

dal quale si può derivare il corrispondente campo di deformazione:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{u}}. \quad (2.27)$$

La funzione $\hat{\mathbf{u}}$ è continua e differenziabile in tutti i punti del suo supporto Ω , mentre la funzione $\tilde{\mathbf{u}}$ è continua e differenziabile in tutti i punti del suo supporto Ω_φ tranne che in corrispondenza della superficie S . Inoltre, indicato con $[[\mathbf{u}]]_S$ il salto che il campo di spostamento presenta in corrispondenza dell'interfaccia S , la funzione $\tilde{\mathbf{u}}$ è tale da risultare (figura 2.2):

$$[[\mathbf{u}]]_S = [[\tilde{\mathbf{u}}]] = \tilde{\mathbf{u}}^+ - \tilde{\mathbf{u}}^- \quad (2.28)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega_{\varphi,t} \cup \partial\Omega_{\varphi,u} \quad (2.29)$$

dove $\tilde{\mathbf{u}}^+$ e $\tilde{\mathbf{u}}^-$ rappresentano rispettivamente i valori del campo di spostamento singolare $\tilde{\mathbf{u}}$ a destra ed a sinistra dell'interfaccia.

Modelli al continuo

2.3 Modello costitutivo

Lo stato del sistema è descritto a livello fenomenologico da due insiemi di variabili, rispettivamente relativi al continuo ed all'interfaccia,

e dai meccanismi di scambio dell'energia, distinguendo tra fenomeni reversibili, che modificano l'energia immagazzinata, e fenomeni irreversibili, che causano la dissipazione di energia [9, 11]. In particolare si assume un comportamento elastoplastico incrudente per il continuo ed elastoplastico con softening per l'interfaccia.

Per il continuo, oltre alle deformazioni ε , è stata introdotto un vettore di variabili interne α , che ne descrive l'incrudimento. Le variabili che descrivono il comportamento dell'interfaccia sono il salto $[[\mathbf{u}]]_S$ e la variabile interna α_S . In definitiva le variabili cinematiche e le associate variabili duali statiche considerate sono:

Variabili che descrivono il comportamento costitutivo

| | | | |
|--------------------|---|----------------|--------------------------|
| ε | deformazioni continuo | σ | tensioni continuo |
| α | v.c. interna continuo che descrive l'incrudimento | χ | v.s. interna continuo |
| $[[\mathbf{u}]]_S$ | salto interfaccia | \mathbf{t}_S | trazioni all'interfaccia |
| α_S | v.c. interna interfaccia che descrive il softening | χ_S | v.s. interna interfaccia |

Ogni variabile cinematica si può additivamente decomporre in una parte reversibile, indicata con il pedice e , ed in una parte irreversibile, indicata con il pedice p :

Additività delle variabili cinematiche

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (2.30)$$

$$\underbrace{\alpha}_{=0} = \alpha_e + \alpha_p \quad (2.31)$$

$$[[\mathbf{u}]]_S = [[\mathbf{u}]]_{S_e} + [[\mathbf{u}]]_{S_p} \quad (2.32)$$

$$\underbrace{\alpha_S}_{=0} = \alpha_{S_e} + \alpha_{S_p} \quad (2.33)$$

Poichè il lavoro della variabile interna α_S deve risultare nullo [9], il suo valore totale deve essere zero, ovvero la sua parte elastica e la sua parte irreversibile risultano opposte.

Le relazioni costitutive possono essere definite attraverso la scelta di funzionali dell'energia interna e di funzionali di dissipazione, i quali dipendono rispettivamente dalle componenti reversibile e irreversibile delle variabili cinematiche [16]. In maniera duale, si possono scegliere funzionali complementari dell'energia interna e funzionali complementari di dissipazione, definiti rispettivamente in termini delle componenti reversibili e irreversibili delle variabili statiche.

2.3.1 Comportamento reversibile del continuo

La relazione costitutiva del continuo può essere definita attraverso il funzionale dell'energia libera specifica di Helmholtz F [9]. In accordo alla ipotesi di materiale standard generalizzato, tale funzionale è dato dalla somma del potenziale elastico $\varphi(\varepsilon_e)$ e del potenziale di incrudimento $\pi(\alpha_e)$:

$$F(\varepsilon_e, \alpha_e) = \varphi(\varepsilon_e) + \pi(\alpha_e). \quad (2.34)$$

Legame diretto

Dal primo è possibile derivare le tensioni

$$\sigma = \frac{\partial \varphi(\varepsilon_e)}{\partial \varepsilon_e}, \quad (2.35)$$

dal secondo le variabili statiche interne:

$$\chi = \frac{\partial \pi(\alpha_e)}{\partial \alpha_e} \quad (2.36)$$

Il legame inverso è derivato dal potenziale elastico $\phi'(\sigma)$ e dal potenziale di incrudimento $\pi'(\chi)$ complementari, definiti rispettivamente in funzione dei potenziali $\phi(\sigma)$ e $\pi(\chi)$ attraverso la trasformata di Legendre

Trasformata di Legendre

$$\phi'(\sigma) = \sup_{\varepsilon_e} [\sigma^T \varepsilon_e - \varphi(\varepsilon_e)] \quad (2.37)$$

$$\pi'(\chi) = \sup_{\alpha_e} [\chi^T \alpha_e - \pi(\alpha_e)] \quad (2.38)$$

Legame inverso

dalle quali è possibile ricavare le deformazioni

$$\varepsilon_e = \frac{\partial \phi'(\sigma)}{\partial \sigma} \quad (2.39)$$

e le variabili cinematiche interne

$$\alpha_e = \frac{\partial \pi'(\chi)}{\partial \chi} \quad (2.40)$$

Caso lineare

Nel caso di legame elastico lineare e di incrudimento lineare il potenziale elastico ed il potenziale di incrudimento assumono rispettivamente la forma

$$\phi(\varepsilon_e) = \frac{1}{2} \varepsilon_e^T \mathbf{E} \varepsilon_e \quad (2.41)$$

$$\pi(\alpha_e) = \frac{1}{2} \alpha_e^T \mathbf{H} \alpha_e. \quad (2.42)$$

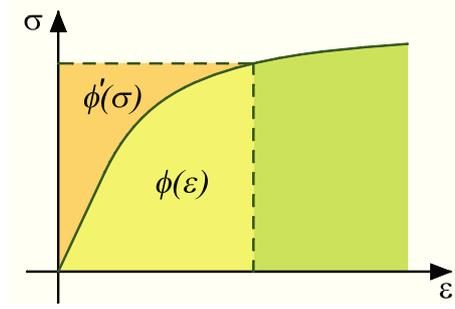


Figura 2.3: Potenziale elastico e potenziale complementare legati attraverso la Trasformata di Legendre.

Analogamente le espressioni per i relativi potenziali complementari diventano

$$\phi'(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{E}^{-1} \sigma \quad (2.43)$$

$$\pi'(\chi) = \frac{1}{2} \chi^T \mathbf{H}^{-1} \chi \quad (2.44)$$

dove \mathbf{E} è la matrice costitutiva elastica e \mathbf{H} è la matrice costitutiva che descrive l'incrudimento.

Il legame diretto (2.35) e (2.36) diventa pertanto

$$\sigma = \mathbf{E} \varepsilon_e, \quad (2.45)$$

$$\chi = \mathbf{H} \alpha_e, \quad (2.46)$$

mentre il legame inverso (2.39) e (2.40) assume la forma

$$\varepsilon_e = \mathbf{E}^{-1} \sigma, \quad (2.47)$$

$$\alpha_e = \mathbf{H}^{-1} \chi. \quad (2.48)$$

Comportamento reversibile del continuo in termini di velocità

Si assume che le velocità di tensione e le velocità di variabili statiche interne possano essere derivate rispettivamente dal potenziale elastico e di incrudimento tangente:

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \varphi_t(\varepsilon_e, \dot{\varepsilon}_e)}{\partial \dot{\varepsilon}_e} \quad (2.49a)$$

$$\dot{\chi} = \frac{\partial \pi_t(\alpha_e, \dot{\alpha}_e)}{\partial \dot{\alpha}_e} \quad (2.49b)$$

Potenziali tangenti

dove, nell'ipotesi che i potenziali elastico e di incrudimento risultino differenziabili due volte secondo Gateaux,

$$\phi_t(\varepsilon_e, \dot{\varepsilon}_e) = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_e^T \frac{\partial^2 \phi(\varepsilon_e)}{\partial \varepsilon_e^2} \dot{\varepsilon}_e \quad (2.50)$$

$$\pi_t(\alpha_e, \dot{\alpha}_e) = \frac{1}{2} \dot{\alpha}_e^T \frac{\partial^2 \phi(\alpha_e)}{\partial \alpha_e^2} \dot{\alpha}_e \quad (2.51)$$

Legame diretto

Sostituendo si ottengono le espressioni del legame diretto in termini di velocità:

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial^2 \phi(\varepsilon_e)}{\partial \varepsilon_e^2} \dot{\varepsilon}_e \quad (2.52a)$$

$$\dot{\chi} = \frac{\partial^2 \phi(\alpha_e)}{\partial \alpha_e^2} \dot{\alpha}_e \quad (2.52b)$$

2.3.2 Comportamento irreversibile del continuo

Funzione di dissipazione

Analogamente a quanto discusso al paragrafo 2.3.1, la relazione costitutiva che descrive la parte irreversibile del comportamento del continuo può essere definita attraverso la funzione di dissipazione, che, nell'ipotesi di validità del postulato della massima dissipazione, assume l'espressione:

$$d(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) = \sup_{\sigma, \chi} [\sigma^T \dot{\varepsilon}_p + \chi^T \dot{\alpha}_p]. \quad (2.53)$$

La funzione di dissipazione, pensata in generale non regolare (*non smooth function*), è scelta in modo tale che risulti un *gauge*, ovvero che goda delle seguenti proprietà:

- $d(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) \geq 0, \forall (\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p),$
- $d(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0,$
- $d(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p)$ sia convessa, positivamente omogenea e inferiormente semicontinua.

Per tale funzione, nell'ambito dell'analisi convessa [42] è possibile definire l'operatore sottodifferenziale:

$$\begin{aligned} \partial d = \{(\sigma, \chi) : d_S(\tilde{\varepsilon}_p, \tilde{\alpha}_p) \geq d(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) + \\ + \sigma^T (\tilde{\varepsilon}_p - \dot{\varepsilon}_p) + \chi^T (\tilde{\alpha}_p - \dot{\alpha}_p), \\ \forall (\tilde{\varepsilon}_p, \tilde{\alpha}_p)\} \end{aligned} \quad (2.54)$$

attraverso il quale è possibile ricavare le tensioni e la variabili interne in funzione di d_S

$$(\sigma, \chi) \in \partial d(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) \quad (2.55)$$

Legame diretto

Si noti che se la funzione di dissipazione risultasse differenziabile il generico elemento del sottodifferenziale, detto sottogradiente, coinciderebbe con il gradiente locale della funzione.

Il legame costitutivo può essere anche ottenuto mediante la funzione d' coniugata alla funzione di dissipazione, definita attraverso la trasformata di Legendre:

$$d'(\sigma, \chi) = \sup_{\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p} [\sigma^T \dot{\varepsilon}_p + \chi^T \dot{\alpha}_p - d(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p)] \quad (2.56)$$

dalla quale è possibile ricavare la velocità di deformazione plastica $\dot{\varepsilon}_p$ e quella della variabile cinematica di incrudimento $\dot{\alpha}_p$:

$$(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) \in \partial d'(\sigma, \chi). \quad (2.57)$$

Legame inverso

Poichè d' è la funzione coniugata della funzione convessa, positivamente omogenea e inferiormente semicontinua d_S , la relazione (2.55) vale se e solo se vale la relazione (2.57), ovvero:

$$(\sigma, \chi) \in \partial d \iff (\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) \in \partial d'. \quad (2.58)$$

Analogia con la formulazione classica della plasticità

Nella formulazione classica della plasticità si assume che le tensioni nel continuo σ e la variabile statica interna χ possano assumere valori all'interno di un insieme K , chiamato insieme degli stati ammissibili. L'interno di K è chiamato regione elastica mentre la sua frontiera è nota come superficie di snervamento dell'interfaccia. La superficie di attivazione dell'interfaccia può essere rappresentata attraverso una funzione $g(\sigma, \chi)$ chiamata funzione di attivazione dell'interfaccia (di snervamento nel caso della plasticità), tale che:

$$K = \{(\sigma, \chi) : g(\sigma, \chi) \leq 0\} \quad (2.59)$$

Insieme degli stati ammissibili

In accordo al postulato della massima dissipazione, dal quale discende la definizione di funzione di dissipazione data dalla (2.53), e ricordando che per ipotesi la funzione di dissipazione è un gauge, l'insieme K definito dalla (2.59) assume la forma:

$$K = \{(\sigma, \chi) : \sigma^T \dot{\varepsilon}_p + \chi^T \dot{\alpha}_p \leq d(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p), \forall (\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p)\}. \quad (2.60)$$

Detto insieme è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

Funzione di
dissipazione

- l'insieme K è non vuoto, chiuso e convesso,
- la funzione di dissipazione d definita dalla (2.53) è la funzione supporto dell'insieme K :

$$d = \text{supp}K \quad (2.61)$$

dove, per definizione:

$$\text{supp}K = \sup_{(\sigma, \chi) \in K} [\sigma^T \dot{\epsilon}_p + \chi^T \dot{\alpha}_p] \quad (2.62)$$

Funzione di
dissipazione
complementare

- la funzione coniugata d' della funzione di dissipazione, definita attraverso la trasformata di Legendre in (2.56), è la funzione indicatrice dell'insieme K :¹

$$d' = \text{ind}K \quad (2.63)$$

dove, per definizione:

$$\text{ind}K = \begin{cases} 0, & (\sigma, \chi) \in K \\ +\infty, & (\sigma, \chi) \notin K \end{cases} \quad (2.64)$$

- $K = \partial d(\mathbf{0}, 0)$.

Equazioni
costitutive

Sostituendo le relazioni (2.62) e (2.63) rispettivamente nelle equazioni costitutive (2.55) e (2.57) si ottiene:

$$(\sigma, \chi) \in \partial \text{supp}K \quad (2.65)$$

$$(\dot{\epsilon}_p, \dot{\alpha}_p) \in \partial \text{ind}K \quad (2.66)$$

dove

$$\begin{aligned} \partial \text{ind}K = \{(\sigma, \chi) : d_S(\tilde{\epsilon}_p, \tilde{\alpha}_p) \geq d(\dot{\epsilon}_p, \dot{\alpha}_p) + \\ + \sigma^T (\tilde{\epsilon}_p - \dot{\epsilon}_p) + \chi^T (\tilde{\alpha}_p - \dot{\alpha}_p), \\ \forall (\tilde{\epsilon}_p, \tilde{\alpha}_p)\} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Cono delle normali

Il secondo membro della (2.67) è la definizione dell'insieme del cono delle normali all'insieme convesso K , rappresentato in figura 2.4 e nel seguito denotato con $N_K^{(\sigma, \chi)}$. La (2.66), che rappresenta la legge

¹Si ricorda infatti che la funzione indicatrice è la funzione coniugata della funzione supporto.

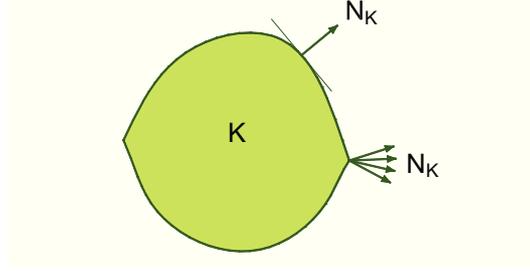


Figura 2.4: Esempio di coni delle normali all'insieme convesso K

di flusso associato che governa l'evoluzione delle variabili cinematiche inelastiche, diviene:

$$(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) \in N_K^{(\sigma, \chi)}. \quad (2.68)$$

e viene perciò detta legge di normalità. D'altra parte risulta (vedi [9])

$$\partial \text{ind} K = \dot{\lambda} \partial g(\sigma, \chi) \quad (2.69)$$

dove $\dot{\lambda} \geq 0$ tale che

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \text{se} \quad g(\sigma, \chi) < 0$$

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \text{se} \quad g(\sigma, \chi) = 0,$$

relazioni equivalenti alle condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad g(\sigma, \chi) \leq 0 \quad \dot{\lambda} g(\sigma, \chi) = 0.$$

Comportamento irreversibile del continuo in termini di velocità

Si assume che le velocità di tensione e le velocità di variabili statiche interne possano essere derivate da un potenziale di dissipazione tangente

$$d_t(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) = \text{supp} T_K^{(\sigma, \chi)} \quad (2.70)$$

che risulta essere la funzione supporto dell'insieme $T_K^{(\sigma, \chi)}$:

$$T_K^{(\sigma, \chi)} = \{(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) : \dot{g}(\sigma, \dot{\sigma}, \chi, \dot{\chi}) \leq 0, g(\sigma, \chi) = 0\} \quad (2.71)$$

avendo definito

$$\dot{g}(\sigma, \dot{\sigma}, \chi, \dot{\chi}) = \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)^T \dot{\sigma} + \left(\frac{\partial g}{\partial \chi} \right)^T \dot{\chi} \quad (2.72)$$

Il legame diretto in termini di velocità assume la forma:

$$(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) \in \partial d_t(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p). \quad (2.73)$$

Legame diretto

Dualmente le velocità di deformazione plastica e delle variabili cinematiche interne vengono derivate da un potenziale di dissipazione complementare tangente, ottenuto dal potenziale di dissipazione tangente (2.70) attraverso la trasformata di Legendre:

$$d'_t(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) = \text{ind} T_K^{(\sigma, \chi)}. \quad (2.74)$$

Legame inverso

Il legame inverso in termini di velocità è espresso dalla cosiddette leggi di flusso

$$(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) \in \partial d'_t(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) \quad (2.75)$$

dove il sottogrado del potenziale di dissipazione complementare tangente $\partial d'_t$ risulta uguale al cono delle normali N_{T_K} all'insieme convesso T_K definito dalla (2.71).

Nel caso in cui $g(\sigma, \chi)$ risulti differenziabile in ogni punto della frontiera dell'insieme degli stati ammissibili K , la funzione indicatrice che compare nella (2.74) risulta

$$\partial \text{ind} T_K^{(\sigma, \chi)} = \begin{cases} \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \dot{\sigma}} \\ \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \dot{\chi}} \end{bmatrix} & \text{se } g(\sigma, \chi) = 0 \\ \mathbf{0} & \text{se } g(\sigma, \chi) < 0 \end{cases} \quad (2.76)$$

Condizioni di Kuhn-Tucker

Le relazioni (2.76) dettano le condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad \dot{g}(\sigma, \dot{\sigma}, \chi, \dot{\chi}) \leq 0 \quad \dot{\lambda} \dot{g}(\sigma, \dot{\sigma}, \chi, \dot{\chi}) = 0 \quad g(\sigma, \chi) = 0.$$

Inoltre dalla (2.72) risulta

$$\frac{\partial \dot{g}(\dot{\sigma}, \dot{\chi})}{\partial \dot{\sigma}} = \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial \dot{g}(\dot{\sigma}, \dot{\chi})}{\partial \dot{\chi}} = \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \chi}.$$

Leggi di flusso

Sostituendo tali espressioni nelle (2.75) per le leggi di flusso si ottengono le note espressioni:

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \sigma}$$

$$\dot{\alpha}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \chi}$$

Condizione di
consistenza e calcolo
di $\dot{\lambda}$

Per calcolare il parametro $\dot{\lambda}$ che compare nelle leggi di flusso (2.75) (ovvero (2.77)) si utilizza la condizione di consistenza

$$\dot{g}(\sigma, \dot{\sigma}, \chi, \dot{\chi}) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)^T \dot{\sigma} + \left(\frac{\partial g}{\partial \chi}\right)^T \dot{\chi} = 0 \quad (2.78)$$

dove $\dot{\chi}$ è data dalla (2.52). Inoltre tenendo conto della (2.31) la condizione di consistenza diventa

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)^T \dot{\sigma} - \dot{\lambda} \left(\frac{\partial g}{\partial \chi}\right)^T \frac{\partial^2 \pi}{\partial \alpha_e^2} \frac{\partial g}{\partial \chi} = 0$$

dalla quale si ottiene il valore di $\dot{\lambda}$ cercato:

$$\dot{\lambda} = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial g}{\partial \chi}\right)^T \frac{\partial^2 \pi}{\partial \alpha_e^2} \frac{\partial g}{\partial \chi} \right]^{-1}}_{\mathcal{H}} \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)^T \dot{\sigma}. \quad (2.79)$$

Nella (2.79), che esprime $\dot{\lambda}$ in funzione di $\dot{\sigma}$, lo scalare \mathcal{H} è detto funzione di incrudimento.

Funzione di
incrudimento

Una relazione alternativa di $\dot{\lambda}$, espresso in funzione della velocità di deformazione, può essere ricavata a partire dalla equazione di additività delle deformazioni, la quale, tenendo conto delle relazioni costitutive, assume la forma

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E} \left[\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right]$$

Premoltiplicando ambo i membri per $(\partial g / \partial \sigma)^T$ e risolvendo per $\dot{\lambda}$ si ottiene:

$$\dot{\lambda} = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)^T \mathbf{E}}{\frac{1}{\mathcal{H}} + \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)^T \mathbf{E} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \dot{\varepsilon}$$

Sostituendo si ottiene

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E}_{ep} \dot{\varepsilon}$$

avendo definito la matrice elastoplastica

Matrice
elastoplastica

$$\mathbf{E}_{ep} = \mathbf{E} - \frac{\left(\mathbf{E} \frac{\partial g}{\partial \sigma}\right) \left(\mathbf{E} \frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)^T}{\frac{1}{\mathcal{H}} + \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)^T \mathbf{E} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \quad (2.80)$$

2.3.3 Comportamento reversibile dell'interfaccia

Analogamente a quanto assunto al paragrafo 2.3.1, la relazione costitutiva può essere dedotta dall'energia libera di Helmholtz F , somma di un potenziale elastico $\phi_S(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se})$ e di un potenziale di incrudimento $\pi_S(\alpha_{Se})$ (che descrive il comportamento softening dell'interfaccia), dai quali è possibile derivare rispettivamente il vettore delle trazioni \mathbf{t}_S sull'interfaccia e le variabili interne χ_S :

Legame diretto

$$\mathbf{t}_S = \frac{\partial \phi_S(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se})}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se}} \quad (2.81a)$$

$$\chi_S = \frac{\partial \pi_S(\alpha_{Se})}{\partial \alpha_{Se}} \quad (2.81b)$$

ovvero mediante i potenziali elastico $\phi'_S(\mathbf{t}_S)$ e di incrudimento $\pi'_S(\chi_S)$ complementari, ricavati attraverso la Trasformata di Legendre, dai quali è possibile derivare $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se}$ e α_{Se} :

Legame inverso

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se} = \frac{\partial \phi'_S(\mathbf{t}_S)}{\partial \mathbf{t}_S} \quad (2.82a)$$

$$\alpha_{Se} = \frac{\partial \pi'_S(\chi_S)}{\partial \chi_S} \quad (2.82b)$$

Nel caso di elasticità lineare e incrudimento lineare, le espressioni del legame costitutivo diretto ed inverso dell'interfaccia divengono rispettivamente:

Caso lineare

$$\mathbf{t}_S = \mathbf{E}_S \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se}, \quad (2.83a)$$

$$\chi_S = \mathbf{H}_S \alpha_{Se}, \quad (2.83b)$$

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se} = \mathbf{E}_S^{-1} \mathbf{t}_S, \quad (2.84a)$$

$$\alpha_{Se} = \mathbf{H}_S^{-1} \chi_S. \quad (2.84b)$$

Comportamento reversibile dell'interfaccia in termini di velocità

Anche in questo caso la velocità del vettore tensione all'interfaccia e la velocità della variabile statica interna sono derivate dai potenziali elastico e di incrudimento tangenti:

$$\dot{\mathbf{t}}_S = \frac{\partial \phi_{St}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se}, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Se})}{\partial \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Se}} \quad (2.85a)$$

$$\dot{\chi}_S = \frac{\partial \pi_{St}(\alpha_{Se}, \dot{\alpha}_{Se})}{\partial \dot{\alpha}_{Se}} \quad (2.85b)$$

dove, nell'ipotesi che i potenziali risultino differenziabili due volte secondo Gateaux,

$$\varphi_{St}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se}, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Se}) = \frac{1}{2} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Se}^T \frac{\partial^2 \varphi_S(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se})}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se}^2} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Se}$$

$$\pi_{St}(\alpha_{Se}, \dot{\alpha}_{Se}) = \frac{1}{2} \dot{\alpha}_{Se}^T \frac{\partial^2 \pi_{St}(\alpha_{Se})}{\partial \alpha_{Se}^2} \dot{\alpha}_{Se}$$

Sostituendo si ottengono le espressioni del legame diretto in termini di velocità:

$$\mathbf{t}_S = \frac{\partial^2 \varphi_S(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se})}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{Se}^2} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Se} \quad (2.86a)$$

$$\dot{\chi}_S = \frac{\partial^2 \pi_{St}(\alpha_{Se})}{\partial \alpha_{Se}^2} \dot{\alpha}_{Se} \quad (2.86b)$$

2.3.4 Comportamento irreversibile dell'interfaccia

La parte irreversibile del legame costitutivo è definita in modo analogo a quanto descritto nel paragrafo 2.3.2 per il continuo. Anche in questo caso si definiscono un potenziale di dissipazione

$$d_S(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp}, \dot{\alpha}_{Sp}) = \sup_{\mathbf{t}_S, \chi_S} \left[\mathbf{t}_S^T \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp} + \chi_S^T \dot{\alpha}_{Sp} \right] \quad (2.87)$$

ed il suo complementare d'_S , attraverso la trasformata di Legendre,

$$d'_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = \sup_{\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp}, \dot{\alpha}_{Sp}} \left[\mathbf{t}_S^T \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp} + \chi_S^T \dot{\alpha}_{Sp} - d_S(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp}, \dot{\alpha}_{Sp}) \right] \quad (2.88)$$

i quali risultano rispettivamente pari alla funzione supporto ed alla funzione indicatrice dell'insieme K_S degli stati ammissibili, definito:

$$K_S = \{(\mathbf{t}_S, \chi_S) : g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) \leq 0\}. \quad (2.89)$$

dove g_S è detta funzione di attivazione. Il legame costitutivo così definito assume la forma:

$$(\mathbf{t}_S, \chi_S) \in \partial \text{supp} K_S \quad (2.90a)$$

⇕

$$(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp}, \dot{\alpha}_{Sp}) \in \partial \text{ind} K_S = N_{K_S}^{(\mathbf{t}_S, \chi_S)}. \quad (2.90b)$$

Il secondo membro della (2.90b) è l'insieme del cono delle normali all'insieme convesso K_S . D'altra parte risulta

$$\partial \text{ind} K_S = \dot{\lambda}_S \partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) \quad (2.91)$$

dove $\dot{\lambda}_S \geq 0$ tale che

$$\dot{\lambda}_S = 0 \quad \text{se} \quad g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) < 0$$

$$\dot{\lambda}_S = 0 \quad \text{se} \quad g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = 0,$$

relazioni equivalenti alla condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda}_S \geq 0 \quad g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) \leq 0 \quad \dot{\lambda}_S g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = 0.$$

Comportamento irreversibile dell'interfaccia in termini di velocità

Si assume che la velocità del vettore delle trazioni e delle variabili statiche interne possano essere derivate da un potenziale di dissipazione tangente

$$d_{St}(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp}, \dot{\alpha}_{Sp}) = \text{supp} T_{K_S}^{(\mathbf{t}_S, \chi_S)} \quad (2.92)$$

che risulta essere la funzione supporto dell'insieme $T_{K_S}^{(\mathbf{t}_S, \chi_S)}$:

$$T_{K_S}^{(\mathbf{t}_S, \chi_S)} = \{(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) : \dot{g}_S(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) \leq 0, g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)\} \quad (2.93)$$

avendo definito

$$\dot{g}_S(\mathbf{t}_S, \dot{\mathbf{t}}_S, \chi_S, \dot{\chi}_S) = \left(\frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right)^T \dot{\mathbf{t}}_S + \left(\frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \right)^T \dot{\chi}_S \quad (2.94)$$

Legame diretto

Il legame diretto in termini di velocità assume la forma:

$$(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) \in \partial d_{St}(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp}, \dot{\alpha}_{Sp}). \quad (2.95)$$

Dualmente le velocità di deformazione plastica e delle variabili cinematiche interne vengono derivate da un potenziale di dissipazione complementare tangente, ottenuto dal potenziale di dissipazione tangente (2.92) attraverso la trasformata di Legendre:

$$d'_{St}(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) = \text{ind} T_{K_S}^{(\mathbf{t}_S, \chi_S)}. \quad (2.96)$$

Legame inverso

Il legame inverso in termini di velocità è espresso dalla cosiddette

leggi di flusso

$$(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp}, \dot{\alpha}_{Sp}) \in \partial d'_{St}(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) \quad (2.97)$$

dove il sottogradiante del potenziale di dissipazione complementare tangente $\partial d'_{St}$ risulta uguale al cono delle normali $N_{T_{K_S}}$ all'insieme convesso T_{K_S} definito dalla (2.93).

Nel caso in cui $g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)$ risulti differenziabile in ogni punto della frontiera dell'insieme degli stati ammissibili K_S , la funzione indicatrice che compare nella (2.96) risulta

$$\partial \text{ind} T_{K_S}^{(\mathbf{t}_S, \chi_S)} = \begin{cases} \dot{\lambda}_S \begin{bmatrix} \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \dot{\mathbf{t}}_S, \chi_S, \dot{\chi}_S)}{\partial \dot{\mathbf{t}}_S} \\ \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \dot{\mathbf{t}}_S, \chi_S, \dot{\chi}_S)}{\partial \dot{\chi}_S} \end{bmatrix} & \text{se } g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = 0 \\ \mathbf{0} & \text{se } g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) < 0 \end{cases} \quad (2.98)$$

Le relazioni (2.98) dettano le condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda}_S \geq 0 \quad \dot{g}_S(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) \leq 0 \quad \dot{\lambda}_S \dot{g}_S(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) = 0 \quad g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = 0.$$

Condizioni di Kuhn-Tucker

Inoltre dalla (2.94) risulta

$$\frac{\partial \dot{g}_S(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S)}{\partial \dot{\mathbf{t}}_S} = \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \mathbf{t}_S}$$

$$\frac{\partial \dot{g}_S(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S)}{\partial \dot{\chi}_S} = \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \chi_S}.$$

Le leggi di flusso assumono la nota espressione:

Leggi di flusso

$$\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{Sp} = \dot{\lambda}_S \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \mathbf{t}_S}$$

$$\dot{\alpha}_{Sp} = \dot{\lambda}_S \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \chi_S}$$

Per calcolare il parametro $\dot{\lambda}_S$ che compare nelle leggi di flusso (2.99) si utilizza la condizione di consistenza

$$\dot{g}_S(\mathbf{t}_S, \dot{\mathbf{t}}_S, \chi_S, \dot{\chi}_S) = 0 \implies \left(\frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right)^T \dot{\mathbf{t}}_S + \left(\frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \right)^T \dot{\chi}_S = 0 \quad (2.100)$$

Condizione di consistenza e calcolo di $\dot{\lambda}_S$

dove $\dot{\chi}_S$ è data dalla (2.86b). Inoltre tenendo conto della (2.33) la condizione di consistenza diventa

$$\left(\frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right)^T \dot{\mathbf{t}}_S - \dot{\lambda}_S \left(\frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \right)^T \frac{\partial^2 \pi_S}{\partial \alpha_{S_e}^2} \left(\frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \right) = 0$$

dalla quale si ottiene il valore di $\dot{\lambda}_S$ cercato:

$$\dot{\lambda}_S = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \right)^T \frac{\partial^2 \pi_S}{\partial \alpha_{S_e}^2} \left(\frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \right) \right]^{-1}}_{\mathcal{H}_S} \left(\frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right)^T \dot{\mathbf{t}}_S. \quad (2.101)$$

Funzione di
incrudimento

Nella (2.101), che esprime $\dot{\lambda}_S$ in funzione di $\dot{\mathbf{t}}_S$, lo scalare \mathcal{H}_S è la funzione di incrudimento dell'interfaccia.

Una relazione alternativa di $\dot{\lambda}_S$, espresso in funzione della velocità di deformazione, può essere ricavata a partire dalla equazione di additività delle deformazioni, la quale, tenendo conto delle relazioni costitutive, assume la forma

$$\dot{\mathbf{t}}_S = \mathbf{E}_S \left[\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_S - \dot{\lambda}_S \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right]$$

Premoltiplicando ambo i membri per $\left(\frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right)^T$ e risolvendo per $\dot{\lambda}_S$ si ottiene:

$$\dot{\lambda}_S = \frac{\left(\frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right)^T \mathbf{E}_S}{\frac{1}{\mathcal{H}_S} + \left(\frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right)^T \mathbf{E}_S \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S}} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_S$$

Sostituendo si ottiene

$$\dot{\mathbf{t}}_S = \mathbf{E}_{S,ep} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_S$$

Matrice
elastoplastica della
interfaccia

avendo definito la matrice elastoplastica

$$\mathbf{E}_{S,ep} = \mathbf{E}_S - \frac{\left(\mathbf{E}_S \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right) \left(\mathbf{E}_S \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right)^T}{\frac{1}{\mathcal{H}_S} + \left(\frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right)^T \mathbf{E}_S \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S}} \quad (2.102)$$

2.4 Formulazione variazionale

Le equazioni che governano il problema sono ricavate per via variazionale, imponendo le condizioni di stazionarietà del funzionale energetico multicampo misto di Hu-Washizu generalizzato:

Funzionale di Hu-
Washizu

$$\Pi_t^{HW} \left(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\sigma}, \dot{\chi}, \dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\epsilon}_e, \dot{\epsilon}_p, \dot{\alpha}_e, \dot{\alpha}_p, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}, \dot{\alpha}_{S_e}, \dot{\alpha}_{S_p} \right) \quad (2.103)$$

Vincoli cinematici da
imporre

Il funzionale è costruito a partire dai vincoli (o condizioni) cinematici che si vogliono imporre al problema [49]. Nel caso in esame le condizioni dettate dalla cinematica descritta al paragrafo 2.2 sono:

- compatibilità cinematica interna nel continuo (2.27):

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \dot{\epsilon}_e - \dot{\epsilon}_p = 0 \quad \text{in } \Omega - \Omega_\varphi \quad (2.104a)$$

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \dot{\epsilon}_e - \dot{\epsilon}_p = 0 \quad \text{in } \Omega_\varphi - S \quad (2.104b)$$

nella quale si è assunta implicitamente l'additività delle deformazioni (2.30),

- additività delle variabili cinematiche interne nel continuo (2.31):

$$\underbrace{\dot{\alpha}}_{=0} - \dot{\alpha}_e - \dot{\alpha}_p = 0 \quad (2.105)$$

- compatibilità cinematica sulla frontiera vincolata:

$$\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial(\Omega - \Omega_\varphi)_u \quad (2.106a)$$

$$\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial(\Omega_\varphi - S)_u \quad (2.106b)$$

- compatibilità cinematica sull'interfaccia (2.28):

$$[[\dot{\mathbf{u}}]] - [[\dot{\mathbf{u}}]]_{S_e} - [[\dot{\mathbf{u}}]]_{S_p} = \mathbf{0} \quad (2.107)$$

nella quale si è assunta implicitamente l'additività del salto nel campo di spostamento in corrispondenza dell'interfaccia (2.32),

- additività delle variabili cinematiche interne sull'interfaccia (2.33):

$$\underbrace{\dot{\alpha}_S}_{=0} - \dot{\alpha}_{S_e} - \dot{\alpha}_{S_p} = 0 \quad (2.108)$$

Il generico addendo del funzionale di Hu-Washizu generalizzato si costruisce moltiplicando il generico vincolo nella forma $f(x) = 0$ per la variabile duale, che rappresenta il moltiplicatore lagrangiano del vincolo. Inoltre compaiono i termini relativi ai potenziali elastici, di incrudimento e di dissipazione che definiscono i modelli costitutivi del continuo e dell'interfaccia, descritte al paragrafo 2.3, ed i termini relativi al lavoro esterno:

Costruzione Π_t^{HW}

$$\begin{aligned}
\Pi_t^{HW} = & \int_{\Omega-\Omega_\varphi} (\varphi_t(\dot{\varepsilon}_e) + \pi_t(\dot{\alpha}_e)) d\Omega + \int_{\Omega_\varphi-S} (\varphi_t(\dot{\varepsilon}_e) + \pi_t(\dot{\alpha}_e)) d\Omega + \\
& + \int_S (\varphi_{S,t}(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}) + \pi_{S,t}(\dot{\alpha}_{S_e})) dS + \\
& + \int_{\Omega-\Omega_\varphi} d_t(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) d\Omega + \int_{\Omega_\varphi-S} d_t(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_p) d\Omega + \int_S d_{S,t}(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}, \dot{\alpha}_{S_p}) dS + \\
& + \int_{\Omega-\Omega_\varphi} \dot{\sigma}^T (\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \dot{\varepsilon}_e - \dot{\varepsilon}_p) d\Omega + \int_{\Omega_\varphi-S} \dot{\sigma}^T (\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \dot{\varepsilon}_e - \dot{\varepsilon}_p) d\Omega + \\
& + \int_S \dot{\mathbf{t}}_S^T (\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket - \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e} - \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}) dS + \int_{\Omega-\Omega_\varphi} \dot{\chi}^T (\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_e - \dot{\alpha}_p) dS + \\
& + \int_{\Omega_\varphi-S} \dot{\chi}^T (\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_e - \dot{\alpha}_p) dS + \int_S \dot{\chi}_S^T (\dot{\alpha}_S - \dot{\alpha}_{S_e} - \dot{\alpha}_{S_p}) dS - \\
& - \int_{\Omega-\Omega_\varphi} \dot{\mathbf{b}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega_\varphi-S} \dot{\mathbf{b}}^T (\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial(\Omega-\Omega_\varphi)_q} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \\
& - \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_q} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial(\Omega-\Omega_\varphi)_u} \dot{\mathbf{r}}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \\
& - \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_u} \dot{\mathbf{r}}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) d\Omega
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Condizioni di
stazionarietà

Imponendo le condizioni di stazionarietà del funzionale (2.109) si ottengono le equazioni che governano il problema. In particolare:

- imponendo la stazionarietà di Π^{HW} rispetto a $\dot{\sigma}$ si ottengono le equazioni (2.104) di compatibilità cinematica interna nel continuo,
- imponendo la stazionarietà di Π^{HW} rispetto a $\dot{\chi}$ si ottiene la relazione (2.105) di additività della variabile interna che descrive il comportamento incrudente del continuo,
- imponendo la stazionarietà di Π^{HW} rispetto a $\dot{\mathbf{r}}$ si ottengono le equazioni (2.106) di compatibilità cinematica sulla frontiera vincolata,

- imponendo la stazionarietà di Π^{HW} rispetto a $\dot{\mathbf{t}}_S$ si ottiene la relazione (2.107) di compatibilità cinematica dell'interfaccia,
- imponendo la stazionarietà di Π^{HW} rispetto a $\dot{\chi}_S$ si ottiene la relazione (2.108) di additività della variabile interna che descrive il comportamento softening dell'interfaccia,
- imponendo la stazionarietà di Π^{HW} rispetto a $(\dot{\epsilon}_e, \dot{\alpha}_e)$ si ottengono le equazioni (2.3.1) che descrivono la parte reversibile del legame costitutivo del continuo,
- imponendo la stazionarietà di Π^{HW} rispetto a $(\dot{\epsilon}_p, \dot{\alpha}_p)$ si ottiene l'equazione (2.73) che descrive la parte irreversibile del legame costitutivo del continuo,
- imponendo la stazionarietà di Π^{HW} rispetto a $(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}, \dot{\alpha}_{S_e})$ si ottengono le equazioni costitutive che descrivono il comportamento reversibile dell'interfaccia,
- imponendo la stazionarietà di Π^{HW} rispetto a $(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}, \dot{\alpha}_{S_p})$ si ottiene l'equazione costitutiva che descrive il comportamento irreversibile dell'interfaccia,
- imponendo la stazionarietà di Π^{HW} rispetto a $\dot{\mathbf{u}}$ si ottengono le equazioni di equilibrio nel continuo e sulla frontiera:

$$\begin{aligned} -\mathbf{C}^T \dot{\sigma} &= \dot{\mathbf{b}} & \text{in} & \quad \Omega - S \\ \mathcal{N} \dot{\sigma} &= \dot{\mathbf{q}} & \text{su} & \quad \partial(\Omega - S)_q \\ \mathcal{N} \dot{\sigma} &= \dot{\mathbf{r}} & \text{su} & \quad \partial(\Omega - S)_u \end{aligned} \quad (2.110)$$

- imponendo la stazionarietà di Π^{HW} rispetto a $\dot{\mathbf{u}}$ si riottengono le equazioni di equilibrio nel continuo e sulla frontiera (2.110); si ottiene inoltre l'equazione di equilibrio sull'interfaccia:

$$\mathcal{N} \dot{\sigma} = \dot{\mathbf{t}}_S. \quad (2.111)$$

Il soddisfacimento delle equazioni appena ricavate corrisponde alla ottimizzazione del funzionale (2.109), il quale risulta convesso in $(\dot{\epsilon}_e, \dot{\epsilon}_p, \dot{\alpha}_e, \dot{\alpha}_p, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}, \dot{\alpha}_{S_e}, \dot{\alpha}_{S_p})$ e lineare in $(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}})$, in $(\dot{\sigma}, \dot{\chi}, \dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S)$ ed in $\dot{\mathbf{r}}$. Tale problema di ottimizzazione si pone nella forma:

$$\inf_{(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}})} \inf_{(\dot{\sigma}, \dot{\chi}, \dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S)} \inf_{\dot{\mathbf{r}}} \inf_{(\dot{\epsilon}_e, \dot{\epsilon}_p, \dot{\alpha}_e, \dot{\alpha}_p, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}, \dot{\alpha}_{S_e}, \dot{\alpha}_{S_p})} \Pi_t^{HW} \quad (2.112)$$

Problema di ottimizzazione

2.4.1 Funzionale di Hellinger-Reissner

Si vuole pervenire ad una forma del problema di ottimizzazione nella quale compaia un funzionale che dipenda dalle sole variabili statiche e dai campi di spostamento

$$\inf_{(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}})} \sup_{(\dot{\sigma}, \dot{\chi}, \dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S)} \inf_{\dot{\mathbf{r}}} \Pi_t^{HR} \left(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\sigma}, \dot{\chi}, \dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S, \dot{\mathbf{r}} \right) \quad (2.113)$$

dove Π^{HR} è il funzionale di Hellinger-Reissner generalizzato, che può essere ottenuto dal funzionale di Hu-Washizu (2.109) eliminando le variabili $\dot{\varepsilon}_e, \dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_e, \dot{\alpha}_p, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}, \dot{\alpha}_{S_e}, \dot{\alpha}_{S_p}$:

$$\Pi^{HR} = \inf_{(\dot{\varepsilon}_e, \dot{\varepsilon}_p, \dot{\alpha}_e, \dot{\alpha}_p, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_e}, \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{S_p}, \dot{\alpha}_{S_e}, \dot{\alpha}_{S_p})} \Pi^{HW} \quad (2.114)$$

Ricordando le relazioni per il continuo e per l'interfaccia, che esprimono il potenziali elastico e di incrudimento complementari in funzione dei rispettivi potenziali complementari, e le relazioni che legano la dissipazione complementare e la dissipazione, si ottiene:

$$\begin{aligned} \Pi_t^{HR} = & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} (\varphi'_t(\dot{\sigma}) + \pi'_t(\dot{\chi})) d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} (\varphi'_t(\dot{\sigma}) + \pi'_t(\dot{\chi})) d\Omega - \\ & - \int_S (\varphi'_{S,t}(\dot{\mathbf{t}}_S) + \pi'_{S,t}(\dot{\chi}_S)) dS - \\ & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} d'_t(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} d'_t(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) d\Omega - \int_S d'_{S,t}(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) dS + \\ & + \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \dot{\sigma}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega_\varphi - S} \dot{\sigma}^T (\mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_S \dot{\mathbf{t}}_S^T \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket dS - \\ & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \dot{\mathbf{b}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} \dot{\mathbf{b}}^T (\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial(\Omega - \Omega_\varphi)_q} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \\ & - \int_{\partial(\Omega_\varphi - S)_q} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial(\Omega - \Omega_\varphi)_u} \dot{\mathbf{r}}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \\ & - \int_{\partial(\Omega_\varphi - S)_u} \dot{\mathbf{r}}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) d\Omega \end{aligned} \quad (2.115)$$

Imponendo le condizioni di stazionarietà del funzionale (2.115) si ottengono le equazioni che governano il problema. In particolare:

Stazionarietà
 Π^{HR} di

- imponendo la stazionarietà di Π^{HR} rispetto a $(\dot{\sigma}, \dot{\chi})$ si ottengono le equazioni costitutive del continuo (2.39):

$$\left(\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \frac{\partial \varphi'_t}{\partial \dot{\sigma}}, -\frac{\partial \pi'_t}{\partial \dot{\chi}} \right) \in \partial d'_t(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) \quad \text{in } \Omega - \Omega_\varphi \quad (2.116a)$$

$$\left(\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \frac{\partial \varphi'_t}{\partial \dot{\sigma}}, -\frac{\partial \pi'_t}{\partial \dot{\chi}} \right) \in \partial d'_t(\dot{\sigma}, \dot{\chi}) \quad \text{in } \Omega_\varphi - S \quad (2.116b)$$

nella quale si è implicitamente imposta la relazione di compatibilità cinematica interna nel continuo (2.104) e la relazione di additività della variabile interna,

- imponendo la stazionarietà di Π^{HW} rispetto a $(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S)$ si ottengono le equazioni costitutive che descrivono il comportamento dell'interfaccia:

$$\left(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket - \frac{\partial \varphi'_{S,t}}{\partial \dot{\mathbf{t}}_S}, -\frac{\partial \pi'_{S,t}}{\partial \dot{\chi}_S} \right) \in \partial d'_{S,t}(\dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S) \quad (2.117)$$

nelle quali si sono implicitamente imposte la relazione di additività della variabile interna (2.31) che descrive il comportamento softening dell'interfaccia e la relazione di compatibilità cinematica sull'interfaccia (2.107),

- imponendo la stazionarietà di Π^{HW} rispetto a $\dot{\mathbf{r}}$ si ottengono le equazioni (2.106) di compatibilità cinematica sulla frontiera vincolata,
- imponendo la stazionarietà di Π^{HW} rispetto a $\dot{\hat{\mathbf{u}}}$ si ottengono le equazioni di equilibrio nel continuo e sulla frontiera (2.110):
- imponendo la stazionarietà di Π^{HW} rispetto a $\dot{\hat{\mathbf{u}}}$ si riottengono le equazioni di equilibrio nel continuo e sulla frontiera (2.110); si ottiene inoltre l'equazione di equilibrio sull'interfaccia (2.111).

2.4.2 Regolarizzazione

Il funzionale di Hellinger-Reissner, definito dalla (2.115), non risulta differenziabile per la presenza della funzione indicatrice degli insiemi K e K_S degli stati tensionali ammissibili rispettivamente del continuo e

dell'interfaccia. Al fine di rendere differenziabile il funzionale si adotta una regolarizzazione di tipo Lagrangian [14, 10]:

$$\text{ind}K = \sup_{\lambda \geq 0} [\dot{\lambda}g(\sigma, \chi)] \quad (2.118)$$

$$\text{ind}K_S = \sup_{\lambda_S \geq 0} [\dot{\lambda}_S g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)] \quad (2.119)$$

nelle quali $\dot{\lambda}$ e $\dot{\lambda}_S$ sono due moltiplicatori plastici lagrangiani non negativi. Il problema di ottimizzazione assume pertanto l'espressione regolarizzata

$$\inf_{(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}})} \sup_{(\dot{\sigma}, \dot{\chi}, \dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S)} \inf_{\mathbf{r}} \inf_{\lambda, \lambda_S} \Pi_t^{HR}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\sigma}, \dot{\chi}, \dot{\mathbf{t}}_S, \dot{\chi}_S, \dot{\lambda}, \dot{\lambda}_S, \mathbf{r}) \quad (2.120)$$

dove

$$\begin{aligned} \Pi_t^{HR} = & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} (\varphi'_t(\dot{\sigma}) + \pi'_t(\dot{\chi})) d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} (\varphi'_t(\dot{\sigma}) + \pi'_t(\dot{\chi})) d\Omega - \\ & - \int_S (\varphi'_{S,t}(\dot{\mathbf{t}}_S) + \pi'_{S,t}(\dot{\chi}_S)) dS - \\ & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \dot{\lambda}g(\sigma, \chi) d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} \dot{\lambda}g(\sigma, \chi) d\Omega - \int_S \dot{\lambda}_S g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) dS + \\ & + \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \dot{\sigma}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega_\varphi - S} \dot{\sigma}^T (\mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_S \dot{\mathbf{t}}_S^T [\mathbf{u}] dS - \\ & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \dot{\mathbf{b}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} \dot{\mathbf{b}}^T (\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial(\Omega - \Omega_\varphi)_q} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \\ & - \int_{\partial(\Omega_\varphi - S)_q} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial(\Omega - \Omega_\varphi)_u} \dot{\mathbf{r}}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \\ & - \int_{\partial(\Omega_\varphi - S)_u} \dot{\mathbf{r}}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) d\Omega \end{aligned} \quad (2.121)$$

Imponendo le condizioni di stazionarietà del funzionale regolarizzato (2.121), si ottiene la forma regolarizzata delle equazioni che governano il problema, nel seguito riportate nell'ipotesi di legame elastico lineare e di incrudimento lineare sia del continuo che dell'interfaccia:

- equazioni costitutive del continuo integro $\Omega - \Omega_\varphi$:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{E}^{-1}\dot{\sigma} + \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \sigma} \quad (2.122a)$$

$$\mathbf{H}^{-1}\dot{\chi} + \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \chi} = 0 \quad (2.122b)$$

$$g(\sigma, \chi) = 0 \quad (2.122c)$$

- equazioni costitutive del continuo attraversato $\Omega_\varphi - S$:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{E}^{-1}\dot{\sigma} + \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \sigma} \quad (2.123a)$$

$$\mathbf{H}^{-1}\dot{\chi} + \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma, \chi)}{\partial \chi} = 0 \quad (2.123b)$$

$$g(\sigma, \chi) = 0 \quad (2.123c)$$

- equazioni costitutive dell'interfaccia S :

$$\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \mathbf{E}_S^{-1}\dot{\mathbf{t}}_S + \dot{\lambda}_S \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \mathbf{t}_S} \quad (2.124a)$$

$$\mathbf{H}_S^{-1}\dot{\chi}_S + \dot{\lambda}_S \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \chi_S} = 0 \quad (2.124b)$$

$$g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = 0 \quad (2.124c)$$

- equazioni di equilibrio del continuo (integro ed attraversato), sulla parte di frontiera caricata e sulla parte vincolata:

$$\begin{aligned} -\mathbf{C}^T \dot{\sigma} &= \dot{\mathbf{b}} & \text{in} & \Omega - S \\ \mathcal{N} \dot{\sigma} &= \dot{\mathbf{q}} & \text{su} & \partial(\Omega - S)_q \\ \mathcal{N} \dot{\sigma} &= \dot{\mathbf{r}} & \text{su} & \partial(\Omega - S)_u \end{aligned} \quad (2.125)$$

- equazioni di equilibrio dell'interfaccia:

$$\mathcal{N} \dot{\sigma} = \dot{\mathbf{t}}_S. \quad (2.126)$$

Continuo elastico ed interfaccia dissipativa

Nell'ipotesi di comportamento elastico lineare del continuo e di interfaccia con comportamento rigidoplastica, le equazioni costitutive (2.122), (2.123) e (2.124) si particolarizzano rispettivamente:

- equazioni costitutive del continuo integro $\Omega - \Omega_\varphi$:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E} \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} \quad (2.127)$$

- equazioni costitutive del continuo attraversato $\Omega_\varphi - S$:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E} \left[\mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} \right] \quad (2.128)$$

- equazioni costitutive dell'interfaccia S :

$$\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \dot{\lambda}_S \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \mathbf{t}_S} \quad (2.129a)$$

$$\mathbf{H}_S^{-1} \dot{\chi}_S + \dot{\lambda}_S \frac{\partial g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S)}{\partial \chi_S} = 0 \quad (2.129b)$$

$$g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = 0 \quad (2.129c)$$

2.5 Un semplice esempio

Si consideri la lastra di calcestruzzo riportata in Figura 2.5(a), sul cui lato sinistro è impedito lo spostamento orizzontali u_y ; sul lato destro viene impresso un cedimento orizzontale di intensità δ crescente. Si ipotizzi che in corrispondenza dei punti di ascissa $y = a/2$ vi sia la presenza di difetti o imperfezioni.

Per il continuo si assume comportamento elastico lineare isotropo, caratterizzato da modulo di elasticità normale E e coefficiente di Poisson ν . Il comportamento dell'interfaccia, rigidoplastico con softening lineare (Figura 2.5(b)), è descritto attraverso la legge trazione separazione:

$$t_{S_n} = f_0 + H_S \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_n} \quad (2.130)$$

dove H_S è il modulo di incrudimento dell'interfaccia:

$$H_S = -\frac{f_0^2}{2G_f} \quad (2.131)$$

nella quale con f_0 si è indicata la resistenza a trazione del calcestruzzo e con G_f l'energia di frattura, che rappresenta l'area sottesa dalla curva di Figura 2.5(b). D'altra parte risulta

$$H_S = -\frac{f_0}{[[\mathbf{u}]]_{S0}} \quad (2.132)$$

e quindi la (2.130) diventa:

$$t_{Sn} = f_0 \left[1 - \frac{[[\mathbf{u}]]_S}{[[\mathbf{u}]]_{S0}} \right] \quad (2.133)$$

dove $[[\mathbf{u}]]_{S0}$ è il valore di apertura dell'interfaccia che segna il passaggio dalla zona coesiva a quella libera da tensioni.

La funzione di attivazione dell'interfaccia corrisponde al criterio della massima tensione normale di Rankine:

$$g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = \mathbf{t}_S^T \mathbf{n} - f_0 - \chi_S \quad (2.134)$$

avendo indicato con \mathbf{n} la normale alla direzione dell'interfaccia.

Finche la tensione normale

$$\sigma = E \frac{\delta}{a} \leq f_0 \quad (2.135)$$

non eccede il valore della resistenza a trazione del calcestruzzo f_0 , ovvero finche lo spostamento impresso risulta minore dello spostamento limite elastico

$$\delta \leq \frac{f_0}{E} a \quad (2.136)$$

la lastra si comporta elasticamente (tratto OP); pertanto il campo degli spostamenti ha componenti:

$$u_y = \frac{\delta}{a} y \quad (2.137a)$$

$$u_z = -\nu \frac{\delta}{a} z \quad (2.137b)$$

Dalle figure 2.5 si nota che la componente orizzontale del campo di spostamento u_y , le tensioni normali σ_y ed crescono proporzionalmente al crescere dello spostamento impresso δ , mentre la componente verticale del campo di spostamento u_z diminuisce e il salto nel campo degli spostamenti $[[\mathbf{u}]]_S$ si mantiene nullo (tratto OP). Inoltre la componente orizzontale dello spostamento è continua, ed varia linearmente con y (segmento contrassegnato con P in Figura 2.5(c)).

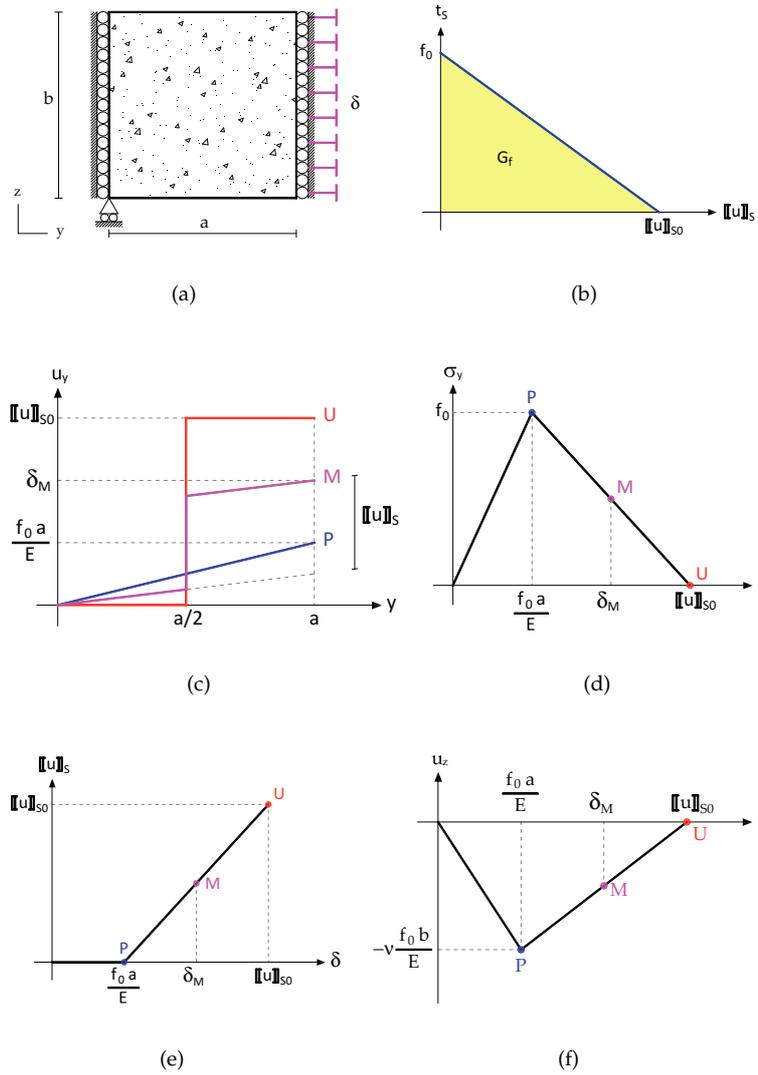


Figura 2.5: (a) Lastra tesa, (b) legge trazione separazione, (c) spostamento longitudinale, (d) tensione normale σ_y , (e) salto e (f) spostamento trasversale.

Appena lo spostamento impresso raggiunge il valore $\frac{f_0}{E} a$, la condizione sulla funzione di attivazione dell'interfaccia viene soddisfatta con l'uguaglianza ($g_S = 0$): lungo i punti di ascissa $a/2$ si potrebbe attivare l'interfaccia. Affinchè l'interfaccia si attivi deve risultare soddisfatta con il segno di uguaglianza la condizione di consistenza $\dot{g}_S = 0$, fatto che si verifica quando lo spostamento impresso, raggiunto il valore $\frac{f_0}{E} a$, continua a crescere.

In tal caso la lastra si presenta divisa in due lastre più piccole di dimensioni $(a/2 \times b)$, che risultano tese. Il campo degli spostamenti in ciascuna lastra è lineare, del tipo (2.137), ma in corrispondenza dell'interfaccia presenta un salto (Figura 2.5(c), curva M):

$$u_y = \underbrace{\frac{\delta}{a} y}_{\hat{u}_y} + \underbrace{\left(\mathbb{H} \left(y - \frac{a}{2} \right) - \frac{y}{a} \right) \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S}_{\hat{u}_y} \quad (2.138a)$$

$$u_z = \underbrace{-\nu \frac{\delta}{a} z}_{\hat{u}_z} + \underbrace{\nu \frac{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S}{a} z}_{\hat{u}_z} \quad (2.138b)$$

dove $\mathbb{H} \left(y - \frac{a}{2} \right)$ è la funzione di Heaveside:

$$\mathbb{H} \left(y - \frac{a}{2} \right) = \begin{cases} 0, & y < a/2 \\ 1, & y > a/2 \end{cases} \quad (2.139)$$

Dal campo degli spostamenti (2.138) si ricavano le deformazioni nelle lastre

$$\varepsilon_y = \underbrace{\frac{\delta}{a}}_{\hat{\varepsilon}_y} + \underbrace{\left(-\frac{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S}{a} \right)}_{\hat{\varepsilon}_y}$$

$$\varepsilon_z = \underbrace{-\nu \frac{\delta}{a}}_{\hat{\varepsilon}_z} + \underbrace{\nu \frac{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S}{a}}_{\hat{\varepsilon}_z}$$

e le relative tensioni (Figura 2.5(d))

$$\sigma_y = E \frac{\delta - \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S}{a}. \quad (2.140)$$

Al fine di calcolare il salto nel campo degli spostamenti $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_S$, nello spirito del metodo degli spostamenti, si considera l'equazione di equilibrio all'interfaccia:

$$\sigma_y = t_{Sn} \quad (2.141)$$

dove σ_y e t_{Sn} sono date rispettivamente dalle relazioni (2.140) e (2.136). Sostituendo e risolvendo per $[[\mathbf{u}]]_S$ si ottiene (Figura 2.5(e)):

$$[[\mathbf{u}]]_S = \frac{\delta - \frac{f_0 a}{E}}{1 - \frac{f_0 a}{E [[\mathbf{u}]]_{S0}}} \quad (2.142)$$

Nella Figura 2.5 sono riportate le configurazioni deformate della lastra in corrispondenza dell'innesco dell'interfaccia, istante nel quale la tensione normale raggiunge il picco (P), durante l'apertura dell'interfaccia (M) e della completa apertura (U).

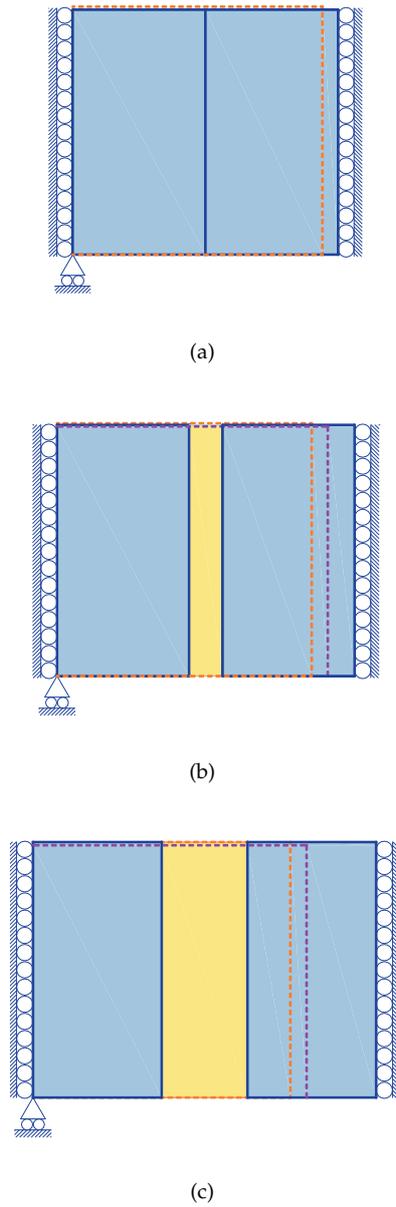


Figura 2.6: Configurazione indeformata (tratteggio arancio) a confronto con configurazioni deformate: (a) all'innesco (tratteggio magenta), (b) durante l'apertura e (c) alla completa apertura dell'interfaccia.

Capitolo 3

IMPLEMENTAZIONE NEL METODO AGLI ELEMENTI FINITI

La soluzione in forma chiusa del problema del solido elastoplastico attraversato da discontinuità forti è nota solo per una classe ristretta casi, caratterizzati da geometria e condizioni di carico semplici, come l'esempio mostrato nel paragrafo 2.5. Molti problemi vengono pertanto risolti in maniera approssimata attraverso l'utilizzo di metodi numerici. In questo capitolo è presentata la soluzione del problema del solido elastoplastico attraversato da discontinuità forti, descritto al capitolo 2, mediante la tecnica numerica che viene maggiormente applicato per risolvere problemi con geometria e condizioni al contorno arbitrarie: il Metodo agli Elementi Finiti.

3.1 Formulazione in termini incrementali

L'analisi agli elementi finiti si pone l'obiettivo di tracciare la risposta di un modello strutturale soggetto ad una certa storia di carico. Tale obiettivo è perseguito usando una procedura incrementale-iterativa. La storia di carico viene allora suddivisa in N incrementi di ampiezza finita

$$\Delta t_{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt \quad (3.1)$$

tali che

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1}. \quad (3.2)$$

La generica variabile al generico istante di tempo t_{n+1} , adottando uno schema di integrazione totalmente implicito, assume l'espressione:

$$\underbrace{\sigma(t_{n+1})}_{\sigma_{n+1}} = \underbrace{\sigma(t_n)}_{\sigma_n} + \underbrace{\dot{\sigma}(t_{n+1})\Delta t_{n+1}}_{\Delta\sigma_{n+1}} \quad (3.3)$$

e pertanto il problema di ottimizzazione (2.113) in termini incrementali si pone nella forma:

$$\inf_{(\Delta\hat{\mathbf{u}}, \Delta\bar{\mathbf{u}})} \sup_{(\Delta\sigma, \Delta\chi, \Delta\mathbf{t}_S, \Delta\chi_S)} \inf_{(\Delta\lambda \geq 0, \Delta\lambda_S \geq 0)} \inf_{\Delta\mathbf{r}} \Pi_t^{HR} \quad (3.4)$$

dove

$$\begin{aligned} \Pi_t^{HR} = & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} (\varphi'_t(\Delta\sigma) + \pi'_t(\Delta\chi)) d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} (\varphi'_t(\Delta\sigma) + \pi'_t(\Delta\chi)) d\Omega - \\ & - \int_S (\varphi'_{S,t}(\Delta\mathbf{t}_S) + \pi'_{S,t}(\Delta\chi_S)) dS - \\ & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \Delta\lambda g(\sigma, \chi) d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} \Delta\lambda g(\sigma, \chi) d\Omega - \int_S \Delta\lambda_S g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) dS + \\ & + \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \Delta\sigma^T \mathbf{C} \Delta\hat{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega_\varphi - S} \Delta\sigma^T (\mathbf{C} \Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \Delta\tilde{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_S \Delta\mathbf{t}_S^T \Delta[[\tilde{\mathbf{u}}]] dS - \\ & - \int_{\Omega - \Omega_\varphi} \Delta\mathbf{b}^T \Delta\hat{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega_\varphi - S} \Delta\mathbf{b}^T (\Delta\hat{\mathbf{u}} + \Delta\tilde{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial(\Omega - \Omega_\varphi)_q} \Delta\mathbf{q}^T \Delta\hat{\mathbf{u}} d\Omega - \\ & - \int_{\partial(\Omega_\varphi - S)_q} \Delta\mathbf{q}^T (\Delta\hat{\mathbf{u}} + \Delta\tilde{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial(\Omega - \Omega_\varphi)_u} \Delta\mathbf{r}^T (\Delta\hat{\mathbf{u}} - \Delta\bar{\mathbf{u}}) d\Omega - \\ & - \int_{\partial(\Omega_\varphi - S)_u} \Delta\mathbf{r}^T (\Delta\hat{\mathbf{u}} - \Delta\bar{\mathbf{u}}) d\Omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

avendo ommesso l'indice $n + 1$ per brevità di notazione.

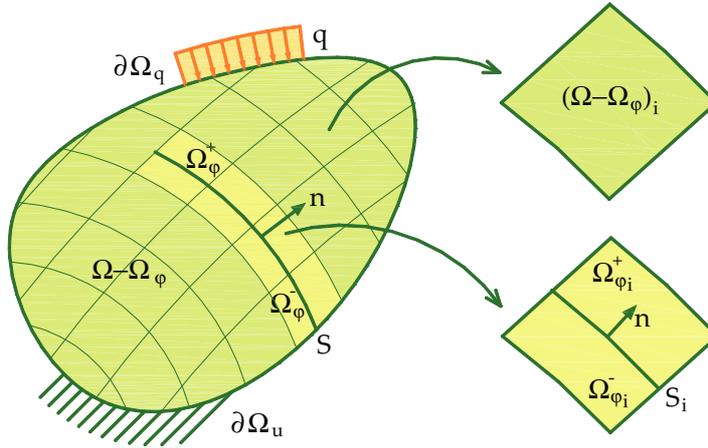


Figura 3.1: Discretizzazione della geometrica: elementi interi ed attraversati dall'interfaccia.

3.2 Cinematica delle discontinuità forti discretizzate

Si consideri inoltre una suddivisione del dominio Ω in n_{el} elementi finiti, dei quali n_{φ} sono attraversati dall'interfaccia, tali che:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n_{el}} \Omega_i \quad (3.6)$$

Nell'ambito dell' i -esimo elemento finito, la parte regolare del campo di spostamento $\hat{\mathbf{u}}_i$ viene espresso, attraverso le funzioni di forma standard, in funzione del vettore degli spostamenti nodali $\hat{\mathbf{d}}_i$ attraverso la relazione [40, 53]:

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{d}}_i \quad (3.7)$$

dove $\hat{\mathbf{N}}_i$ rappresenta la matrice delle funzioni di forma standard dell'elemento. Inoltre detto $\hat{\mathbf{d}}$ il vettore degli spostamenti nodali dell'intero sistema si ha:

$$\hat{\mathbf{d}}_i = \hat{\mathbf{L}}_i \hat{\mathbf{d}} \quad (3.8)$$

dove $\hat{\mathbf{L}}_i$ è la matrice di connettività nodale dell' i -esimo elemento. Inoltre, negli n_{φ} elementi attraversati dalla discontinuità, la parte singo-

lare del campo di spostamento $\tilde{\mathbf{u}}_i$ è dato dalla relazione:

$$\tilde{\mathbf{u}}_i = \tilde{\mathbf{N}}_i \tilde{\mathbf{d}}_i \quad (3.9)$$

nella quale $\tilde{\mathbf{N}}_i$ è la matrice delle funzioni di forma singolari dell'elemento, $\tilde{\mathbf{d}}_i$ è il vettore degli spostamenti nodali aggiuntivi dell'elemento, espresso in funzione del vettore degli spostamenti nodali aggiuntivi dell'intero sistema attraverso la relazione:

$$\tilde{\mathbf{d}}_i = \tilde{\mathbf{L}}_i \tilde{\mathbf{d}} \quad (3.10)$$

dove $\tilde{\mathbf{L}}_i$ è la matrice di connettività nodale dei gradi di libertà singolari dell' i -esimo elemento.

Dalle relazioni è possibile derivare le deformazioni. Sostituendole rispettivamente nella (2.27) si ottiene

$$\varepsilon_i = \mathbf{C}\hat{\mathbf{B}}_i \hat{\mathbf{d}}_i + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{B}}_i \tilde{\mathbf{d}}_i. \quad (3.11)$$

nelle quali si è posto $\hat{\mathbf{B}}_i = \mathbf{C}\hat{\mathbf{N}}_i$ e $\tilde{\mathbf{B}}_i = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{N}}_i$, rispettivamente dette matrice delle derivate delle funzioni di forma regolari e singolari.

3.3 Funzioni di forma

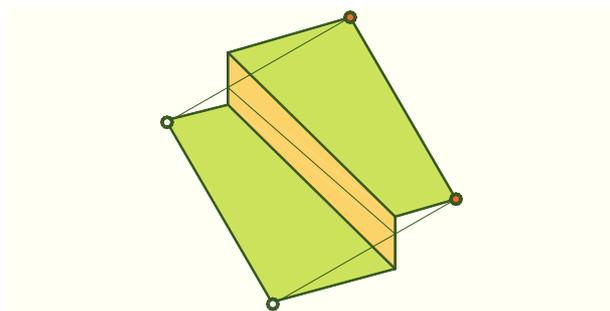
Il campo degli spostamenti regolari è approssimato con le funzioni di forma dell'elemento rettangolare bilineare a quattro nodi standard.

Le funzioni di forma che approssimano il campo degli spostamenti singolare si presentano discontinue in corrispondenza dell'interfaccia (Figura 3.3). In letteratura sono presenti due tipi di approssimazioni per il salto: salto costante lungo l'interfaccia [34] e salto lineare [1].

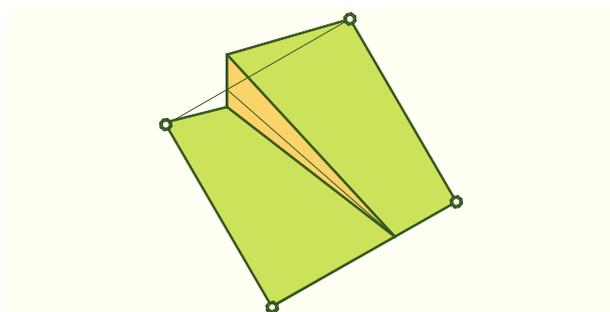
Nell'ipotesi di salto costante, il campo degli spostamenti è arricchito attraverso l'aggiunta di un grado di libertà per componente di spostamento. In tal caso, come si vedrà in seguito, le derivate spaziali di tali funzioni risultano continue in corrispondenza dell'interfaccia (Figure 3.3(a) e 3.3(b)).

Il salto però, nel passaggio da un elemento attraversato all'altro, è discontinuo (Figura 3.4(a)).

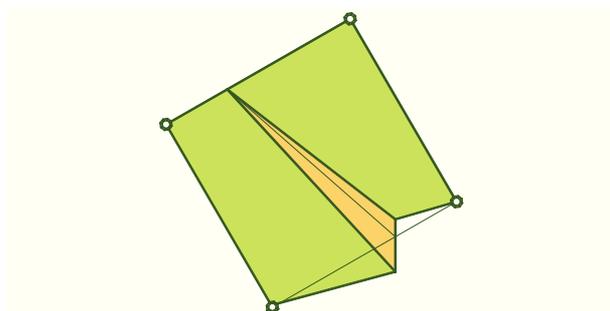
Scegliendo di approssimare il salto linearmente il campo degli spostamenti arricchito è necessario aggiungere due gradi di libertà per componente di spostamento. Il problema diventa quindi di dimensioni maggiori rispetto al caso di salto costante. Inoltre le derivate spaziali di tali funzioni risultano discontinue in corrispondenza dell'interfaccia (Figure 3.3(c) e 3.3(d)). Il salto in corrispondenza dell'interfaccia non



(a)



(b)



(c)

Figura 3.2: Funzioni di forma singolari per interpolazione del salto: (a) costante; (b) e (c) lineare.

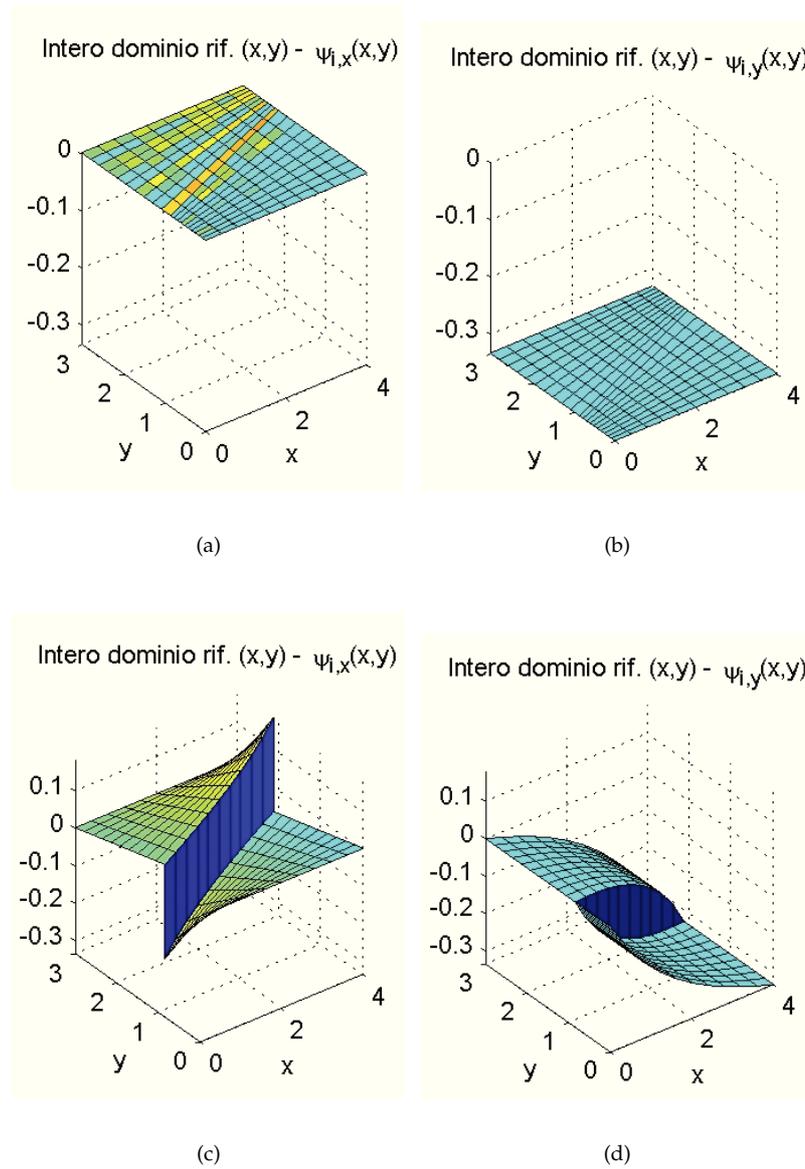


Figura 3.3: Derivate delle funzioni di forma singolari per interpolazione del salto: (a) e (b) costante; (c) e (d) lineare.

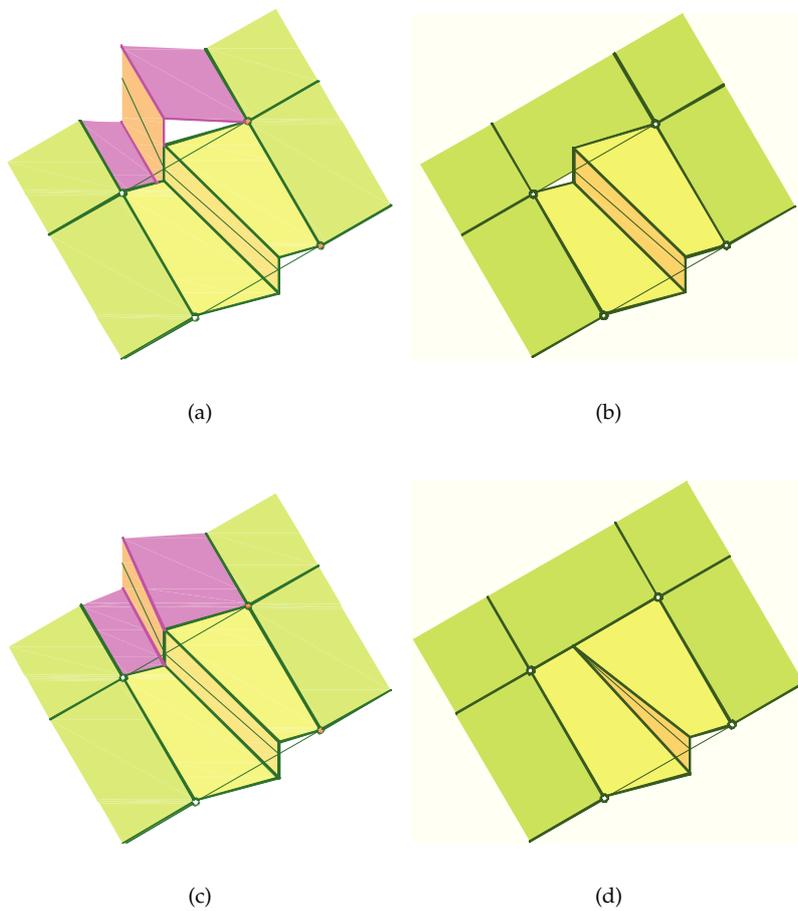


Figura 3.4: Funzioni di forma singolari per interpolazione del salto: (a) e (b) costante; (c) e (d) lineare.

presenta discontinuità nel passaggio da un elemento attraversato all'altro (Figura 3.4(c)).

Indipendentemente dall'approssimazione scelta per il salto, tali funzioni sono costruite in modo da riprodurre il moto rigido tra le due parti dell'elemento finito attraversato dalla discontinuità.

Al fine di poter ricavare l'espressione analitica di queste funzioni di forma, si consideri un elemento finito rettangolare bilineare a quattro nodi attraversato da un interfaccia inclinata rispetto ai lati (Figure 3.5(a) e 3.5(b)). Tali espressioni saranno dapprima ricavate nell'ipotesi di salto costante; successivamente si ricaveranno le analoghe espressioni per il caso di salto lineare.

3.3.1 Salto costante

Si consideri un elemento rettangolare bilineare a quattro nodi attraversato da una interfaccia. Si impoqa un generico moto rigido tra le due parti che, nel caso di salto costante, consiste in una traslazione relativa tra le due parti (Figura 3.5(a)).

Le due componenti del campo degli spostamenti risultano:

$$\tilde{u}_n = \mathbb{H} \tilde{d}_n \quad (3.12a)$$

$$\tilde{u}_m = \mathbb{H} \tilde{d}_m \quad (3.12b)$$

dove \mathbb{H} è la funzione di Heaveside D'altra parte deve essere

$$u_n = \hat{u}_n + \tilde{u}_n \quad (3.13a)$$

$$u_m = \hat{u}_m + \tilde{u}_m \quad (3.13b)$$

dove

$$\hat{u}_n = (N_2 + N_3) \tilde{d}_n \quad (3.14a)$$

$$\hat{u}_m = (N_2 + N_3) \tilde{d}_m \quad (3.14b)$$

$$\tilde{u}_n = \tilde{N} \tilde{d}_n \quad (3.15a)$$

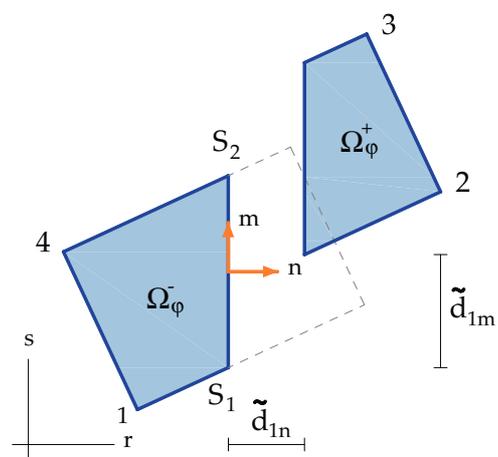
$$\tilde{u}_m = \tilde{N} \tilde{d}_m \quad (3.15b)$$

La funzione di forma singolare risulta pertanto

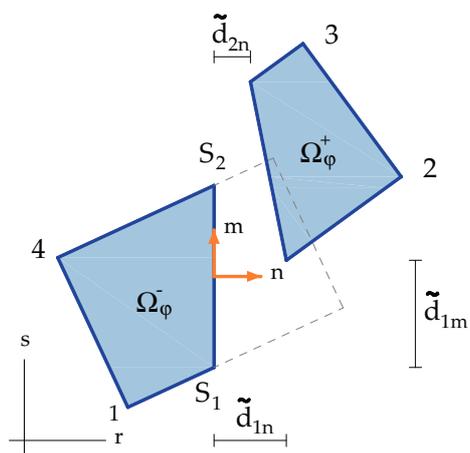
$$\tilde{N} = \mathbb{H} - (N_2 + N_3) \quad (3.16)$$

In generale la funzione di forma singolare risulta data dalla relazione [34]:

$$\tilde{N} = \mathbb{H} - \varphi \quad (3.17)$$



(a)



(b)

Figura 3.5: Moto rigido: (a) salto costante e (b) salto lineare.

dove φ è data dalla somma delle funzioni di forma relative ai nodi $N_{\varphi+}$ che si trovano sul contorno di Ω_{φ}^+ :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N_{\varphi+}} N_i. \quad (3.18)$$

La relazione (3.17) consente di calcolare la funzione \tilde{N} anche nei casi in cui l'interfaccia non interseca due lati opposti (Figura 3.6(a)).

3.3.2 Salto lineare

Nel caso di salto lineare il moto rigido tra le due parti consiste in una traslazione ed in una rotazione relative (Figura 3.5(b)).

Le due componenti del campo degli spostamenti risultano:

$$\tilde{u}_n = \mathbb{H} \left(\tilde{d}_{1n} - \frac{\tilde{d}_{1n} - \tilde{d}_{2n}}{l_S} (s - s_{S_1}) \right) \quad (3.19)$$

$$\tilde{u}_m = \mathbb{H} \left(\tilde{d}_{1m} + \frac{\tilde{d}_{1n} - \tilde{d}_{2n}}{l_S} (r - r_{S_1}) \right) \quad (3.20)$$

dove \mathbb{H} è la funzione di Heaveside ed l_S è la lunghezza dell'interfaccia. D'altra parte deve valere la relazione (3.13), nella quale

$$\begin{aligned} \hat{u}_n = & N_2 \left(\tilde{d}_{1n} - \frac{\tilde{d}_{1n} - \tilde{d}_{2n}}{l_S} (s_2 - s_{S_1}) \right) + \\ & + N_3 \left(\tilde{d}_{1n} - \frac{\tilde{d}_{1n} - \tilde{d}_{2n}}{l_S} (s_3 - s_{S_1}) \right) \end{aligned} \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_m = & N_2 \left(\tilde{d}_{1m} + \frac{\tilde{d}_{1n} - \tilde{d}_{2n}}{l_S} (r_2 - r_{S_1}) \right) + \\ & + N_3 \left(\tilde{d}_{1m} + \frac{\tilde{d}_{1n} - \tilde{d}_{2n}}{l_S} (r_3 - r_{S_1}) \right) \end{aligned} \quad (3.21b)$$

$$\tilde{u}_n = \tilde{N}_1 \tilde{d}_{1n} + \tilde{N}_2 \tilde{d}_{2n} \quad (3.22a)$$

$$\tilde{u}_m = \tilde{N}_1 \tilde{d}_{1m} + \tilde{N}_2 \tilde{d}_{2m} + \tilde{N}_1^{nm} \tilde{d}_{1n} + \tilde{N}_2^{nm} \tilde{d}_{2n} \quad (3.22b)$$

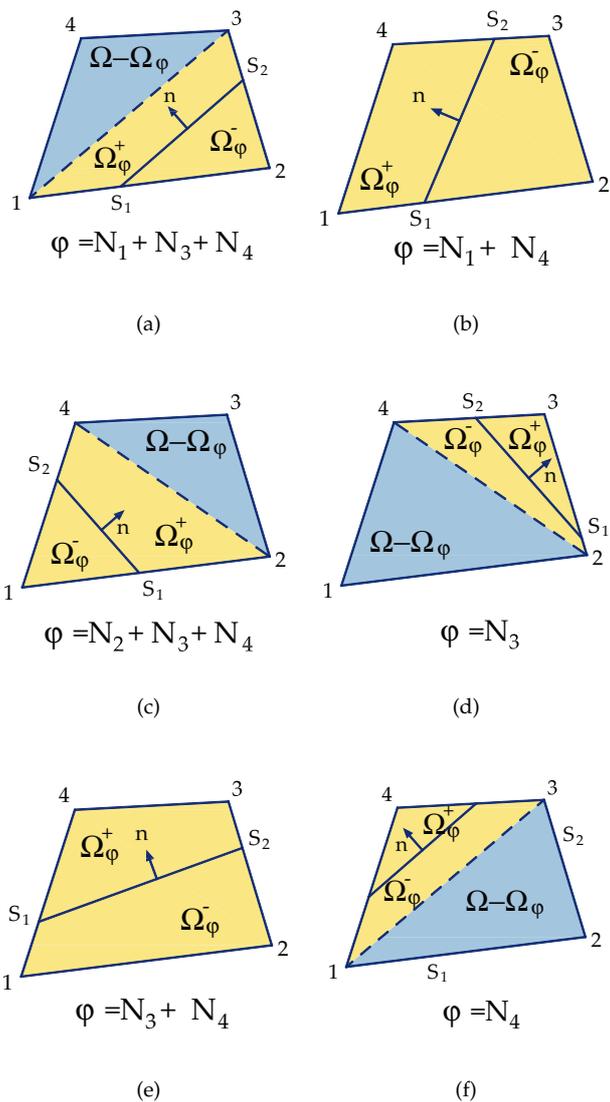


Figura 3.6: Funzioni di forma singolari (a) caso 1, (b) caso 2, (c) caso 3, (d) caso 4, (e) caso 5 e (f) caso 6.

Le funzioni di forma singolari risultano pertanto

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1 = & \mathbb{H} \left(1 - \frac{s - s_{S_1}}{l_S} \right) - \\ & - \left[N_2 \left(1 - \frac{s_2 - s_{S_1}}{l_S} \right) + N_3 \left(1 - \frac{s_3 - s_{S_1}}{l_S} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.23a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_2 = & \mathbb{H} \frac{s - s_{S_1}}{l_S} - \\ & - \left[N_2 \left(1 - \frac{s_2 - s_{S_1}}{l_S} \right) + N_3 \left(1 - \frac{s_3 - s_{S_1}}{l_S} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.23b)$$

$$\tilde{N}_1^{nm} = \mathbb{H} \frac{r - r_{S_1}}{l_S} - N_2 \frac{r_2 - r_{S_1}}{l_S} - N_3 \frac{r_3 - r_{S_1}}{l_S} \quad (3.24a)$$

$$\tilde{N}_2^{nm} = -\mathbb{H} \frac{r - r_{S_1}}{l_S} + N_2 \frac{r_2 - r_{S_1}}{l_S} + N_3 \frac{r_3 - r_{S_1}}{l_S} \quad (3.24b)$$

L'elemento finito ottenuto utilizzando le funzioni di forma appena ricavate presenta problemi di shear locking quando viene assegnata una distribuzione di tensioni con andamento lineare. Gli incrementi di tensione al bordo caricato vengono equilibrati dalle tensioni tangenziali spurie che nascono in un elemento a quattro nodi se sottoposto a sollecitazioni di flessione. Detto fenomeno impedisce la propagazione dell'interfaccia, in quanto la crescita delle tensioni tangenziali fa diminuire il valore delle trazioni all'interfaccia, che subisce uno scarico elastico.

Pensando di risolvere tali problemi di locking, il campo degli spostamenti regolari era stato approssimato con le funzioni di forma dell'elemento rettangolare biquadratico a otto nodi standard. Il problema del shear locking però persisteva.

Allora si è pensato di affiancare alle funzioni di forma discontinue, costruite in modo da riprodurre il moto rigido, ulteriori funzioni, nulle in corrispondenza dell'interfaccia (Figure 3.7(a)-3.7(d)) che conferiscano la capacità di deformarsi ai due sottoelementi individuati dall'interfaccia, analogamente a quanto fatto per la parte regolare della cinematica, passando da elementi bilineari a quattro ad elementi biquadratici a otto nodi.

3.4 Formulazione variazionale discretizzata

Al fine di ricavare la forma discretizzata delle equazioni che governano il problema del solido elastoplastico attraversato da discontinuità, si ricava l'espressione discretizzata in termini incrementali del funzionale di Hellinger-Reissner, sostituendo le espressioni (3.9) e (3.7),

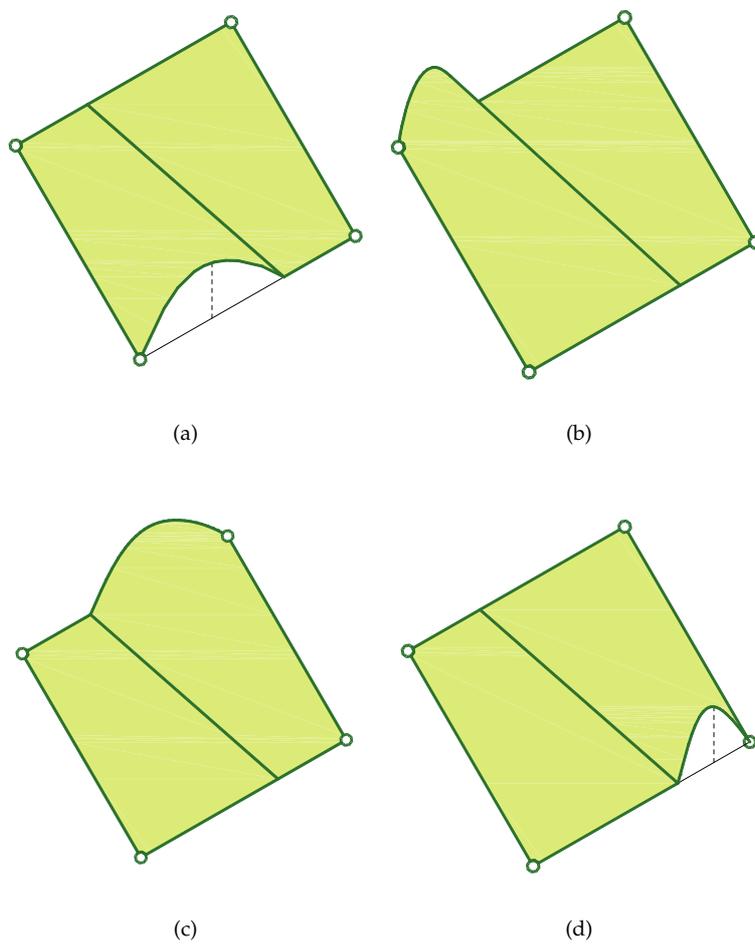


Figura 3.7: Funzioni di forma singolari.

che approssimano i campi di spostamento regolare $\hat{\mathbf{u}}$ e singolare $\tilde{\mathbf{u}}$, nell'equazione (3.5):

$$\begin{aligned}
\Pi_t^{HR} = & \sum_{i=1}^{n_{el}-n_\varphi} \left[- \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} (\varphi'_{t,i}(\Delta\sigma_i) + \pi'_{t,i}(\Delta\chi_i)) d\Omega - \right. \\
& - \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \Delta\lambda_i g(\sigma_i, \chi_i) d\Omega + \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \Delta\sigma_i^T \mathbf{C}\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} d\Omega - \\
& - \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \Delta\mathbf{b}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} d\Omega - \int_{\partial(\Omega-\Omega_\varphi)_{q,i}} \Delta\mathbf{q}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} d\Omega - \\
& \left. - \int_{\partial(\Omega-\Omega_\varphi)_{u,i}} \Delta\mathbf{r}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} - \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\bar{\mathbf{d}}) d\Omega \right] + \\
& + \sum_{i=1}^{n_\varphi} \left[\int_{(\Omega_\varphi-S)_i} (\varphi'_{t,i}(\Delta\sigma_i) + \pi'_{t,i}(\Delta\chi_i)) d\Omega - \right. \\
& - \int_{S_i} (\varphi'_{S,ti}(\Delta\mathbf{t}_{S,i}) + \pi'_{S,ti}(\Delta\chi_{S,i})) dS - \\
& - \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \Delta\lambda_i g(\sigma_i, \chi_i) d\Omega - \int_{S_i} \Delta\lambda_{S,i} g_S(\mathbf{t}_{S,i}, \chi_{S,i}) dS + \\
& + \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \Delta\sigma_i^T (\mathbf{C}\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{N}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta\tilde{\mathbf{d}}) d\Omega + \\
& + \int_{S_i} \Delta\mathbf{t}_{S,i}^T [\tilde{\mathbf{N}}_i] \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta\tilde{\mathbf{d}} dS - \\
& - \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \Delta\mathbf{b}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} + \tilde{\mathbf{N}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta\tilde{\mathbf{d}}) d\Omega - \\
& - \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_{q,i}} \Delta\mathbf{q}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} + \tilde{\mathbf{N}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta\tilde{\mathbf{d}}) d\Omega - \\
& \left. - \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_{u,i}} \Delta\mathbf{r}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\hat{\mathbf{d}} - \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta\bar{\mathbf{d}}) d\Omega \right]
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Il problema di ottimizzazione assume pertanto la forma:

$$\begin{aligned}
& \inf_{(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}})} \left\{ \sum_{i=1}^{n_{el}-n_\varphi} \left[\Phi_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i}(\Delta \hat{\mathbf{d}}) - \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \Delta \mathbf{b}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} d\Omega - \right. \right. \\
& \quad - \int_{\partial(\Omega-\Omega_\varphi)_{q,i}} \Delta \mathbf{q}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} dS - \\
& \quad - \left. \int_{\partial(\Omega-\Omega_\varphi)_{u,i}} \Delta \mathbf{r}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} - \Delta \bar{\mathbf{u}}) dS \right] + \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n_{el}} [\Phi_{(\Omega_\varphi-S)_i}(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}}) + \Phi_{S_i}(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}}) - \\
& \quad - \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \Delta \mathbf{b}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} + \tilde{\mathbf{N}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}) d\Omega - \\
& \quad - \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_{q,i}} \Delta \mathbf{q}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} + \tilde{\mathbf{N}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}) dS - \\
& \quad - \left. \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_{u,i}} \Delta \mathbf{r}_i^T (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} - \Delta \bar{\mathbf{u}}) dS \right] \left. \right\} \tag{3.26}
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
& \Phi_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i}(\Delta \hat{\mathbf{d}}) = \\
& = \sup_{(\Delta \sigma_i, \Delta \chi_i)} \inf_{\Delta \lambda_i \geq 0} \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \left[-(\varphi'_{t,i}(\Delta \sigma_i) + \pi'_{t,i}(\Delta \chi_i)) - \right. \\
& \quad - \Delta \lambda_i g(\sigma_i, \chi_i) + \\
& \quad \left. + \Delta \sigma_i^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} \right] d\Omega \tag{3.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{(\Omega_\varphi-S)_i}(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}}) = \\
& = \sup_{(\Delta \sigma_i, \Delta \chi_i)} \inf_{\Delta \lambda_i \geq 0} \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \left[-(\varphi'_{t,i}(\Delta \sigma_i) + \pi'_{t,i}(\Delta \chi_i)) - \right. \\
& \quad - \Delta \lambda_i g(\sigma_i, \chi_i) + \\
& \quad \left. + \Delta \sigma_i^T \mathbf{C} (\hat{\mathbf{N}}_i \hat{\mathbf{L}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}} + \tilde{\mathbf{N}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}) \right] d\Omega \tag{3.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{S_i}(\Delta \tilde{\mathbf{d}}) &= \\
&= \sup_{(\Delta \mathbf{t}_{S,i}, \Delta \chi_{S,i})} \inf_{\Delta \lambda_{S,i} \geq 0} \int_{S_i} \left[-(\varphi'_{S,t,i}(\Delta \mathbf{t}_{S,i}) + \pi'_{S,t,i}(\Delta \chi_{S,i})) - \right. \\
&\quad \left. - \Delta \lambda_{S,i} g_S(\mathbf{t}_{S,i}, \chi_i) + \right. \\
&\quad \left. + \Delta \mathbf{t}_{S,i}^T \llbracket \tilde{\mathbf{N}}_i \rrbracket \tilde{\mathbf{L}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}} \right] dS \tag{3.29}
\end{aligned}$$

La soluzione del problema di ottimizzazione (3.26) corrisponde al soddisfacimento delle equazioni di equilibrio nel continuo:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n_{el}-n_\varphi} \left[\int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{B}}_i^T \Delta \sigma_i(\Delta \hat{\mathbf{d}}) - \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{b}_i d\Omega - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\partial(\Omega-\Omega_\varphi)_{q,i}} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{q}_i dS - \int_{\partial(\Omega-\Omega_\varphi)_{u,i}} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{r}_i dS \right] + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n_\varphi} \left[\int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{B}}_i^T \Delta \sigma_i(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}}) - \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{b}_i d\Omega - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_{q,i}} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{q}_i dS - \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_{u,i}} \hat{\mathbf{L}}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{r}_i dS \right] = \mathbf{0} \tag{3.30a}
\end{aligned}$$

ed all'interfaccia:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n_\varphi} \left[\int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \tilde{\mathbf{L}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i^T \Delta \sigma_i(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}}) + \right. \\
&\quad \left. + \int_{S_i} \tilde{\mathbf{L}}_i^T \llbracket \tilde{\mathbf{N}}_i \rrbracket^T \Delta \mathbf{t}_{S,i}(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}}) - \right. \\
&\quad \left. - \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \tilde{\mathbf{L}}_i^T \tilde{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{b}_i d\Omega - \int_{\partial(\Omega_\varphi-S)_{iq}} \tilde{\mathbf{L}}_i^T \tilde{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{q}_i dS \right] = \mathbf{0}. \tag{3.30b}
\end{aligned}$$

La soluzione dei problemi di ottimizzazione (3.27), (3.28) e (3.29) corrisponde al soddisfacimento delle equazioni costitutive in forma de-

bole rispettivamente del continuo integro

$$\int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i d\Omega = \int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \left(\mathbf{E}_i^{-1} \Delta \sigma_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) d\Omega \quad (3.31a)$$

$$\int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} \left(\mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \chi} \right) d\Omega = \mathbf{0} \quad (3.31b)$$

$$\int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} g(\sigma_i, \chi_i) d\Omega = 0 \quad (3.31c)$$

del continuo attraversato dall'interfaccia

$$\int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \left(\hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i + \tilde{\mathbf{B}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i \right) d\Omega = \int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \left(\mathbf{E}_i^{-1} \Delta \sigma_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) d\Omega \quad (3.32a)$$

$$\int_{(\Omega_\varphi-S)_i} \left(\mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \chi} \right) d\Omega = \mathbf{0} \quad (3.32b)$$

$$\int_{(\Omega_\varphi-S)_i} g(\sigma_i, \chi_i) d\Omega = 0 \quad (3.32c)$$

e dell'interfaccia stessa

$$\int_{S_i} \llbracket \tilde{\mathbf{N}}_i \rrbracket \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i dS = \int_{S_i} \left(\mathbf{E}_{S,i}^{-1} \Delta \mathbf{t}_{S,i} + \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right) dS \quad (3.33a)$$

$$\int_{S_i} \left(\mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_{S,i} + \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \right) dS = \mathbf{0} \quad (3.33b)$$

$$\int_{S_i} g_S(\mathbf{t}_{S,i}, \chi_{S,i}) dS = 0 \quad (3.33c)$$

Le relazioni precedenti sono scritte nell'ipotesi di elasticità e di in-crudimento lineari.

3.5 Strategia di soluzione

3.5.1 Soluzione delle equazioni costitutive

Equazioni costitutive del continuo integro

Gli integrali che compaiono nella forma debole (3.37) dell'equazione costitutiva del continuo sono computati numericamente attraverso la

formula di quadratura di Gauss-Legendre:

$$\int_{(\Omega-\Omega_\varphi)_i} f(x, y, z) d\Omega = \sum_i^{PG(\Omega-\Omega_\varphi)_i} f(x_i, y_i, z_i) w_i \quad (3.34)$$

dove $f(x_i, y_i, z_i)$ sono i valori dell'integranda nei punti di Gauss e w_i sono i pesi. La generica equazione costitutiva diventa pertanto

$$\sum_i^{PG(\Omega-\Omega_\varphi)_i} f(x_i, y_i, z_i) w_i = 0, \quad (3.35)$$

relazione che risulta soddisfatta se ogni singolo addendo della sommatoria risulta nullo:

$$f(x_i, y_i, z_i) = 0. \quad (3.36)$$

Le equazioni costitutive del continuo integro pertanto vengono risolte in corrispondenza dei punti di Gauss del dominio del generico elemento finito non attraversato $(\Omega - \Omega_\varphi)_i$:

$$\hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i = \mathbf{E}_i^{-1} \Delta \sigma_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (3.37a)$$

$$\mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \chi} = \mathbf{0} \quad (3.37b)$$

$$g(\sigma_i, \chi_i) = 0. \quad (3.37c)$$

Nelle Figure 3.8(a) e 3.8(b) sono rappresentati i punti di Gauss di elementi non attraversati dall'interfaccia rispettivamente nel caso di elemento bilineare a quattro nodi e di elemento biquadratico a otto/nove nodi.

Equazioni costitutive del continuo attraversato

Le integrande che compaiono nella forma debole delle equazioni costitutive del continuo attraversato (3.32) risultano discontinue in corrispondenza dell'interfaccia S , a causa della presenza della matrice delle funzioni di forma $\tilde{\mathbf{N}}$ singolari e della matrice delle loro derivate $\tilde{\mathbf{B}}$. Tali integrande risultano però continue e regolari all'interno all'interno dei sottodomini in cui risulta diviso $\Omega_{\varphi i}$ dall'interfaccia. Gli integrali definiti sull'intero dominio del generico elemento finito attraversato

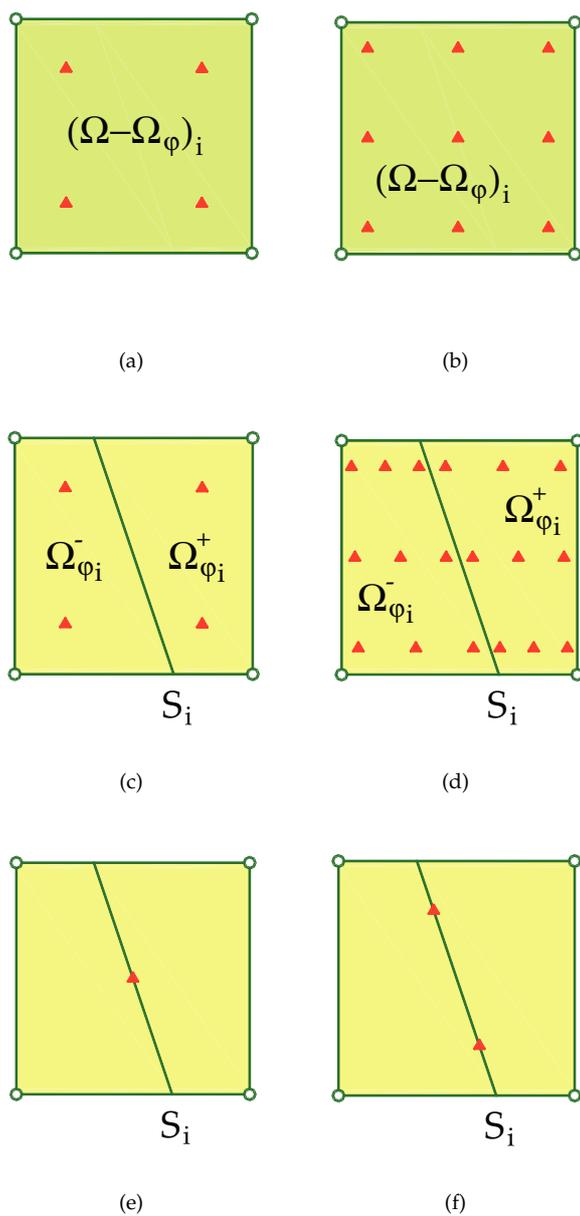


Figura 3.8: Punti di Gauss dei sottodomini $\Omega_{\varphi_i}^+$ e $\Omega_{\varphi_i}^-$ (a) e dell'interfaccia S per interpolazione del salto: (b) costante; (c) lineare.

vengono pertanto calcolati come la somma degli integrali sui sottodomini individuati dall'interfaccia:

$$\int_{\Omega_\varphi - S} f(x, y) d\Omega = \int_{\Omega_\varphi^+} f(x, y) d\Omega + \int_{\Omega_\varphi^-} f(x, y) d\Omega \quad (3.38)$$

Anche in questo caso gli integrali che compaiono nella (3.38) sono computati numericamente attraverso la formula di quadratura di Gauss-Legendre:

$$\int_{\Omega_\varphi^+} f(x, y, z) d\Omega = \sum_i^{PG_{\Omega_\varphi^+}} f(x_i, y_i, z_i) w_i \quad (3.39a)$$

$$\int_{\Omega_\varphi^-} f(x, y, z) d\Omega = \sum_i^{PG_{\Omega_\varphi^-}} f(x_i, y_i, z_i) w_i \quad (3.39b)$$

dove $f(x_i, y_i, z_i)$ sono i valori dell'integranda nei punti di Gauss del singolo sottodominio.

Le equazioni costitutive del continuo attraversato pertanto vengono risolte in corrispondenza dei punti di Gauss del dominio del generico elemento finito attraversato $(\Omega_\varphi - S)_i$, schematizzati in Figura 3.8(c) nel caso di salto costante ed elemento bilineare ed in Figura 3.8(d) nel caso di salto lineare ed elemento biquadratico:

$$\hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i + \tilde{\mathbf{B}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i = \mathbf{E}_i^{-1} \Delta \sigma_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (3.40a)$$

$$\mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_i + \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \chi} = \mathbf{0} \quad (3.40b)$$

$$g(\sigma_i, \chi_i) = 0 \quad (3.40c)$$

Equazioni costitutive dell'interfaccia

Anche nel caso dell'interfaccia gli integrali che compaiono nella forma debole (3.37) dell'equazione costitutiva sono computati numericamente attraverso la formula di quadratura di Gauss-Legendre (3.34). Pertanto le equazioni costitutive vengono risolte in corrispondenza dei punti di Gauss dell'interfaccia S_i :

$$\llbracket \tilde{\mathbf{N}}_i \rrbracket \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i dS = \mathbf{E}_{S,i}^{-1} \Delta \mathbf{t}_{S,i} + \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \quad (3.41a)$$

$$\mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_{S,i} + \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} = \mathbf{0} \quad (3.41b)$$

$$g_S(\mathbf{t}_{S,i}, \chi_{S,i}) = 0. \quad (3.41c)$$

Soluzione delle equazioni costitutive

A tal fine di risolvere i sistemi costitutivi non lineari si pongono le equazioni di tali sistemi in forma residuale:

- continuo integro

$$\mathbf{R}_\sigma = \hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i - \mathbf{E}_i^{-1} \Delta \sigma_i - \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (3.42a)$$

$$\mathbf{R}_\chi = -\mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_i - \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \chi} \quad (3.42b)$$

$$R_\lambda = -g(\sigma_i, \chi_i) = 0 \quad (3.42c)$$

- continuo attraversato

$$\mathbf{R}_\sigma = \hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i + \tilde{\mathbf{B}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i - \mathbf{E}_i^{-1} \Delta \sigma_i - \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (3.43a)$$

$$\mathbf{R}_\chi = -\mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_i - \Delta \lambda_i \frac{\partial g}{\partial \chi} \quad (3.43b)$$

$$R_\lambda = -g(\sigma_i, \chi_i) \quad (3.43c)$$

- interfaccia

$$\mathbf{R}_{\mathbf{t}_S} = \llbracket \tilde{\mathbf{N}}_i \rrbracket \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i dS - \mathbf{E}_{S,i}^{-1} \Delta \mathbf{t}_{S,i} - \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \quad (3.44a)$$

$$\mathbf{R}_{\chi_{S,i}} = -\mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_{S,i} - \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \chi_{S,i}} \quad (3.44b)$$

$$R_{\lambda_S} = -g_S(\mathbf{t}_{S,i}, \chi_{S,i}). \quad (3.44c)$$

Dalle equazioni costitutive del continuo, che in forma residuale assumono l'espressione

$$\mathbf{R}_\sigma = \mathbf{0} \quad (3.45a)$$

$$\mathbf{R}_\chi = \mathbf{0} \quad (3.45b)$$

$$R_\lambda = 0, \quad (3.45c)$$

si calcolano gli incrementi del vettore tensione $\Delta \sigma_i$, del vettore delle variabili statiche interne $\Delta \chi_i$ e del moltiplicatore plastico $\Delta \lambda_i$, mentre dalle equazioni costitutive dell'interfaccia

$$\mathbf{R}_{\mathbf{t}_S} = \mathbf{0} \quad (3.46a)$$

$$\mathbf{R}_{\chi_S} = \mathbf{0} \quad (3.46b)$$

$$R_{\lambda_S} = 0. \quad (3.46c)$$

si calcolano gli incrementi del vettore tensione $\Delta \mathbf{t}_{S,i}$, del vettore delle variabili statiche interne $\Delta \chi_{S,i}$ e del moltiplicatore plastico $\Delta \lambda_{S,i}$.

La soluzione viene cercata con il metodo iterativo di Newton-Raphson, la cui generica iterazione prevede, nel caso del continuo, il calcolo degli incrementi dei vettori $\Delta \sigma_i$, $\Delta \chi_i$ e dello scalare $\Delta \lambda_i$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d\sigma_i \\ d\chi_i \\ d\lambda_i \end{bmatrix}_{k+1} &= \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_i^{-1} + \Delta \lambda_i \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} & \Delta \lambda_i \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \sigma \chi} \right)^T & \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)^T \\ \Delta \lambda_i \frac{\partial^2 g}{\partial \chi \sigma} & \mathbf{H}_i^{-1} + \Delta \lambda_i \frac{\partial^2 g}{\partial \chi^2} & \left(\frac{\partial g}{\partial \chi} \right)^T \\ \frac{\partial g}{\partial \sigma} & \frac{\partial g}{\partial \chi} & 0 \end{bmatrix}_k^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma \\ \mathbf{R}_\chi \\ R_\lambda \end{bmatrix}_k \end{aligned} \quad (3.47)$$

dove \mathbf{R}_σ è dato dalle equazioni (3.42a) e (3.43a) rispettivamente nel caso di continuo integro e continuo attraversato.

Nel caso dell'interfaccia invece si calcolano gli incrementi dei vettori $\Delta \mathbf{t}_{S,i}$, $\Delta \chi_{S,i}$ e dello scalare $\Delta \lambda_{S,i}$ con una relazione analoga alla precedente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d\mathbf{t}_{S,i} \\ d\chi_{S,i} \\ d\lambda_{S,i} \end{bmatrix}_{k+1} &= \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{S,i}^{-1} + \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial^2 g_S}{\partial \mathbf{t}_S^2} & \Delta \lambda_{S,i} \left(\frac{\partial^2 g_S}{\partial \mathbf{t}_S \chi_S} \right)^T & \left(\frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \right)^T \\ \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial^2 g_S}{\partial \chi_S \mathbf{t}_S} & \mathbf{H}_{S,i}^{-1} + \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial^2 g_S}{\partial \chi_S^2} & \left(\frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \right)^T \\ \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} & \frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} & 0 \end{bmatrix}_k^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{t}_S} \\ \mathbf{R}_{\chi_S} \\ R_{\lambda_S} \end{bmatrix}_k \end{aligned} \quad (3.48)$$

Una volta risolto il sistema di equazioni costitutive, vengono ricavate le matrici costitutive algoritmiche del continuo e dell'interfaccia, corrispettive discrete delle matrici elastoplastiche definite dalle equazioni (2.80) e (2.102), rispettivamente definite dalle relazioni [47]:

$$\mathbf{E}_{alg,i} = \frac{\partial \Delta \sigma_i}{\partial \Delta \varepsilon_i} = \left[\mathbf{E}_i^{-1} + \Delta \lambda_i \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} \right]^{-1} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{E}_{S,alg,i} = \frac{\partial \Delta \mathbf{t}_{S,i}}{\partial \Delta \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S,i}} = \left[\mathbf{E}_{S,i}^{-1} + \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial^2 g_S}{\partial \mathbf{t}_S^2} \right]^{-1} \quad (3.50)$$

Dette matrici permettono di esprimere l'incremento del vettore tensione in funzione dell'incremento del vettore deformazione totale:

$$\Delta \sigma_i = \mathbf{E}_{alg,i} \Delta \varepsilon_i \quad (3.51)$$

e l'incremento del vettore delle trazioni all'interfaccia in funzione dell'incremento del vettore $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S,i}$:

$$\Delta \mathbf{t}_{S,i} = \mathbf{E}_{S,alg,i} \Delta \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S,i}. \quad (3.52)$$

3.5.2 Soluzione delle equazioni di equilibrio

Sostituendo le relazioni (3.51) e (3.52), l'equazione (3.30a) di equilibrio del continuo, scritta a livello globale, e l'equazione (3.30b) di equilibrio all'interfaccia di ogni singolo elemento finito attraversato, assumono rispettivamente la forma

$$\sum_{i=1}^{n_{el}} \left[\hat{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d},i} \hat{\mathbf{L}}_i \right] \Delta \hat{\mathbf{d}} + \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \left[\tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d},i} \tilde{\mathbf{L}}_i \right] \Delta \tilde{\mathbf{d}} = \sum_{i=1}^{n_{el}} \left[\hat{\mathbf{L}}_i^T \Delta \mathbf{F}_{\hat{d},i} \right] \quad (3.53a)$$

$$\sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \left[\tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d},i} \tilde{\mathbf{L}}_i \right] \Delta \tilde{\mathbf{d}} + \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \left[\tilde{\mathbf{L}}_i^T \left(\mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d},i} + \mathbf{K}_{S,i} \right) \tilde{\mathbf{L}}_i \right] \Delta \tilde{\mathbf{d}} = \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \left[\tilde{\mathbf{L}}_i^T \Delta \mathbf{F}_{\tilde{d},i} \right], \quad (3.53b)$$

avendo definito la matrice di rigidezza tangente del generico elemento integro

$$\mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d},i} = \int_{\Omega_i} \hat{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{E}_{alg,i} \hat{\mathbf{B}}_i d\Omega, \quad (3.54)$$

la matrice di rigidezza tangente mista \hat{d}/\tilde{d} del generico elemento attraversato

$$\mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d},i} = \int_{(\Omega_{\varphi-S})_i} \hat{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{E}_{alg,i} \tilde{\mathbf{B}}_i d\Omega, \quad (3.55)$$

$$\mathbf{K}_{\tilde{d}\hat{d},i} = \mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d},i}^T \quad (3.56)$$

la matrice di rigidezza tangente \tilde{d}/\tilde{d} del generico elemento attraversato

$$\mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d},i} = \int_{(\Omega_{\varphi-S})_i} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{E}_{alg,i} \tilde{\mathbf{B}}_i d\Omega, \quad (3.57)$$

la matrice di rigidezza tangente dell'interfaccia

$$\mathbf{K}_{S,i} = \int_{S_i} \llbracket \tilde{\mathbf{N}}_i \rrbracket^T \mathbf{E}_{S,alg,i} \llbracket \tilde{\mathbf{N}}_i \rrbracket dS, \quad (3.58)$$

ed i vettori delle forze nodali equivalenti ai carichi di volume e di superficie relativi al generico elemento integro

$$\Delta \mathbf{F}_{\hat{d},i} = \int_{\Omega_i} \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{b}_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_{q,i}} \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{q}_i + \int_{\partial\Omega_{u,i}} \hat{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{r}_i dS \quad (3.59)$$

ed attraversato dall'interfaccia

$$\Delta \mathbf{F}_{\tilde{d},i} = \int_{(\Omega_\varphi - S)_i} \tilde{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{b}_i d\Omega + \int_{\partial(\Omega_\varphi - S)_{iq}} \tilde{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{q}_i dS \quad (3.60)$$

A tal fine di risolvere il sistema di equazioni di equilibrio non lineari si pongono le (3.53) in forma residuale:

$$\mathbf{R}_{\hat{d}} = \mathbf{0} \quad (3.61a)$$

$$\mathbf{R}_{\tilde{d}} = \mathbf{0} \quad (3.61b)$$

dove

$$\mathbf{R}_{\hat{d}} = \mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d}} \Delta \hat{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d}} \Delta \tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{F}_{\hat{d}} \quad (3.62a)$$

$$\mathbf{R}_{\tilde{d}} = \mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d}} \Delta \tilde{\mathbf{d}} + (\mathbf{K}_{\tilde{d}\hat{d}} + \mathbf{K}_S) \Delta \hat{\mathbf{d}} - \mathbf{F}_{\tilde{d}}, \quad (3.62b)$$

avendo definito la matrice di rigidezza tangente globale del sistema del continuo integro

$$\mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d}} = \sum_{i=1}^{n_{el}} \left[\hat{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d},i} \hat{\mathbf{L}}_i \right] \quad (3.63)$$

la matrice di rigidezza tangente globale mista del continuo attraversato/integro

$$\mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d}} = \sum_{i=1}^{n_\varphi} \left[\hat{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d},i} \tilde{\mathbf{L}}_i \right] \quad (3.64)$$

$$\mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d}} = \mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d}}^T \quad (3.65)$$

la matrice di rigidezza tangente globale del continuo attraversato

$$\mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d}} = \sum_{i=1}^{n_\varphi} \left[\tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d},i} \tilde{\mathbf{L}}_i \right] \quad (3.66)$$

la matrice di rigidezza tangente globale della interfaccia

$$\mathbf{K}_S = \sum_{i=1}^{n_\varphi} \left[\tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{S,i} \tilde{\mathbf{L}}_i \right] \quad (3.67)$$

ed i vettori globali del sistema delle forze nodali equivalenti a forze di volume di superficie

$$\mathbf{F}_{\hat{d}} = \sum_{i=1}^{n_{el}} \left[\hat{\mathbf{L}}_i^T \Delta \mathbf{F}_{\hat{d},i} \right] \quad (3.68)$$

$$\mathbf{F}_{\tilde{d}} = \sum_{i=1}^{n_\varphi} \left[\tilde{\mathbf{L}}_i^T \Delta \mathbf{F}_{\tilde{d},i} \right] \quad (3.69)$$

Dalla (3.62) si evince che la formulazione sviluppata è simmetrica.

La soluzione viene cercata con il metodo iterativo di Newton-Raphson, la cui generica iterazione prevede il calcolo degli incrementi dei vettori $\Delta \hat{d}$ e $\Delta \tilde{d}$:

$$\begin{bmatrix} d\hat{d} \\ d\tilde{d} \end{bmatrix}_{g+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d}} & \mathbf{K}_{\hat{d}\tilde{d}} \\ \mathbf{K}_{\tilde{d}\hat{d}} & \mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d}} + \mathbf{K}_S \end{bmatrix}_g^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\hat{d}} \\ \mathbf{R}_{\tilde{d}} \end{bmatrix}_g \quad (3.70)$$

3.5.3 Integrazione delle matrici di rigidezza

In questo paragrafo vengono descritte la modalità di integrazione per il calcolo della matrice di rigidezza degli elementi attraversati dall'interfaccia, evidenziandone le differenze rispetto alla modalità utilizzata per l'integrazione di elementi interi.

Elementi interi

L'integrale che compare nell'espressione (3.54) della matrice di rigidezza del generico elemento intero Ω_i è calcolato numericamente attraverso la formula di quadratura di Gauss-Legendre.

Risulta conveniente computare tale integrale riferendosi ad un elemento $\hat{\Omega}_i$ quadrato di lato pari a 2, chiamato *elemento master* (Figura 3.9).

A tal fine ogni elemento intero viene trasformato in un elemento master attraverso la trasformazione di coordinate

$$\mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{N}}_i(\eta, \zeta) \mathbf{x}_i \quad (3.71)$$

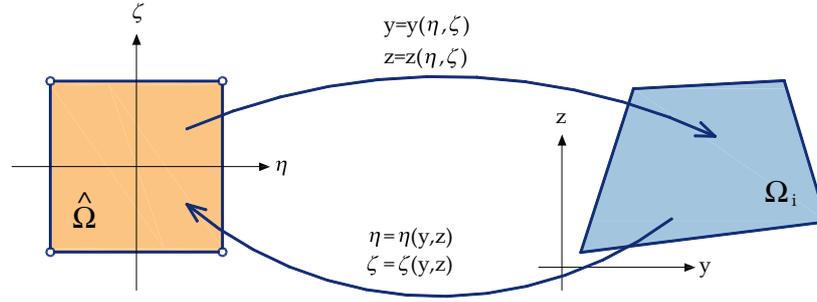


Figura 3.9: Elemento finito integro: trasformazione tra elemento master in coordinate intrinseche e elemento in coordinate geometriche.

dove $\hat{\mathbf{N}}_i(\eta, \zeta)$ sono le funzione di forma nel sistema di riferimento intrinseco (η, ζ) dell'elemento master e \mathbf{x}_i sono le coordinate dei vertici del quadrilatero nel sistema di riferimento geometrico (y, z) dell'elemento originario. Le funzioni di forma che compaiono nella (3.71), utilizzate per approssimare la geometria del dominio, sono le stesse già utilizzate per interpolare il campo di spostamenti all'interno dell'elemento integro, che viene perciò definito isoparametrico.

A seguito della trasformazione di coordinate definita dall'equazione (3.71) l'integrale che compare nella relazione diventa:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d},i} &= \int_{\hat{\Omega}_i} \hat{\mathbf{B}}_i^T(\eta, \zeta) \mathbf{E}_{alg,i}(\eta, \zeta) \hat{\mathbf{B}}_i(\eta, \zeta) J(\eta, \zeta) d\hat{\Omega} = \\ &= \sum_{j=1}^{N_{PG_\eta}} \sum_{l=1}^{N_{PG_\zeta}} w_j w_l \hat{\mathbf{B}}_i^T(\eta_j, \zeta_l) \mathbf{E}_{alg,i}(\eta_j, \zeta_l) \hat{\mathbf{B}}_i(\eta_j, \zeta_l) J(\eta_j, \zeta_l) d\hat{\Omega} \end{aligned} \quad (3.72)$$

dove N_{PG_η} e N_{PG_ζ} sono i punti di Gauss rispettivamente in direzione η e ζ , w_j e w_l sono i relativi pesi e J è il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione (3.71):

$$\mathbf{J}(\eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

La matrice $\hat{\mathbf{B}}_i^T(\eta, \zeta)$ contiene le derivate delle funzioni di forma rispetto al sistema di riferimento (y,z) scritte in funzione delle variabili

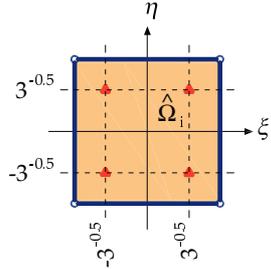
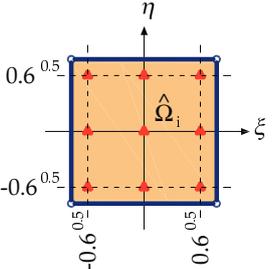
| Tipo elemento | Lineare (r=1) | Quadratico (r=2) |
|--|---|--|
| Massimo grado del polinomio | 2 | 4 |
| Ordine di integrazione | 2x2 | 3x3 |
| Posizione dei punti di integrazione nell'elemento master |  |  |

Figura 3.10: Ordine di integrazione e ubicazione dei punti di Gauss per elementi lineari e quadratici.

(η, ζ) , ottenute attraverso la relazione:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{-1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Per gli elementi quadrangolari bilineari a quattro nodi e biquadratici a otto/nove nodi, le integrande che compaiono nella matrice di rigidezza sono dei polinomi.

Nella Figura 3.10 è riportato il massimo grado del polinomio da integrare per il calcolo della matrice di rigidezza, il numero r di punti di Gauss da utilizzare per integrare correttamente il polinomio (pari alla parte intera di $(p+1)/2$), e la rispettiva posizione all'interno dell'elemento master per gli elementi bilineari a quattro nodi e per gli elementi biquadratici a otto/nove nodi.

Elementi attraversati

Anche in questo caso gli integrali che compaiono nelle relazioni che definiscono la matrice di rigidezza degli elementi attraversati sono calcolati numericamente attraverso la formula di quadratura di Gauss-Legendre.

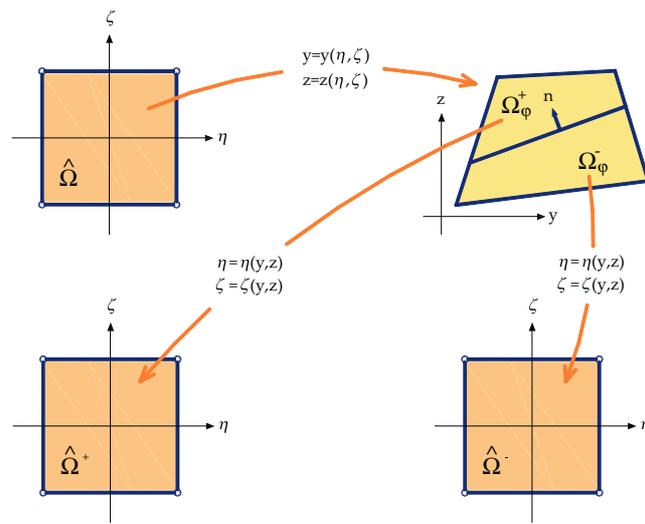
Nel caso di salto costante le integrande che compaiono in risultano continue e perciò l'integrazione della matrice di rigidezza avviene in maniera standard, come illustrato per gli elementi integri. Nel caso di interpolazione lineare del salto, le integrande che compaiono in si presentano discontinue in corrispondenza dell'interfaccia S_i . Tali integrali sono allora calcolati come la somma degli integrali sui sottodomini individuati dall'interfaccia, riferendosi a due elementi master (Figura 3.11(a)), rispettivamente relativi ai sottodomini $\hat{\Omega}_{\varphi,i}^+$ e $\hat{\Omega}_{\varphi,i}^-$. A seguito delle trasformazioni di coordinate, analoghe a quelle definite in (3.71), gli integrali che compaiono nelle relazioni diventano:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d},i} &= \int_{\hat{\Omega}_{\varphi,i}^+} \tilde{\mathbf{B}}_i^T(\eta, \zeta) \mathbf{E}_{alg,i}(\eta, \zeta) \hat{\mathbf{B}}_i(\eta, \zeta) J(\eta, \zeta) d\hat{\Omega} + \\
&+ \int_{\hat{\Omega}_{\varphi,i}^-} \tilde{\mathbf{B}}_i^T(\eta, \zeta) \mathbf{E}_{alg,i}(\eta, \zeta) \hat{\mathbf{B}}_i(\eta, \zeta) J(\eta, \zeta) d\hat{\Omega} = \\
&= \left[\sum_{j=1}^{N_{PG_\eta}} \sum_{l=1}^{N_{PG_\zeta}} w_j w_l \tilde{\mathbf{B}}_i^T(\eta_j, \zeta_l) \mathbf{E}_{alg,i}(\eta_j, \zeta_l) \hat{\mathbf{B}}_i(\eta_j, \zeta_l) J(\eta_j, \zeta_l) d\hat{\Omega} \right]_{\hat{\Omega}_{\varphi,i}^+} \\
&+ \left[\sum_{j=1}^{N_{PG_\eta}} \sum_{l=1}^{N_{PG_\zeta}} w_j w_l \tilde{\mathbf{B}}_i^T(\eta_j, \zeta_l) \mathbf{E}_{alg,i}(\eta_j, \zeta_l) \hat{\mathbf{B}}_i(\eta_j, \zeta_l) J(\eta_j, \zeta_l) d\hat{\Omega} \right]_{\hat{\Omega}_{\varphi,i}^-}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

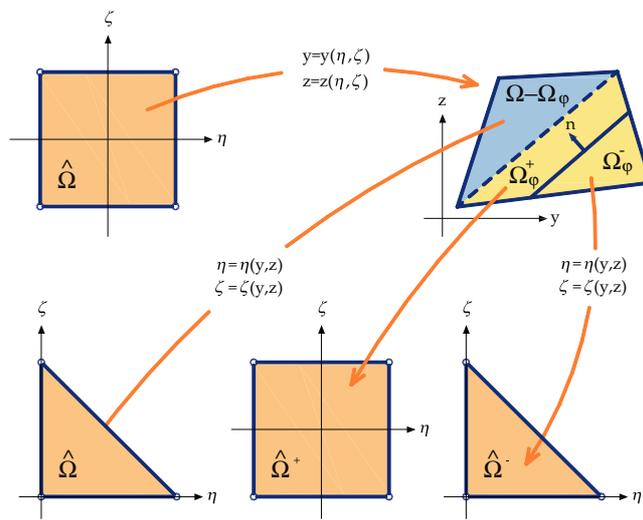
dove N_{PG_η} e N_{PG_ζ} sono i punti di Gauss rispettivamente in direzione η e ζ , w_j e w_l sono i relativi pesi e J è il determinante della matrice Jacobiana, dei rispettivi sottodomini $\hat{\Omega}_{\varphi,i}^+$ e $\hat{\Omega}_{\varphi,i}^-$.

La matrice $\hat{\mathbf{B}}_i$ contiene le derivate delle funzioni di forma regolari dell'intero dominio $\Omega_{\varphi,i}$ rispetto al sistema di riferimento (y,z) , scritte in funzione delle variabili (η, ζ) , nella quale compare lo Jacobiano della trasformazione tra l'elemento master $\hat{\Omega}$ ed l'intero dominio $\Omega_{\varphi,i}$.

La matrice $\tilde{\mathbf{B}}_i$ contiene le derivate delle funzioni di forma singolari, ottenute da quelle regolari attraverso le relazioni descritte nel para-



(a)



(b)

Figura 3.11: Elemento finito attraversato: trasformazione tra elemento master ed elemento in coordinate geometriche. (a) sottodomini quadrangolari e (b) sottodomini triangolari.

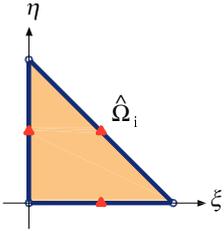
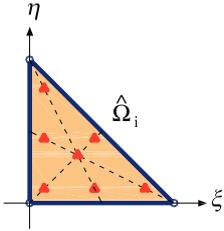
| Tipo elemento | Lineare (r=1) | Quadratico (r=2) |
|--|---|---|
| Massimo grado del polinomio | 2 | 5 |
| Punti di integrazione | 2x2 | 3x3 |
| Posizione dei punti di integrazione nell'elemento master |  |  |

Figura 3.12: Discretizzazione della geometrica: elementi integri ed attraversati dall'interfaccia.

grafo 3.3.

Note le matrici $\hat{\mathbf{B}}_i$ e $\tilde{\mathbf{B}}_i$ si procede al calcolo degli integrali attraverso la (3.75), facendo riferimento agli elementi master dei due sottodomini.

Per quanto detto si rende perciò necessaria una doppia mappatura dell'elemento attraversato: la prima trasformazione, tra l'elemento master $\hat{\Omega}$ in coordinate intrinseche e l'intero elemento nel riferimento geometrico, è necessaria per il calcolo delle funzioni di forma e delle sue derivate; le ulteriori trasformazioni, utili al fine del calcolo degli integrali che compaiono in (3.75), avvengono tra i due sottodomini $\Omega_{\varphi_i}^+$ e $\Omega_{\varphi_i}^-$ ed i relativi elementi master $\hat{\Omega}^+$ e $\hat{\Omega}^-$.

Anche in questo caso le integrande che compaiono nella matrice di rigidezza sono dei polinomi. Il grado massimo del polinomio da integrare risulta pari a quattro nel caso di elementi biquadratici a otto/nove nodi con salto lineare. Il numero di punti di Gauss da utilizzare per



Figura 3.13: Intefaccia: trasformazione tra elemento master ed elemento in coordinate geometriche.

ciascun sottodominio è pari a quello utilizzato per l'elemento biquadratico non attraversato (Figura 3.10).

Nei casi 1, 3, 4 e 6 (vedi paragrafo 3.3) gli estremi dell'interfaccia ricadono su due lati adiacenti dell'elemento, che risulta suddiviso in due sottodomini triangolari ed in un sottodominio rettangolare. Le trasformazioni utili al fine del calcolo degli integrali (che questa volta sono dati dalla somma di tre contributi), avvengono tra i tre sottodomini ed i relativi elementi master (Figura 3.11(b)).

Il numero di punti di Gauss da utilizzare per ciascun sottodominio triangolare è riportato in Figura 3.11 per i casi di elemento bilineare a quattro nodi con salto costante ed elemento biquadratico a otto/nove nodi con salto lineare.

Interfaccia

Ancora una volta l'integrale che compare nell'espressione della matrice di rigidezza dell'interfaccia è calcolato numericamente attraverso la formula di quadratura di Gauss-Legendre, riferendosi ad un elemento master di lunghezza pari a 2 (Figura 3.13).

Anche in questo caso le integrande che compaiono nella matrice di rigidezza sono dei polinomi. Il grado massimo del polinomio da integrare risulta nullo nel caso salto costante, e pari a uno nel caso di salto lineare.

Il numero di punti di Gauss da utilizzare e la relativa posizione sono riportati in Figura 3.14.

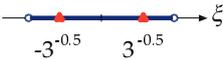
| Tipo elemento | Salto costante ($r=0$) | Salto lineare ($r=1$) |
|--|--|--|
| Massimo grado del polinomio | 0 | 1 |
| Punti di integrazione | 1 | 2 |
| Posizione dei punti di integrazione nell'elemento master |  |  |

Figura 3.14: Ordine di integrazione e ubicazione dei punti di Gauss dell'interfaccia.

3.5.4 Algoritmo di soluzione

Al fine di calcolare la risposta del modello strutturale soggetto ad una certa storia di carico viene utilizzata una procedura incrementale-iterativa.

Il modo più naturale per effettuare un'analisi incrementale consiste nel prescrivere i carichi esterni agenti sulla struttura alla fine di ogni passo (analisi a *controllo di carico*). L'obiettivo è trovare gli spostamenti nodali corrispondenti in modo che le equazioni di equilibrio risultino soddisfatte.

Tale strategia di soluzione fallisce se il carico prescritto non può essere equilibrato se la struttura non è capace di mobilitare ulteriori risorse di resistenza, e pertanto non risulta idonea a valutare il tratto post picco del diagramma carico/spostamento (Figura 3.15).

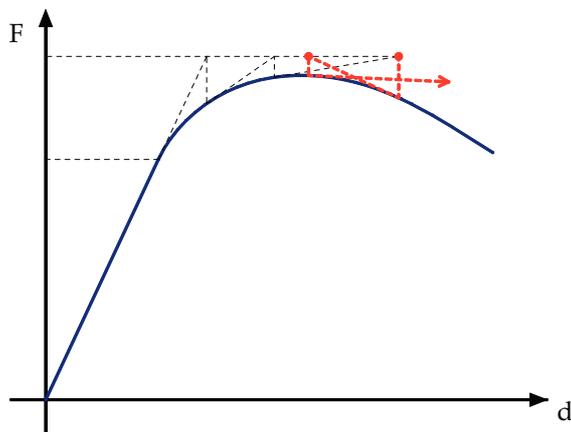


Figura 3.15: Non convergenza dell'algoritmo di soluzione a controllo di carico.

A tal fine si assegnano gli incrementi degli spostamenti corrispondenti al carico prescritto. Poichè i valori degli spostamenti sono imposti direttamente, detta tecnica, nel seguito adottata è nota come analisi a *controllo di spostamento diretto*.

Gli spostamenti impressi vengono applicati in un numero di passi, detti incrementi, e la risposta della struttura alla fine di ogni passo viene calcolata dalle equazioni di equilibrio. Poichè dette equazioni sono in generale non lineari, si deve ricorrere a metodi iterativi, come il metodo di Newton-Raphson. Ciò implica che all'interno del ciclo relativo agli incrementi di carico, si ha un processo iterativo che opera

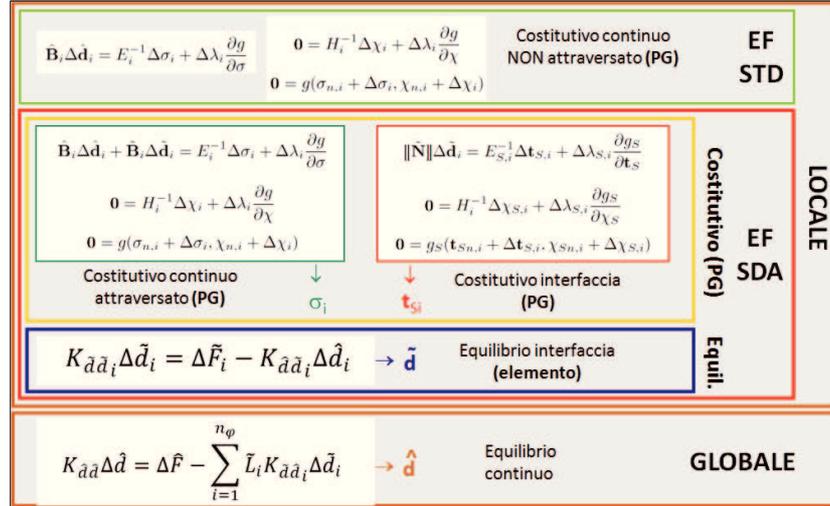


Figura 3.16: Schematizzazione dell'algoritmo di soluzione.

all'interno del generico passo di carico, al fine di calcolare i vettori degli spostamenti $\hat{\mathbf{d}}$ e $\tilde{\mathbf{d}}$ che soddisfano rispettivamente le equazioni di equilibrio del continuo ed all'interfaccia a fine passo. Allo scopo di calcolare la matrice di rigidità tangente globale del sistema, ad ogni iterazione è necessario valutare la matrice elastoplastica algoritmica del continuo integro, del continuo attraversato e dell'interfaccia.

A tal fine occorre risolvere le rispettive equazioni costitutive e valutare gli incrementi di tensione $\Delta \sigma$, di variabili statiche interne $\Delta \chi$ e del moltiplicatore $\Delta \lambda$, nel caso continuo, e gli incrementi di vettore delle trazioni $\Delta \mathbf{t}_S$, di variabile interna $\Delta \chi_S$ e del moltiplicatore $\Delta \lambda_S$, nel caso dell'interfaccia, prodotti dall'incremento dei vettori degli spostamenti rispetto ai valori raggiunti in corrispondenza dell'ultima iterazione equilibrata.

Nella Figura 3.16 è riportato lo schema dell'algoritmo di soluzione.

Ipotesi di discontinuità immerse

Nelle equazioni (3.53) i gradi di libertà raccolti nel vettore $\tilde{\mathbf{d}}$ sono globali. Pertanto al crescere del numero n_φ di elementi attraversati dall'interfaccia, la dimensione del problema di equilibrio (3.53) cresce.

Nel seguito, attraverso una scelta opportuna delle matrici di connettività nodale $\tilde{\mathbf{L}}_i$ che compaiono nell'equazione di equilibrio all'interfaccia, i gradi di libertà aggiuntivi $\tilde{\mathbf{d}}_i$ corrispondenti alle funzioni di forma singolari saranno considerati a livello del singolo elemento finito. Si ricade così nell'ipotesi di elementi con discontinuità immerse (EED), nell'ambito della quale il numero dei gradi libertà globali del sistema rimane inalterato al propagarsi dell'interfaccia e l'equazione (3.30b) di equilibrio all'interfaccia assume carattere locale:

$$\begin{aligned} & \int_{(\Omega_\varphi - S)_i} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \Delta \sigma_i(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i) + \int_{S_i} \llbracket \tilde{\mathbf{N}}_i \rrbracket_i^T \Delta \mathbf{t}_{S,i}(\Delta \hat{\mathbf{d}}, \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i) - \\ & - \int_{(\Omega_\varphi - S)_i} \tilde{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{b}_i d\Omega - \int_{\partial(\Omega_\varphi - S)_{iq}} \tilde{\mathbf{N}}_i^T \Delta \mathbf{q}_i dS = 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

ovvero

$$\left[\mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d},i} + \mathbf{K}_{S,i} \right] \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i = -\mathbf{K}_{\tilde{d}\hat{d},i} \Delta \hat{\mathbf{d}}_i + \Delta \mathbf{F}_{\tilde{d},i}, \quad ii = 1, \dots, n_\varphi. \quad (3.77)$$

L'equazione di equilibrio globale del continuo assume pertanto la forma

$$\mathbf{K}_{\hat{d}\hat{d}} \Delta \hat{\mathbf{d}} = \Delta \mathbf{F}_{\hat{d}} - \sum_{i=1}^{n_\varphi} \left[\hat{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d},i} \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i \right] \quad (3.78)$$

dove il termine $\hat{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d},i} \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i$ dell'equazione (3.78) rappresenta le forze equivalenti dovute agli spostamenti $\Delta \tilde{\mathbf{d}}_i$, calcolati dall'equazione (3.77).

3.6 Ipotesi di continuo elastico e interfaccia puramente dissipativa

Nel seguito si assumerà comportamento elastico lineare per il continuo ($\varepsilon_p = 0$) e puramente dissipativo per l'interfaccia ($\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{S_e} = 0$). Sotto tali ipotesi le equazioni costitutive assumono le espressioni:

- del continuo integro

$$\Delta \sigma_i = \mathbf{E}_i \hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i \quad (3.79)$$

- del continuo attraversato

$$\Delta \sigma_i = \mathbf{E}_i \left(\hat{\mathbf{B}}_i \Delta \hat{\mathbf{d}}_i + \tilde{\mathbf{B}}_i \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i \right) \quad (3.80)$$

- dell'interfaccia

$$[[\tilde{\mathbf{N}}_i]] \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i = \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \mathbf{t}_S} \quad (3.81a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{H}_i^{-1} \Delta \chi_{S,i} + \Delta \lambda_{S,i} \frac{\partial g_S}{\partial \chi_S} \quad (3.81b)$$

$$0 = g_S(\mathbf{t}_{S,i}, \chi_{S,i}). \quad (3.81c)$$

La matrice algoritmica $\mathbf{E}_{alg,i}$ del continuo (integro ed attraversato) coincide con la matrice costitutiva elastica \mathbf{E}_i , mentre la matrice algoritmica $\mathbf{E}_{S,alg,i}$ dell'interfaccia tende all'infinito. Il vettore delle tensioni sull'interfaccia risulta indeterminato dall'equazione costitutiva (3.52):

$$\underbrace{\Delta \mathbf{t}_{S,i}}_{?} = \underbrace{\mathbf{E}_{S,alg,i}}_{\infty} \underbrace{\Delta [[\mathbf{u}]]_{S,i}}_0 \quad (3.82)$$

e deve essere determinato dall'equazione di equilibrio all'interfaccia, che, nell'ipotesi di discontinuità immerse, assume la forma:

$$\mathbf{K}_{\tilde{d}\hat{d},i} \Delta \hat{\mathbf{d}}_i + \mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d},i} \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i + \int_{S_i} [[\tilde{\mathbf{N}}_i]]^T \Delta \mathbf{t}_{S,i} (\Delta \hat{\mathbf{d}}_i, \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i) dS = \Delta \mathbf{F}_{\tilde{d},i}. \quad (3.83)$$

L'integrale che compare al primo membro della (3.83) è calcolato numericamente utilizzando la quadratura di Gauss-Legendre:

$$\mathbf{K}_{\tilde{d}\hat{d},i} \Delta \hat{\mathbf{d}}_i + \mathbf{K}_{\tilde{d}\tilde{d},i} \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i + \sum_{PG_j=1}^{N_{PG_S}} [[\tilde{\mathbf{N}}_i]]^T|_{PG_j} \Delta \mathbf{t}_{S,i}|_{PG_j} w_{PG_j} = \Delta \mathbf{F}_{\tilde{d},i}. \quad (3.84)$$

dove N_{PG_S} è il numero di punti di Gauss dell'interfaccia.

La strategia di soluzione illustrata nel paragrafo precedente viene modificata, in quanto ad ogni passo di carico viene calcolato il vettore degli spostamenti regolari $\hat{\mathbf{d}}$ dall'equazione di equilibrio globale del continuo. A tal fine occorre determinare il vettore degli spostamenti singolari $\tilde{\mathbf{d}}$ che assume ora il significato di equazione di compatibilità. Tale relazione dipende implicitamente dal vettore delle trazioni all'interfaccia, determinato attraverso l'equazione di equilibrio all'interfaccia scritta a livello del singolo elemento, e dalla variabile statica interna e dal moltiplicatore, determinate dalle restanti equazioni costitutive dell'interfaccia.

Nella Figura 3.17 è riportato lo schema dell'algoritmo di soluzione nel caso di continuo elastico e di interfaccia dissipativa.

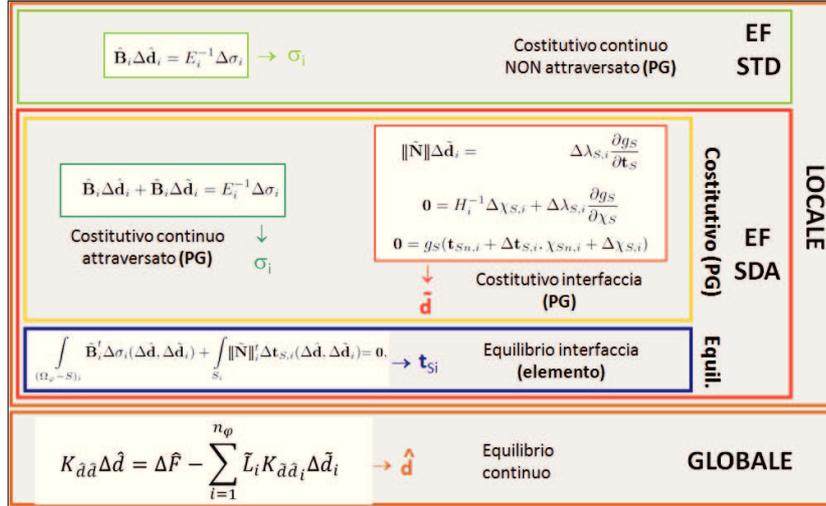


Figura 3.17: Schematizzazione dell'algoritmo di soluzione.

3.7 Bilancio energetico

Il lavoro speso dalle forze esterne applicate al sistema è trasformato in energia. Nell'ipotesi di comportamento elastico del continuo e di interfaccia dissipativa, parte di questa energia viene accumulata dal continuo, mentre la restante parte viene dissipata dall'interfaccia.

Al fine di eseguire il bilancio energetico durante un'analisi evolutiva di un solido attraversato da discontinuità forti, sono valutate la quantità di energia immagazzinata dal continuo elastico, pari all'energia di deformazione, e l'energia dissipata dall'interfaccia durante la sua apertura.

Facendo riferimento all' i -esimo elemento finito, l'energia di deformazione risulta pari:

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} \left[\hat{\mathbf{d}}_i^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}}_i} \hat{\mathbf{d}}_i + \hat{\mathbf{d}}_i^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}}_i} \tilde{\mathbf{d}}_i + \tilde{\mathbf{d}}_i^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}}_i} \hat{\mathbf{d}}_i + \tilde{\mathbf{d}}_i^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}}_i} \tilde{\mathbf{d}}_i \right], \quad (3.85)$$

mentre l'energia dissipata dalla corrispondente interfaccia S_i durante il generico passo vale:

$$\sum_{PG_j=1}^{N_{PG_S}} \Delta \mathbf{t}_{S,i}^T|_{PG_j} \llbracket \tilde{\mathbf{N}}_i \rrbracket|_{PG_j} \Delta \tilde{\mathbf{d}}_i w_{PG_j} \quad (3.86)$$

dove N_{PGS} è il numero di punti di Gauss dell'interfaccia.

Nelle analisi esposte nel capitolo 4 saranno svolte considerazioni energetiche sulla base delle definizioni (3.85) e (3.86).

Capitolo 4

APPLICAZIONI NUMERICHE

È stato realizzato un codice di calcolo, denominato *FracSDA8*, che permette di risolvere, nell'ambito del metodo agli elementi finiti, il problema piano (di tensione o di deformazione) del solido attraversato da discontinuità forti.

FracSDA8, realizzato in ambiente *MatLab*, è organizzato in tre blocchi principali (Figura 4.1): il primo gestisce la fase di input dei dati (pre-process), come la lettura dei dati della mesh, generata con il codice di calcolo *ADINA*, e le assegnazioni di materiali vincoli e storia di carico; il secondo blocco, che si occupa della risoluzione del problema (process), utilizza l'algoritmo di soluzione descritto nel capitolo precedente; l'ultimo blocco permette di visualizzare i risultati.

La restituzione grafica dei risultati è stata implementata ad hoc per permettere la visualizzazione delle discontinuità.

In *FracSDA8* è disponibile un unico legame costitutivo per il continuo, quello elastico lineare ed isotropo; per l'interfaccia sono disponibili due legami rigido-plastici con incrudimento negativo, rispettivamente lineare (Figura 4.2(a)) e bilineare (Figura 4.2(b)).

Nell'ambito di *FracSDA8* sono stati implementati elementi standard:

- rettangolare bilineare a quattro nodi,
- rettangolare biquadratico a otto nodi;

ed elementi attraversati da discontinuità forti:

```

MATLAB 7.0 (R2006a)
File Edit Debug Parallel Desktop Window Help
Current Directory: C:\Giuseppe\Universita\Elaborati\elem_SDA\meshSDA
Shortcuts How to Add What's New

-----
F I E
Codice di calcolo agli elementi finiti
by G T D G
File: iastcaelem
-----

D A T I M E S H D A A D I N A
modi
elem
elemData
vincoli
condimenti
time function

P R E - P R O C E S S
GRADI DI LIBERTA'
non vincolati
spostamenti impressi
vincolati
MATERIALI
MATRICE DI RIGIDITA'
matrici di rigidezza dei singoli elementi
assemblaggio
VETTORE DELLE FORZE
CEDIMENTI

P R O C E S S O P O S T - P R O C E S S
ANALISI INCREMENTALE
iterazione 1
iterazione 2
iterazione 3
Nuovo elemento attraversato - stress 22 - Elem. 1
iterazione 4
iterazione 5
# Stati
  
```

Figura 4.1: (a) Fase di generazione della mesh con il programma ADINA; (b) esecuzione del codice FracSDA8.

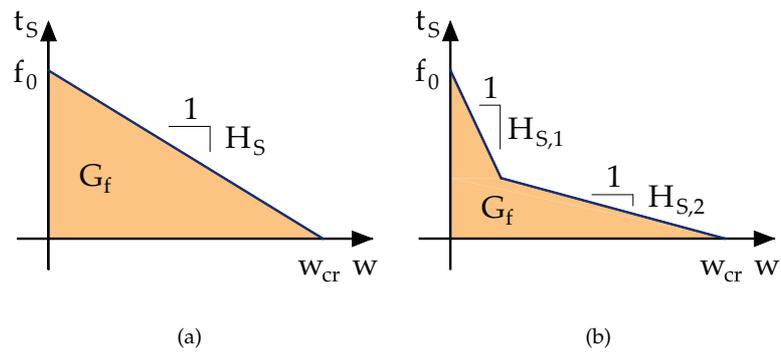


Figura 4.2: Legame costitutivo dell'interfaccia con softening: (a) lineare e bilineare.

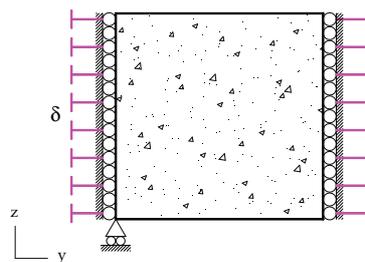
- rettangolare bilineare a quattro nodi ed interfaccia con approssimazione del salto costante,
- elemento rettangolare biquadratico a otto nodi ed interfaccia con approssimazione del salto lineare.

Nei paragrafi seguenti vengono presentate alcune analisi numeriche realizzate con il codice FracSDA8 al fine di validare l'algoritmo di soluzione proposto nel capitolo precedente e di provare il corretto funzionamento del codice FracSDA8.

4.1 Elemento finito teso

4.1.1 Distribuzione di spostamenti costante

La prima analisi, condotta in regime di tensioni piane, riguarda l'elemento finito quadrato bilineare a quattro nodi con salto costante, di lato 300 mm, riportato in Figura 4.3(a). Su due lati opposti sono state applicate due distribuzioni di spostamenti costanti al fine di simulare lo stato di trazione uniassiale. L'analisi è condotta a controllo di spostamento a causa della presenza del legame softening dell'interfaccia. Si riportano



(a)

Figura 4.3: Elemento teso

sinteticamente i valori dei parametri costitutivi adottati per il continuo:

- $E = 28500 \text{ [N/mm}^2\text{]}$
- $\nu = 0.2$

per l'interfaccia con softening lineare:

- $f_0 = 1.8 \text{ [N/mm}^2\text{]}$
- $H_{S1} = -18 \text{ [N/mm}^3\text{]}$

e la relativa funzione di attivazione, corrispondente al criterio della massima tensione normale di Rankine:

$$g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = \mathbf{t}_S^T \mathbf{n} - f_0 - \chi_S$$

Nella Figura 4.4(a) è riportato l'andamento della risultante delle trazioni in funzione delle spostamento impresso. Tale andamento coincide con la curva analitica ottenuta nell'esempio del paragrafo 2.5. Inoltre nella Figura 4.4(b) è riportato l'andamento dell'energia immagazzinata, dissipata e immessa, pari al lavoro compiuto dalle forze esterne. Nelle Figure 4.5(a) 4.5(b) e 4.5(c) sono riportati gli andamenti della componente orizzontale dello spostamento.

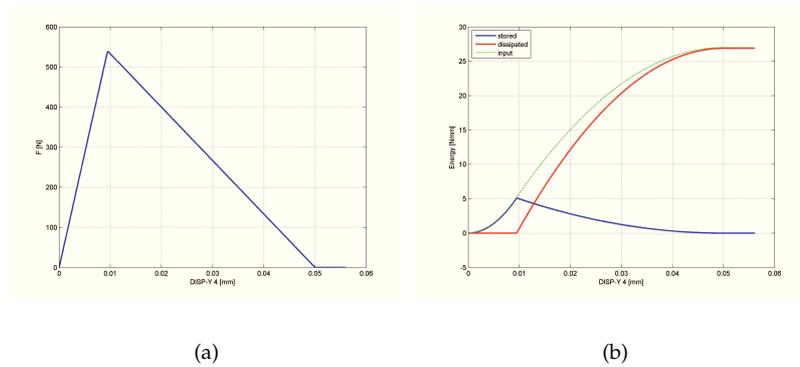


Figura 4.4: (a) Curva carico spostamento. (b) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde).

Interfaccia con softening bilineare

Si è condotta un'altra analisi adottando per l'interfaccia legame softening bilineare:

- $f_0 = 3.3 \text{ [N/mm}^2\text{]}$

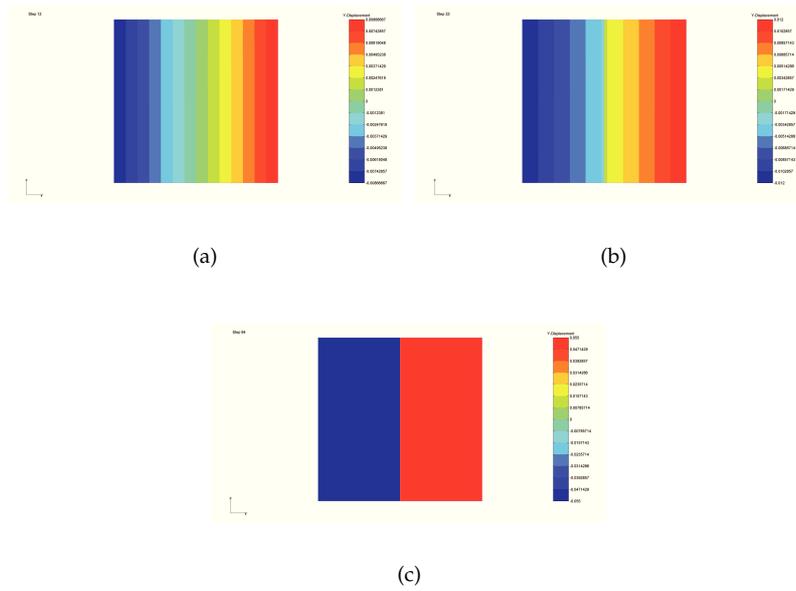


Figura 4.5: Spostamento direzione Y. Istanti: (a) 12, (b) 32 e (c) 94.

- $H_{S1} = -60 \text{ [N/mm}^3\text{]}$
- $H_{S2} = -6 \text{ [N/mm}^3\text{]}$
- $w_{cr} = 0.72 \text{ [mm]}$

Nelle Figure 4.6(a) e 4.6(b) sono riportati rispettivamente l'andamento della risultante delle trazioni in funzione dello spostamento impresso e l'andamento dell'energia immagazzinata, dissipata e immessa, pari al lavoro compiuto dalle forze esterne.

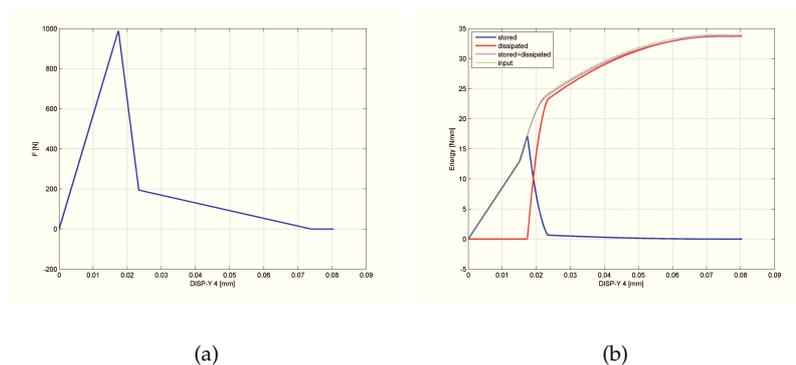
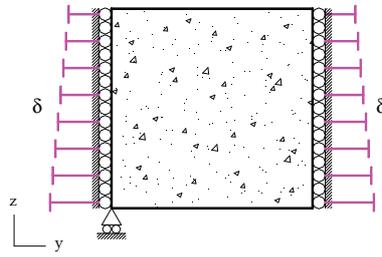


Figura 4.6: (a) Curva carico spostamento. (b) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde).

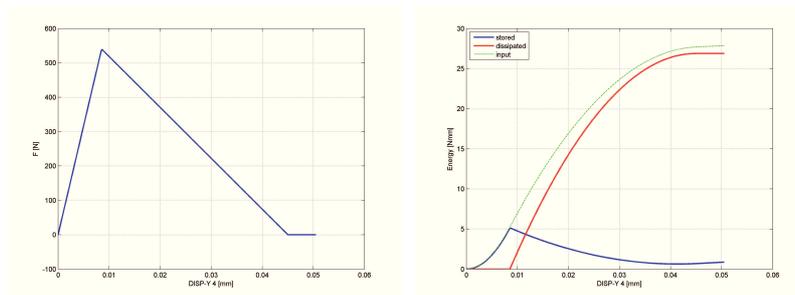
4.1.2 Distribuzione di spostamenti lineare

Su due lati paralleli dell'elemento finito bilineare a quattro nodi con salto costante discusso nel paragrafo precedente sono stati assegnati gli spostamenti orizzontali con distribuzione lineare (Figura 4.7(a)). Nelle Figure 4.8(a) e 4.8(b) sono riportati rispettivamente l'andamento della risultante delle trazioni in funzione dello spostamento impresso e il bilancio energetico nei vari passi dell'analisi. Nelle Figure 4.9(a), 4.9(b) e 4.9(c) sono riportati gli andamenti della componente orizzontale dello spostamento. Dalla Figura 4.8(b) si nota che per spostamenti impressi maggiori di 0.04 mm l'energia di deformazione accumulata dall'elemento aumenta. Tale fenomeno, detto shear-locking, è dovuto alle di tensioni tangenziali e di tensioni normali σ_z (crescenti



(a)

Figura 4.7: Elemento teso inflesso.



(a)

(b)

Figura 4.8: (a) Curva carico spostamento. (b) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde).

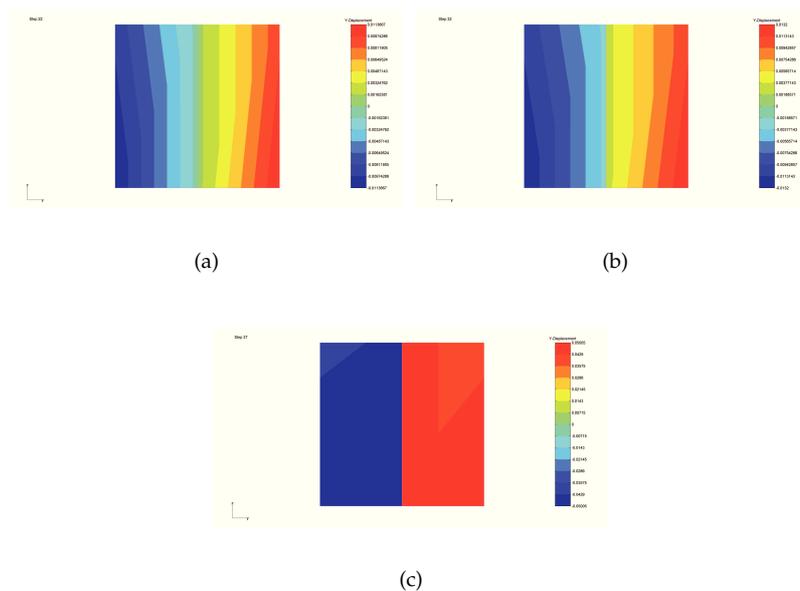


Figura 4.9: Spostamento direzione Y. Istanti: (a) 22, (b) 32 e (c) 37.

all'aumentare dello spostamento impresso), presenti in un elemento bilineare se sottoposto a sollecitazioni di flessione.

Approssimazione del salto lineare

Al fine di eliminare, o comunque di mitigare, l'effetto dello shear locking, l'analisi è stata ripetuta utilizzando un elemento biquadratico a otto nodi con approssimazione del salto lineare.

Nelle Figure 4.10(a) e 4.10(b) sono riportati rispettivamente l'andamento della risultante delle trazioni in funzione dello spostamento impresso e il bilancio energetico nei vari passi dell'analisi, dal quale si evince l'eliminazione del fenomeno di shear locking.

Nelle Figure 4.11(a), 4.11(b) e 4.11(c) sono riportati gli andamenti della componente orizzontale dello spostamento.

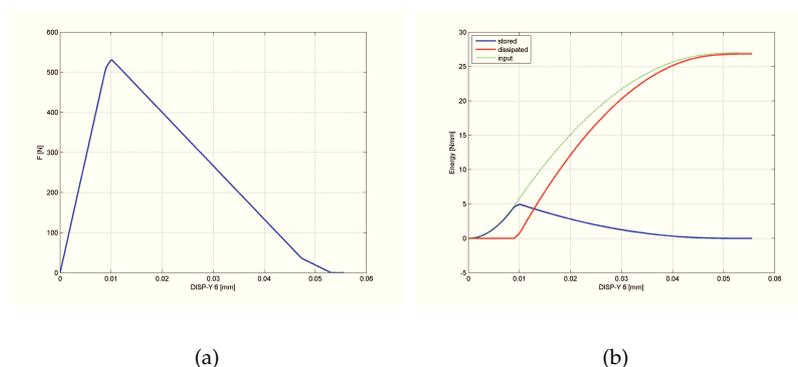


Figura 4.10: (a) Curva carico spostamento. (b) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde).

4.2 Lastra tesa

La prima applicazione strutturale è relativa ad una lastra tesa, di forma rettangolare avente dimensioni 150x300 mm (Figura 4.12(a)). La lastra presenta in corrispondenza della sua mezzeria un indebolimento. Anche in questo caso l'analisi è condotta a controllo di spostamento e quindi sono stati imposti gli spostamenti su un lato della lastra. Si

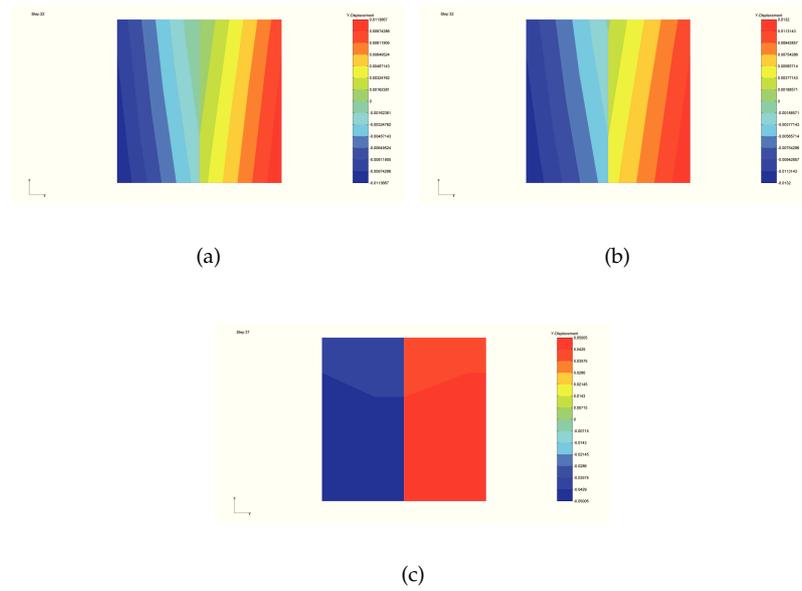
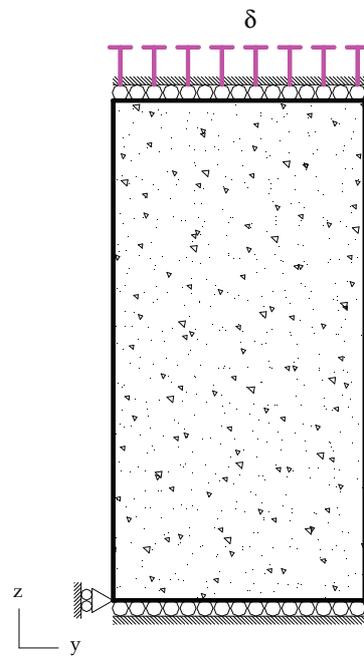


Figura 4.11: Spostamento direzione Y. Istanti: (a) 22, (b) 32 e (c) 37.



(a)

Figura 4.12: Lastra tesa. Distribuzione costante

riportano sinteticamente i valori dei parametri costitutivi adottati per il continuo:

- $E = 28500 \text{ [N/mm}^2\text{]}$
- $\nu = 0.2$

per l'interfaccia con softening bilineare:

- $f_0 = 3.3 \text{ [N/mm}^2\text{]}$
- $H_{S1} = -60 \text{ [N/mm}^3\text{]}$
- $H_{S2} = -6 \text{ [N/mm}^3\text{]}$
- $w_{cr} = 0.72 \text{ [mm]}$

e la relativa funzione di attivazione, corrispondente al criterio della massima tensione normale di Rankine:

$$g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = \mathbf{t}_S^T \mathbf{n} - f_0 - \chi_S$$

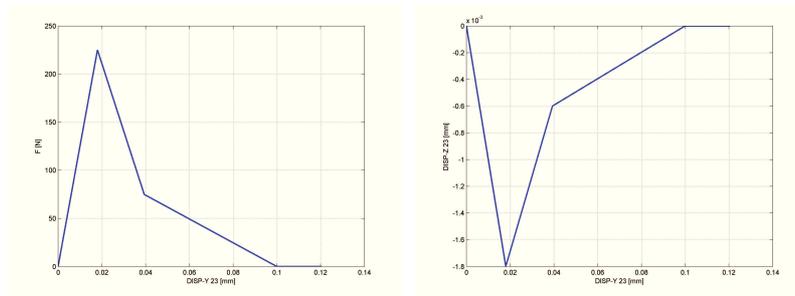
4.2.1 Distribuzione di spostamenti costante

La prima analisi è condotta utilizzando una distribuzione di spostamenti costante. Nelle Figure 4.13(a), 4.13(b) e 4.13(c) sono riportati rispettivamente l'andamento della risultante delle trazioni in funzione dello spostamento impresso, lo spostamento trasversale e il bilancio energetico nei vari passi dell'analisi. Nelle Figure 4.14(a), 4.14(b), 4.14(c) e 4.14(d) sono riportati gli andamenti della componente orizzontale dello spostamento.

4.2.2 Distribuzione di spostamenti lineare

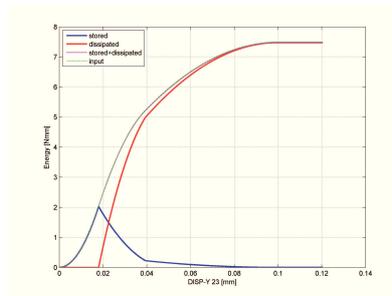
La seconda analisi è condotta utilizzando una distribuzione di spostamenti lineare (Figura 4.15(a)), utilizzando un elemento bilineare a quattro nodi con salto costante. Nelle Figure 4.16(a) e 4.16(b) sono riportati rispettivamente l'andamento della risultante delle trazioni in funzione dello spostamento impresso e il bilancio energetico nei vari passi dell'analisi. Dalle Figure 4.18(a), dove viene riportata la configurazione deformata della lastra, si può osservare la propagazione dell'interfaccia all'interno della lastra.

Nelle Figure 4.17(a) e 4.17(b) sono riportati i risultati della stessa analisi condotta utilizzando elementi quadratici a otto nodi e interpolazione lineare per il salto.



(a)

(b)



(c)

Figura 4.13: (a) Curva carico spostamento. (b) Spostamento trasversale. (c) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde).

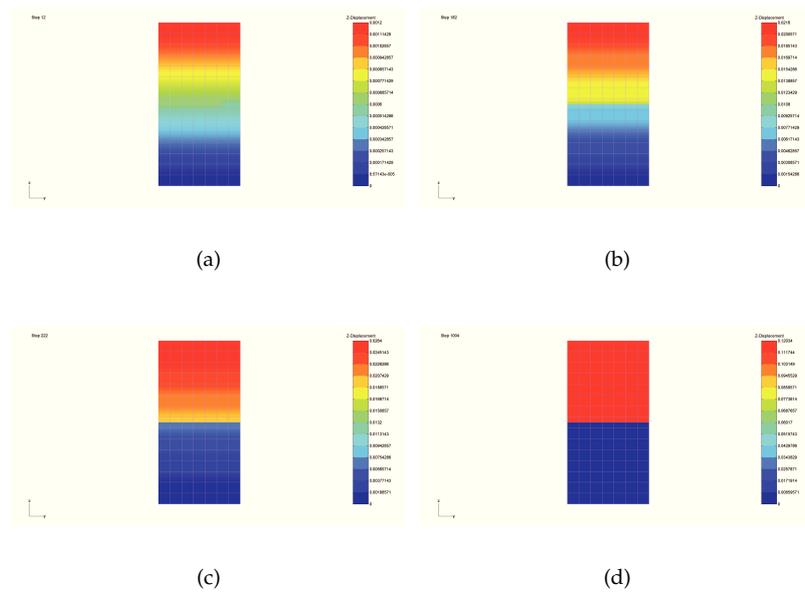
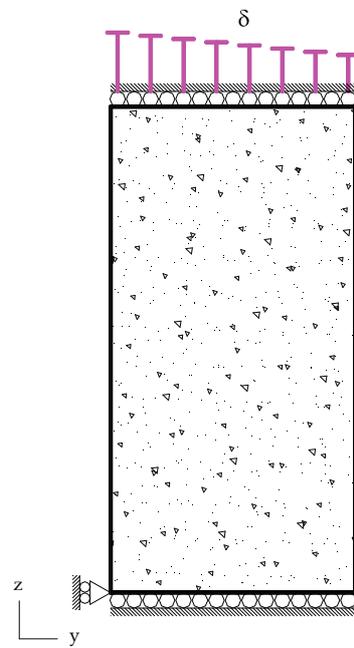


Figura 4.14: Spostamento direzione Y. Istanti: (a) 12, (b) 182, (c) 222 e (d) 1004.



(a)

Figura 4.15: Lastra tesa. Distribuzione lineare

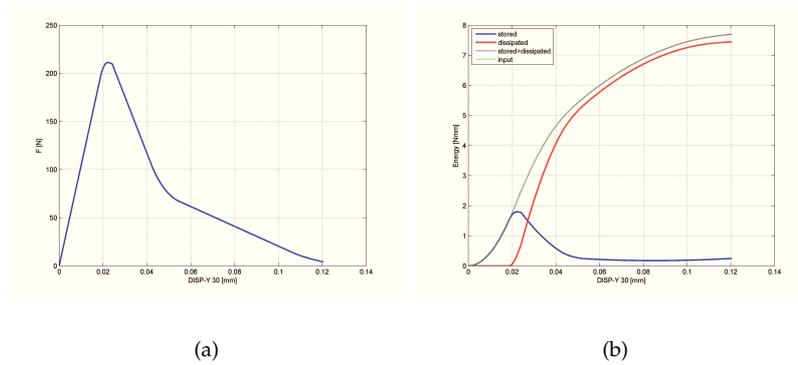


Figura 4.16: (a) Curva carico spostamento. (b) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde).

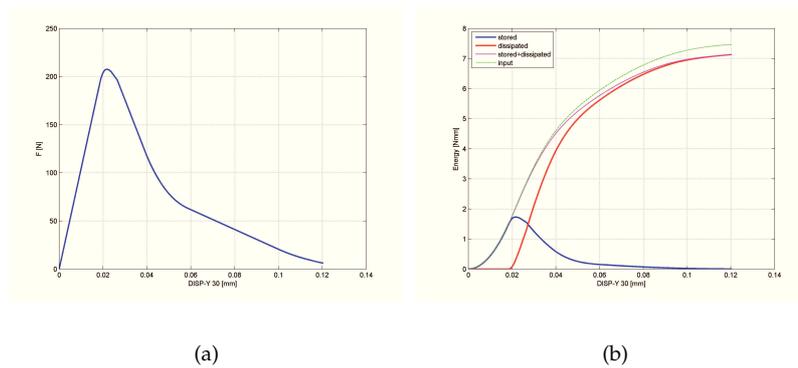


Figura 4.17: (a) Curva carico spostamento. (b) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde).

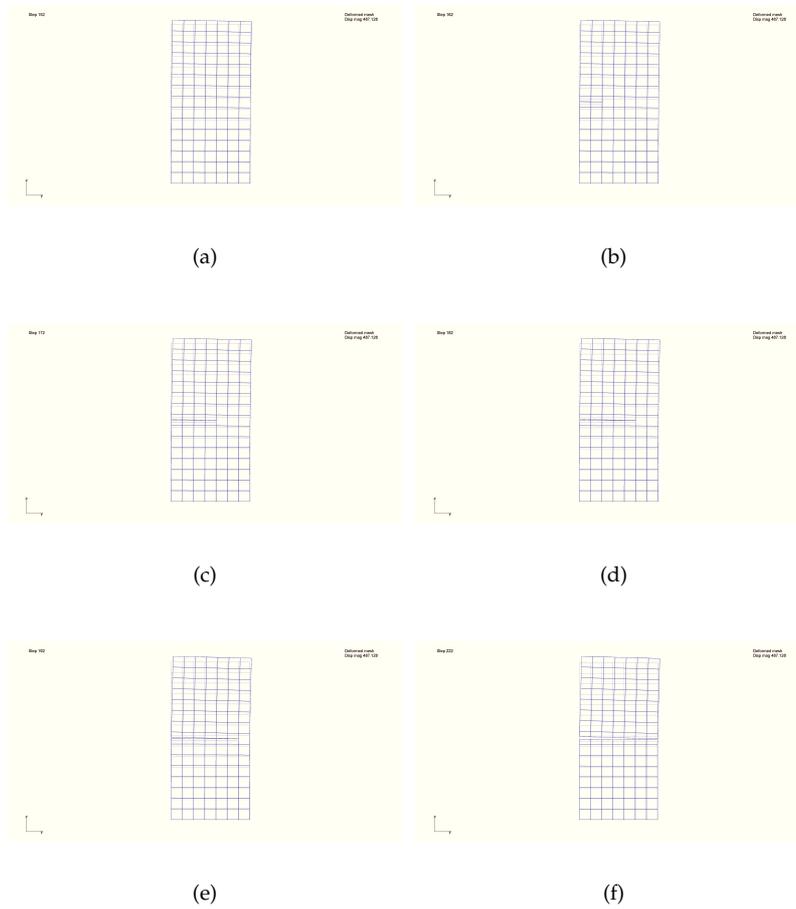


Figura 4.18: Deformata della lastra. Istanti: (a) 152, (b) 162, (c) 172, (d) 182, (e) 192 e (e) 222.

Dal confronto tra la Figura 4.16(b) e la Figura 4.17(b), si evince che il fenomeno del locking è presente nel caso di elementi bilineari con salto costante, ma è assente nel caso di elementi biquadratici con salto lineare.

4.3 Lastra tesa con intaglio

L'esempio riportato in questo paragrafo è stato studiato al fine di mostrare l'indipendenza della risposta dalla discretizzazione adottata. Oggetto di studio è una lastra di calcestruzzo di spessore unitario, quadrata di lato pari a 300 mm. Sulla lastra sono praticati due intagli di dimensioni 20x60 mm. Si riportano sinteticamente i valori dei parametri costitutivi adottati per il continuo:

- $E = 28500 \text{ [N/mm}^2\text{]}$
- $\nu = 0.2$

per l'interfaccia con softening lineare:

- $f_0 = 1.8 \text{ [N/mm}^2\text{]}$
- $H_{S1} = -18 \text{ [N/mm}^3\text{]}$

e la relativa funzione di attivazione, corrispondente al criterio della massima tensione normale di Rankine:

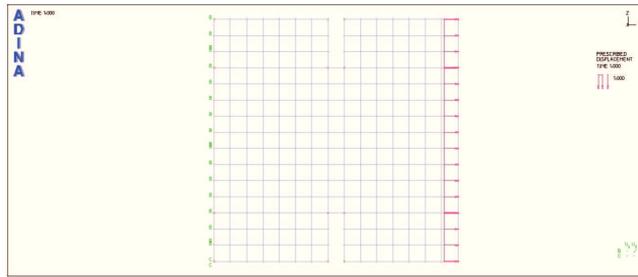
$$g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = \mathbf{t}_S^T \mathbf{n} - f_0 - \chi_S$$

Nelle Figure 4.19(a) sono riportate le tre discretizzazioni adottate per studiare il problema; nelle Figure 4.20(a) sono riportate le relative configurazioni deformate.

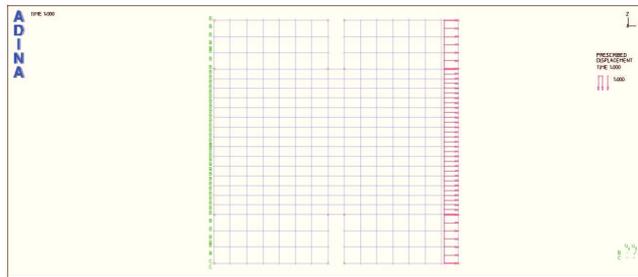
Nelle Figure 4.21(a) sono riportate a confronto le curve carico spostamento relative alle tre discretizzazioni, ed è evidente che la risposta risulta indipendente dalla mesh utilizzata, confermando il carattere mesh-independency del metodo.

4.4 Prova di flessione su tre punti di una trave con intaglio centrale

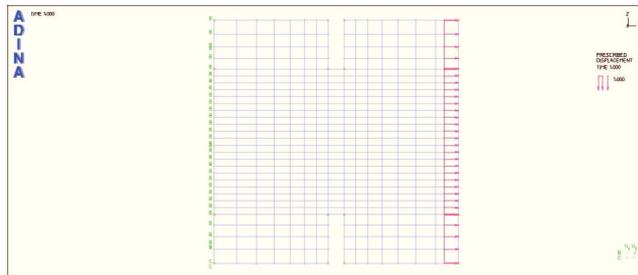
È stata modellata una delle prove di laboratorio eseguita per misurare l'energia di frattura del calcestruzzo: la prova di flessione su tre punti.



(a)

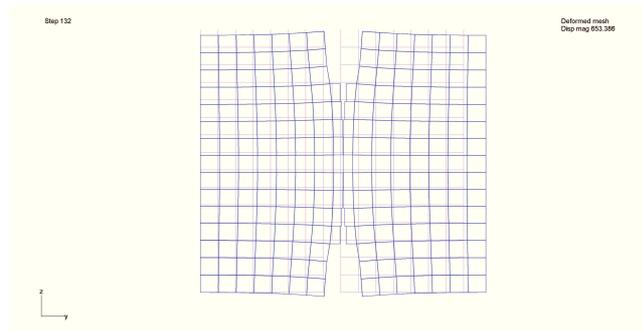


(b)

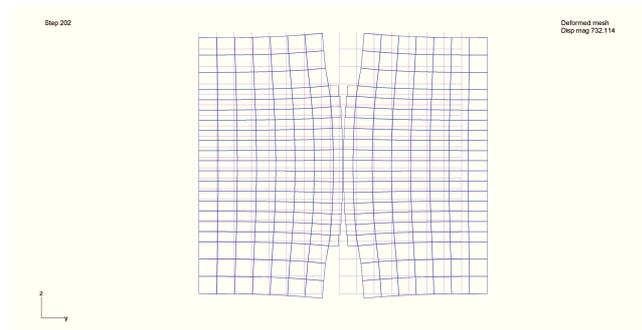


(c)

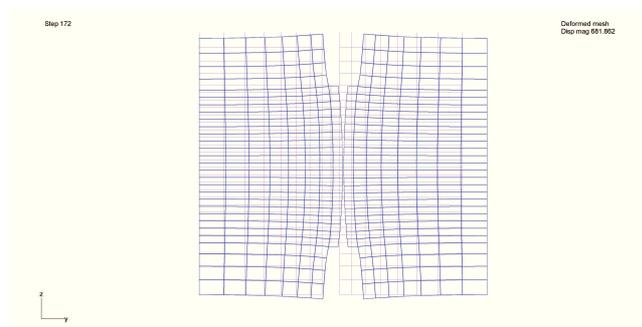
Figura 4.19: Tre diverse discretizzazioni del problema.



(a)

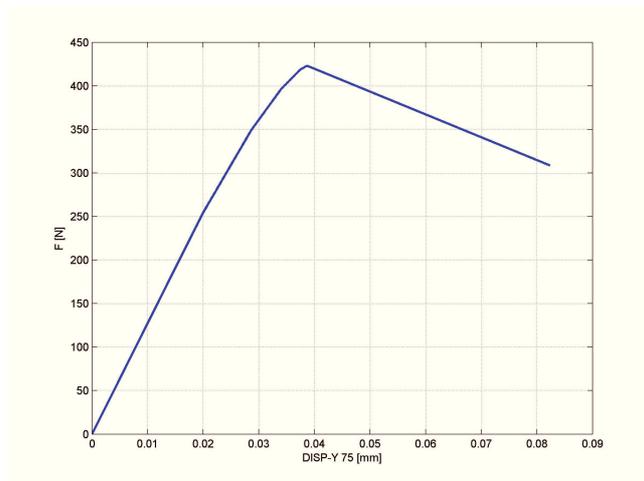


(b)



(c)

Figura 4.20: Configurazione deformata a diversi istanti di tempo.



(a)

Figura 4.21: Curve carico spostamento relative alle tre discretizzazioni.

Si tratta di una trave di lunghezza 2000 mm, con sezione rettangolare 50x200 mm in corrispondenza della cui mezzeria è praticato un intaglio profondo 100 mm. La prova consiste nell'imporre lo spostamento in corrispondenza della sezione dove è stato praticato l'intaglio e misurare la forza corrispondente [1].

Si riportano sinteticamente i valori dei parametri costitutivi adottati per il continuo:

- $E = 30000 \text{ [N/mm}^2\text{]}$
- $\nu = 0.2$

per l'interfaccia con softening bilineare:

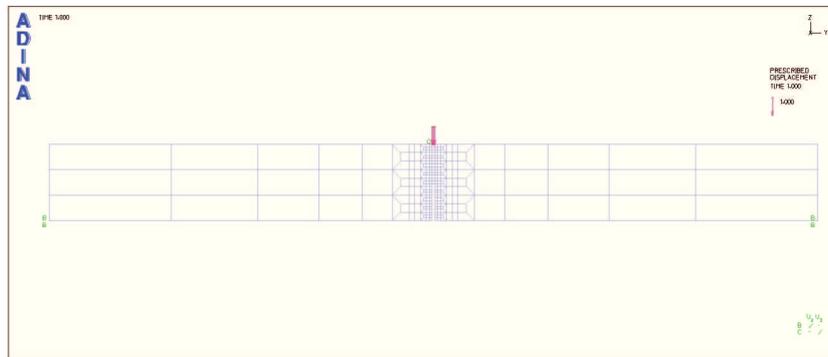
- $f_0 = 3.3 \text{ [N/mm}^2\text{]}$
- $G_f = 0.115 \text{ [N/mm]}$
- $H_{S1} = -66.6 \text{ [N/mm}^3\text{]}$
- $H_{S2} = -6.0 \text{ [N/mm}^3\text{]}$

- $w_{cr} = 0.15$ [mm]

e la relativa funzione di attivazione, corrispondente al criterio della massima tensione normale di Rankine:

$$g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = \mathbf{t}_S^T \mathbf{n} - f_0 - \chi_S$$

Nella Figura 4.22(a) è riportata la mesh utilizzata per discretizzare il problema. Nella Figura 4.23(a) è riportato il confronto tra la curva carico spostamento ottenuta sperimentalmente e quella ottenuta numericamente con il codice FracSDA8. Dal confronto si nota che il modello coglie l'andamento della curva, anche se la stima della resistenza di picco eccede quella misurata in laboratorio del 30 % circa. Nella Figura 4.23(b) viene riportato il bilancio energetico dell'analisi. Dalle Figure 4.24(a), dove viene riportata la configurazione deformata della trave, si può osservare che l'innesco dell'interfaccia avviene in corrispondenza dell'intaglio. La propagazione dell'interfaccia è collineare alla direzione dell'intaglio.

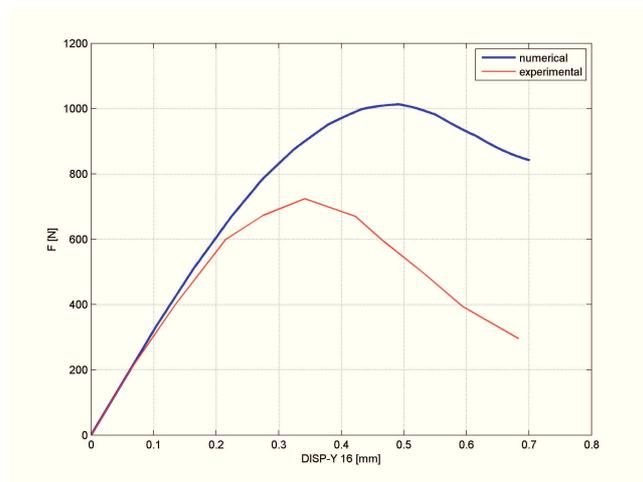


(a)

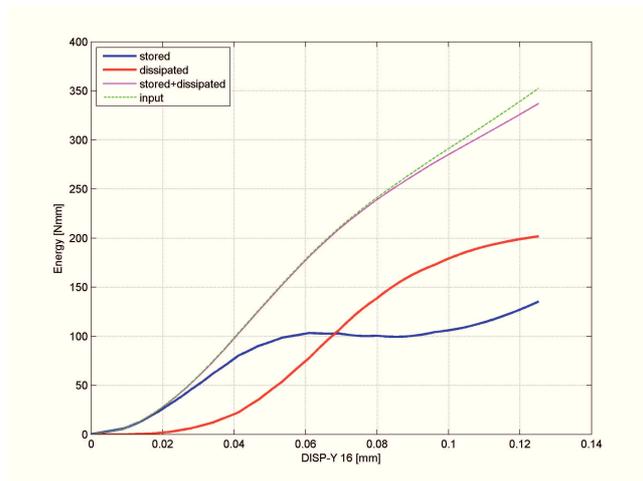
Figura 4.22: Mesh utilizzata per discretizzare la prova di flessione su tre punti.

4.5 Conclusioni

Nella tesi è stato formulato il problema del solido elastoplastico attraversato da discontinuità forti, risolto nell'ambito del metodo agli

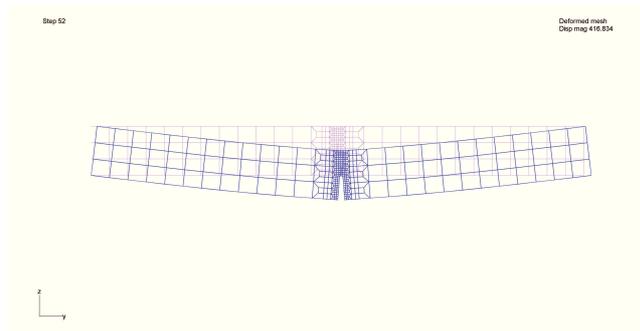


(a)

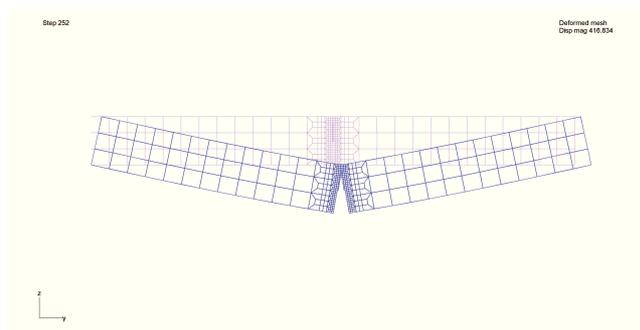


(b)

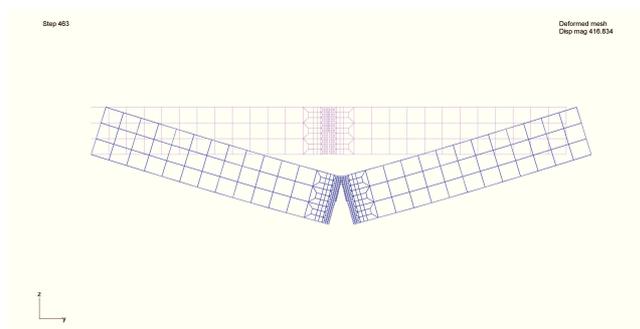
Figura 4.23: (a) Curva carico spostamento. (b) Bilancio energetico. Energia immagazzinata (blu), dissipata (rossa) e immessa (verde).



(a)



(b)



(c)

Figura 4.24: Configurazione deformata a diversi istanti di tempo.

elementi finiti.

Si è proposta una strategia di soluzione numerica, valida sia per elementi bilineari che prevedono salti costanti che per elementi biquadratici con salti lineari.

Tale strategia è stata implementata nel codice di calcolo FracSDA8, realizzato ad hoc in ambiente MatLab.

Le analisi numeriche condotte hanno evidenziato le differenze che nascono utilizzando elementi bilineari a quattro nodi con approssimazione costante del salto e elementi biquadratici a otto nodi con approssimazione lineare del salto.

In particolare gli elementi quadratici con salto lineare sembrano approssimare meglio l'andamento del salto lungo la discontinuità e la risposta del modello, sia dal punto di vista statico che dal punto di vista energetico.

Bibliografia

- [1] J. Alfaiate, A. Simone, e L. Sluys. Non-homogeneous displacement jumps in strong embedded discontinuities. *Int. J. Solids Struct.*, 40:5799–5817, 2003.
- [2] F. Armero e R. De Borst. Numerical aspects of cohesive-zone models. *Engng. Fract. Mech.*, 70(14):1743–1757, 2003.
- [3] Z.P. Bažant e G. Pijaudier-Cabot. Nonlocal continuum damage localization instability and convergence. *J. Appl. Mech.*, 55:287–293, 1988.
- [4] T. Belytschko, N. Moës, S. Usui, e C. Parimi. Arbitrary discontinuities in finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 50:993–1013, 2001.
- [5] R. I. Borja. A finite element model for strain localization analysis of strongly discontinuous fields based on standard galerkin approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:1529–1549, 2000.
- [6] A. Carpinteri. *Meccanica dei Materiali e della Frattura*. Pitagora Editrice, Bologna, 1992.
- [7] E.W.V. Chaves. *A three dimensional setting for strong discontinuities modeling in failure mechanics*. Tesi di Dottorato di Ricerca, Università Politècnica de Catalunya. Escola Tècnica superior d'enginyers de camins, canal i ports, 2003.
- [8] D. Ciancio, C. López, I. Carol, e M. Cuomo. New results in mesomechanical modeling of concrete using fracture-based zero-thickness interface elements. *Comp. Mod. Concrete Struct.*, -:171–177, 2003.

- [9] L. Contrafatto e M. Cuomo. A new thermodynamically consistent continuum model for hardening plasticity coupled with damage. *International Journal of Solid and Structures*, 39:6241–6271, 2002.
- [10] L. Contrafatto e M. Cuomo. A globally convergent numerical algorithm for damaging elasto-plasticity based on the multiplier method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63:1089–1125, 2005.
- [11] L. Contrafatto e M. Cuomo. A variational formulation of the equilibrium problem of a damaging continuum in the context of the strong discontinuities approach. In *7th EUROMECH Solid Mechanics Conference, ESMC 2009*, Lisbon, Portugal, 2009. full text on CD ROM.
- [12] L. Contrafatto e M. Cuomo. Finite element implementation of an enhanced strong discontinuities approach formulation vs. smeared crack models. In *IV European Conference on Computational Mechanics, ECCM 2010*, Paris, France, 2010. full text on CD ROM.
- [13] A.L.G.A. Coutinho, M.A.D. Martins, R.M. Sýdenstricker, J.L.D. Alves, e L. Landau. Simple zero thickness kinematically consistent interface elements. *Computes and Geotechnics*, 30:347–374, 2003.
- [14] M. Cuomo e Ventura G. A complementary energy formulation for no tension masonry-like solids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 189:313–339, 2000.
- [15] D. Dias-da Costa, J. Alfaiate, L.J. Sluys, e E. Jùlio. A comparative study on the modeling of discontinuous fracture by means of enriched nodal and element techniques and interface elements. *Int. J. Fract.*, 161:97–119, 2010.
- [16] R.A. Eve, B.D. Reddy, e R.T. Rockafellar. An internal variable theory of elastoplasticity based on the maximum plastic work inequality. *Quart. Appl. Math.*, 48:59–83, 1990.
- [17] A. Ferrara e A. Pandolfi. Numerical modeling of fracture in human arteries. *Computer Method in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 11(5):553–567, 2008.
- [18] M.M. Iordache e K.J. William. Localized failure analysis in elasto-plastic Cosserat continua. *COMMA4*, 151:559–586, 1998.

- [19] M. Jirásek. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 188:307–330, 2000.
- [20] M. Jirásek e T. Zimmermann. Rotating crack model with transition to scalar damage. *Journ. Engrg. Mech.*, 124(3):277–284, 1998.
- [21] M. Jirásek e T. Zimmermann. Embedded crack model: Part i: Basic formulation. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 50:1269–1290, 2001.
- [22] R. Larrson e K. Runesson. Element-embedded localization band based on regularized displacement discontinuity. *J. Eng. Mech.*, 122:402–411, 1996.
- [23] J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, e E. Oñate. A plastic damage model for concrete. *Internat. J. Solids Structures*, 25(3):299–326, 1989.
- [24] G. Meschke, R. Lackner, e H.A. Mang. An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 42:703–727, 1998.
- [25] M. L. Micciché. *Modeling of cohesive fracture processes through embedded discontinuities*. Tesi di Dottorato di Ricerca, Università di Catania, Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale, 2006.
- [26] N. Moës, I. Dolbow, e T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 46:131–150, 1999.
- [27] J. Mosler. On the modelling of highly localized deformations induced by material failure: the strong discontinuity approach. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 11:389–446, 2004.
- [28] J. Mosler. A novel algorithmic framework for the numerical implementation of locally embedded strong discontinuities. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 194:4731–4757, 2005.
- [29] J. Mosler. On the efficient implementation of an elasto-plastic damage model for large scale analyses of material failure: A multiscale approach. *Computers Structures*, 83:369–382, 2005.
- [30] J. Mosler e O.T. Bruhns. A 3D anisotropic elastoplastic-damage model using discontinuous displacement fields. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 60:923–948, 2004.

- [31] J. Mosler e G. Meschke. 3d modeling of strong discontinuities in elastoplastic solids: Fixed and rotating localization formulations. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 57:1553–1576, 2003.
- [32] J. Mosler e G. Meschke. Embedded crack vs. smeared crack models: a comparison of elementwise discontinuous crack path approaches with emphasis on mesh bias. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 193:3351–3375, 2004.
- [33] J. Oliver. A consistent characteristic length for smeared cracking models. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 28:461–474, 1989.
- [34] J. Oliver. Modelling of strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 2: Numerical simulation. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 39:3601–3623, 1996.
- [35] J. Oliver, A. E. Huespe, M. D. G. Pulido, e E. Samaniego. On the strong discontinuity approach in finite deformation settings. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 56:1051–1082, 2003.
- [36] J. Oliver, A.E. Huespe, e P.J. Sánchez. A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-fem vs. x-fem. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 195:4732–4752, 2006.
- [37] M. Ortiz. An analytical study of the localized failure modes of concrete. *Mech. Mat.*, 6:159–174, 1987.
- [38] M. Ortiz, Y. Leroy, e A. Needleman. A finite element method for localized failure analysis. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 61:189–214, 1987.
- [39] E. Papa e A. Taliercio. Anisotropic damage model for the multi-axial static and fatigue behaviour of plain concrete. *Engrg. Fract. Mech.*, 55(2):163–179, 1996.
- [40] J.N. Reddy. *An introduction to the finite element method, third edition*. McGraw-Hill International Edition, New York, USA, 2006.
- [41] L. Resende. A damage mechanics constitutive theory for the inelastic behaviour of concrete. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 60:57–93, 1987.
- [42] R.T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

- [43] A. Sellier e B. Bary. Coupled damage tensors and weakest link theory for the description of crack induced anisotropy in concrete. *Engrg. Fract. Mech.*, 69:1925–1939, 2002.
- [44] J. Simo, J. Oliver, e F. Armero. An analysis of strong discontinuities induced by strain softening in rate independent inelastic solids. *Computat. Mech.*, 12:277–296, 1993.
- [45] J. Simo, J. e Oliver. *Fracture and Damage in Quasi-brittle Structures*, capitolo A new approach to the analysis and simulation of strong discontinuities, pp. 25–39. E & FN Spon, 1994.
- [46] J.C. Simo e S. Rifai. A class mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *J. Num. Meth. Eng.*, 29:1595–1638, 1990.
- [47] J.C. Simo e R.L. Taylor. Consistent tangent operators for rate-independent elasto-plasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 48:101–118, 1985.
- [48] G. Ventura, J.X. Xu, e T. Belytschko. A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by efg. 2002, 54:923–944, *Int. J. Num. Meth. Eng.*
- [49] K. Washizu. *Variational methods in elasticity & plasticity*. Pergamon press, Oxford, England, 1982.
- [50] K.J. William. *Encyclopedia of Physical Science & Tecnology, Third Edition, Volume 3*. Academic Press, 2002.
- [51] R.C. Yu, G. Ruiz, e E.W.V. Chaves. A comparative study between discrete and continuum models to simulate concrete fracture. *Engrg. Fract. Mech.*, 75:117–127, 2008.
- [52] G. Zi e T. Belytschko. New crack tip elements for xfem and application to cohesive crack. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 57:2221–2240, 2003.
- [53] O.C. Zienkiewicz e R.L. Taylor. *The finite element method, fifth edition*. Butterworth-Heinemann, Oxford, England, 2000.