UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI CATANIA

DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E IMPRESA

GIUSEPPE VACCARELLA

L'IMO-DRSA APPLICATA ALLA GESTIONE DELLE SCORTE

TESI DOTTORATO

COORDINATORE e TUTOR

Chiar.mo Prof. Salvatore Greco

DOTTORATO IN MATEMATICA PER LE DECISIONI

ECONOMICHE E FINANZIARIE XXIV CICLO

INDICE

Capitolo 4

TEORIA DEI ROUGH SETS E GESTIONE DELLE SCORTE

INTRODUZIONE

Per molto tempo, il controllo delle scorte è stato uno dei problemi base della Ricerca Operativa.

Prima della nascita di tale branca di ricerca, la maggior parte dei modelli erano orientati verso la massimizzazione dei profitti, ma non prendevano in considerazione i costi collegati all' inventory management. In seguito, molti modelli capaci di gestire le varie componenti di costo nell'ambito della gestione delle scorte sono stati proposti in letteratura: il più importante è il modello di Wilson-Harris. Questo considera un trade-off tra costi da ordinazione e costi di mantenimento e fornisce una formula chiusa per la quantità economica di riordino (EOQ) sotto l'ipotesi di tasso istantaneo di domanda (demand rate) e periodo di soddisfacimento dell'ordine da parte del fornitore (pipeline period) costanti. Presentiamo qui di seguito questo famoso modello a scopo meramente introduttivo della tematica che andiamo ad affrontare. Si consideri un'impresa che ha bisogno di una quantità $D > 0$ di un item nell'intervallo di tempo $[a, a + T]$ $a, T \in \mathcal{R}$, necessaria per svolgere un'attività. Sia p il prezzo di una unità di D: il costo totale annuo è uguale a pD. Si ipotizzi che l'utilizzo di D sia regolare e deterministico nel tempo, e che non vi siano problemi per ripristinare le scorte. In questa ipotesi, l'azienda provvede, a scadenze regolari, a richiedere una quantità $Q>0$ dell' item, in modo da avere sempre una scorta sufficiente. In magazzino, quindi, rimarrà sempre una quantità di scorte compresa fra Q e 0. Volendo rappresentare questa situazione sul piano cartesiano con il tempo sull'asse delle ascisse e la quantità presente in magazzino sulle ordinate, si avrà un diagramma a denti di sega, che mostra la funzione $S(t)$ relativa all'andamento delle scorte in

$t \in [a, a+T]$. Si ipotizzi anche che, ad ogni ordine, venga addebitato all'impresa un costo di ordinazione $g > 0$. Sulla base di queste informazioni si vuole fare in modo di minimizzare i costi variabili acquistando una quantità idonea Q dell' item. La gestione a lotto economico è applicabile sia agli ordini di acquisto che agli ordini di produzione. Nel caso degli ordini di produzione di un semilavorato, viene ottimizzato il trade-off fra costo di attrezzaggio per ogni lotto e costo di mantenimento a scorta; nel caso degli ordini di acquisto di un prodotto finito, viene ottimizzato il trade-off fra costo di gestione dell'ordine e costo di mantenimento a scorta. Se la produzione è gestita con lotto economico, la giacenza media dell'item nell' intervallo $[a, \ a+T]$ è pari $Q/2$. Il costo totale annuo prevede tre componenti:

- la prima è il prezzo della materia prima, che è uguale a pD;
- la seconda è il costo di ordinazione, che è uguale a $g[D/Q]$;
- la terza è il costo di detenzione della merce (il costo che si sostiene per tenere la materia prima in magazzino), che si ritiene essere proporzionale alla quantità media delle scorte $Q/2$ secondo una costante m.

Dunque la funzione di costo totale è uguale a:

$$C(Q) = pD + g\frac{D}{Q} + \ m\frac{Q}{2}$$

Qui le circostanze richiedono ovviamente di calcolare la quantità ottimale Q^* che minimizzi $C(Q)$. Derivando possiamo studiare il comportamento di $C(Q)$:

$$C'(Q) = -g\frac{D}{Q^2} + \frac{m}{2}.$$

Si noti che quest'ultima funzione non prevede il costo annuo della materia prima (il prezzo p è scomparso). Infatti p date le ipotesi poste in precedenza non dipende da Q: spesso però in altri più complessi modelli il prezzo p di acquisto lo si può ipotizzare come una funzione $p(Q)$ decrescente rispetto a Q in quanto nella realtà operativa all'aumentare di Q spesso i fornitori concedono sconti.

Ponendo $C'(Q) = -g\frac{D}{Q^2} + \frac{m}{2} = 0$ possiamo ricavare la formula per il calcolo di Q^* (non considerando, per ovvi motivi, il caso in cui la quantità ottimale sia 0):

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Dg}{m}}.$$

Inoltre, calcolando la derivata seconda, si può osservare che in Q^*si ha un minimo globale nel dominio economico di $C(Q)$. Infatti si ha:

$$C''(Q) = \frac{gD}{Q^3}$$

che è certamente maggiore di zero, in quanto g, D, Q sono tutti e tre positivi. Dagli anni 50, altri autori introdussero le ipotesi di domanda incerta e di conseguenza arricchirono il modello di Wilson-Harris. Fra quei modelli, il più importante è il modello di Whitin (1952), che è basato sull'ipotesi di time-indipendent stochastic demand rate e sulla conseguente introduzione del costo di shortage. Negli anni il modello è stato mano mano arricchito considerando ipotesi supplementari: introduzione di pipeline time stocastico, passaggio dal mono item al multi item, introduzione di varie forme di funzioni domanda deterministiche o stocastiche, ipotesi relative all'orizzonte temporale considerato e in generale ai rapporti fra impresa-fornitore o impresa-cliente e così via… (Sahin 1979, 1982), (Hariga 1994), (Song, Zipkin 1993, 1996), (Karlin 1960), (Wagner, Whitin 2004).

Quale che siano le ipotesi poste in essere tutti i classici inventory models mirano alla minimizzazione di una funzione di costo definita in termini delle tre principali componenti di costo: shortage cost, stockholding cost, ordering cost. Lo stockholding cost appare quando i prodotti sono presenti in magazzino, e pertanto ciò dipende dal livello di scorte e dal periodo di mantenimento. I costi finanziari, i costi opportunità, i costi di assicurazone, i costi di obsolescenza sono esempi stockholding cost. Il costo di riordino (orderind costs) è causato dall'emissione e dall'esecuzione di un ordine; esempi di orderind costs sono il costo del lavoro, il costo di acquisto, il costo di amministrazione. Lo shortage cost quantifica il rischio di non soddisfare la demanda e motiva la necessità di mantenere scorte, mentre lo stockholding cost e l'ordering cost coinvolgono una relazione tra il fornitore e l'impresa, la shortage cost riguarda i rapporti fra l'impresa e il cliente. A partire dal lavoro di Wilson-Harris, nel tempo la popolarità dell' inventory cotrol è cresciuta e molti inventory models sono stati proposti nella letteratura. Come sottolineato da Lenard e Roy (1995), gli esistenti inventory models sono, tuttavia, non pienamente soddisfacenti se rapportati alle pratiche attuali nell'ambito del controllo delle scorte.

Questo accade per parecchie ragioni:

- é difficile se non impossibile, attribuire un valore alle differenti componenti della funzione di costo (quanto costa un ordine? Quanto costa mantenere un determinto stock di bene per un mese? A quanto ammonta lo shortage cost?);
- gli inventory models sono basati su alcun ipotesi semplificatrici che minano il loro realismo: per esempio, sono considerati valori medi delle quantità coinvolte, ma molto spesso chi opera è interessato anche alla distribuzione delle variabili stocastiche attorno a un valore medio;
- in generale, gli inventory model danno una soluzione obiettivamente ottima che non tiene conto delle preferenze del decisore e della sua avversione al rischio;
- gli inventory models tendono ad avere una formulazione abbastanza complessa che può essere difficilmente compresa dal user, che percepisce la soluzione ottimale come il responso di un oracolo e tutto il modello viene visto come una "black box".

Al fine di tenere in adeguata considerazione i punti deboli sopracitati degli inventory models, si propone un approccio interattivo di ottimizzazione multiobiettivo. L'idea principale è di evitare l'aggregazione delle differenti componenti di costo e di considerare ogni aspetto che influenza il costo totale come una distinta funzione obiettivo. Quindi, invece di ottimizzare una singola complessiva funzione di costo, noi consideriamo il seguente insieme di funzioni obiettivo che devono essere tutte minimizzate:

- il numero di ordini (nel considerato orizzonte temporale),
- il rischio di shortage,

- il minimo livello di stock,
- il massimo livello di stock,
- il livello di shortage.

Si propone anche di tenere in conto l'incertezza, usando l'approccio descritto in (Greco 2009 et al). Invece di considerare valori attesi delle sopra descritte funzioni, si propone di esplodere ogni funzione obiettivo in un insieme di funzioni obiettivo rappresentanti quantili di probabilità scelti ad hoc. Per esempio, la funzione obiettivo numero di ordini attesi sarà rappresentata dal seguente insieme di funzioni obiettivo:

- il numero di ordini con probabilità almeno del 75%,
- il numero di ordini con probabilità almeno del 50%,
- il numero di ordini con probabilità almeno del 25%.

Di certo tramite una procedura di ottimizzazione multi obiettivo interattiva, l' utilizzatore sarà capace di selezionare la soluzione con riferimento alle sue preferenze.

Rispetto ai molti metodi di ottimizzazione interattiva multi obiettivo esistenti in letteratura (si veda per esempio Miettinen 1999, Branke et al. 2008), si propone di applicare il metodo interattivo guidato dal Dominance-based Rough Set Approach (IMO-DRSA) (Greco 2008 et al.), per le sue molte buone proprietà in termini di comprensibilità e apprendimento. In tal senso, infatti, il paradigma *"if....,then...."* tramite il quale le regole decisionali forniscono un modello decisionale rappresentativo delle preferenze dell'user, pone una netta linea di demarcazione rispetto ad altri modelli multicriteriali: da un lato, queste sono di facile comprensione per chiunque; dall'altro lato, è sempre possibile collegare ogni regola agli esempi su cui il decisore ha espresso le proprie preferenze, permettendo una agevole interazione con il decisore che può facilmente ritornare nelle informazioni preferenziali fornite rivedendole opportunamente.

Rimarchiamo che alcuni multiobjective inventory models sono stati già presentati in letteratura, ma essi sono abbastanza differenti dal nostro approccio poichè essi sono fortemente astratti essendo basati sull' uso dei fuzzy sets (Maity 2008, Roy 1998, Mahapatra 2005, Mandal 2005).

L'intreccio applicativo di IMO-DRSA e DRSA in condizioni di incertezza enfatizza infatti il mutamento di prospettiva nel passare da una logica di single objective optimization a una logica multi objective optimization in ambito di inventory management; infatti la gestione del trade-off fra le varie componenti di rischio viene qui ad assumere oltremodo i più specifici contorni della goal programming.

Per esempio, idealmente, la gestione del trade-off fra il rischio del mantenere scorte e il rischio di shortage dovrebbe avere per obiettivo che trascorso τ (pipeline period) lo stock di un item tenda allo zero senza che s'incorra in fenomeni di shortage: a riguardo (come in altri casi), l'approccio presentato in questo lavoro senza alcun dubbio consegue delle ottime performance, coniugando all'uso in maniera appropriata dei quantili di rischio rappresentativi di scenari contrapposti, la gradualità e la trasparenza, tipica dei metodi interattivi, con cui il decisore crea la sua consapevolezza della frontiera Pareto efficiente.

Nella stessa ottica e con le medesime finalità, si propone anche un modello per la la gestione del caveau di una banca; questo problema può essere tranquillamente considerato un sotto caso dei tradizionali inventory management problems ma con una particolare di peculiarità. Come sarà chiarito meglio nella parte dedicata a questo argomento, qui si prefigura un problema di inventory management atipico da fronteggiare in cui alla domanda di moneta si contrappone un'offerta di moneta nelle varie forme di prelevamento e di versamento. Nella gestione del caveau è proprio questo aspetto che ne determina in maniera forse ancor più accentuata i caratteri di goal programming sempre alla luce della metodologia risolutiva utilizzata che è ancora l'IMO-DRSA unita alla DRSA in condizioni di incertezza.

Lo studio sull'inventory management trova un naturale compimento nell'estensione della nostra metodologia alla gestione multi prodotto. Ciò era d'obbligo, se si voleva elevare ad una dimensione più squisitamente applicativa l'oggetto di questa trattazione. Si pensi all'importanza e al peso che un'equilibrata politica di inventory management riveste sui bilanci delle aziende che operano nel settore terziario; per esempio nei grossi centri commerciali in cui l'attività preponderante è rappresentata dalla vendita di un'infinità di prodotti finiti. In tale o in simili contesti, le criticità non tanto si riscontrano a livello di singolo prodotto, quanto invece si esprimono nella capacità di mantenere una serie di equilibri sul piano economico, finanziario, patrimoniale e allocativo delle risorse in campo. Ecco allora, la necessità di un approccio che affronti le forze in gioco in termini aggregati; da un lato, si devono fronteggiare i tradizionali rischi legati alla gestione delle scorte (rischio di ordine, rischio di shortage, rischio mantenimento), dall'atro, si opera in termini di magazzino aggregato sia per non perdere la visione d'insieme sia al fine di operare una sintesi che non perda di vista il quadro d'insieme. Il lavoro si articola in quattro capitoli. Nel primo capitolo si cerca di dare al lettore una base teorica oltre che cognitiva del cambiamento di prospettiva introdotta dal passaggio da una logica di single optimization problem a una di tipo multiobjective. Il capitolo 2 e il capitolo 3 introducono rispettivamente alla teoria dei Rough set e i metodi interattivi di ottimizzazione multi-obiettivo. Nel quarto ed ultimo capitolo, si introduce il modello dell'inventory management e l' IMO-DRSA in condizioni di incertezza.

Capitolo 1

PROBLEMI DECISIONALI E APPROCCIO MULTICRITRIALE ALLE DECISIONI.

1. I PROBLEMI DECISIONALI

1.1 GENERALITÀ

Un problema decisionale è un processo in cui uno o più decisori si trovano a dover effettuare delle scelte fra diverse alternative nel rispetto di determinati obiettivi e vincoli. La formulazione tradizionale di un problema di decisione è basata sui seguenti tre elementi:

1) un insieme ben definito di alternative ammissibili: per esempio un insieme di possibili progetti d'investimento,

2) un'unica "funzione obiettivo" a valori reali (detta anche "criterio"), che riflette le preferenze del decisore: per esempio, il profitto, misurato in termini di valore attuale della differenza tra costi e ricavi dei progetti considerati, oppure il costo unitario, ecc..

3) un problema matematico ben formulato descritto nei termini di una funzione obiettivo da massimizzare nel rispetto degli eventuali vincoli: la "soluzione" del problema è pertanto l'alternativa ottimizza la funzione obiettivo: nel nostro esempio il progetto che fornisce il massimo profitto.

Questa metodologia tradizionale, l'unica adoperata sino alla fine degli anni 60 per affrontare problemi di decisione, è definita *approccio monocriteriale*; essa riduce drasticamente la complessità della realtà modellizzandola su un'unica dimensione, una sola scala numerica esaustiva, spesso monetaria, riconducendo un complesso problema decisionale ad un mero calcolo. L'analisi costi-benefici si inserisce in questo contesto, con le ulteriori complicazioni e forzature dovute alla presenza di effetti difficilmente quantificabili o valutabili in termini monetari, alla implicita ed assoluta compensazione tra effetti positivi e negativi, ecc.

L'approccio monocriteriale costituisce una forte astrazione dal comportamento reale. Esso, infatti, non permette di modellizzare la pluralità di obiettivi generalmente perseguiti dal decisore nei problemi della vita reale: per esempio, nella scelta di un progetto, un ente pubblico non considera solamente i possibili profitti del progetto, ma anche il suo impatto ambientale, le conseguenze economiche e sociali sul territorio, l'equilibrio finanziario, ecc.

Al fine di prendere in esplicita considerazione tutti questi aspetti, spesso conflittuali, è stato proposto un differente approccio ai problemi di decisione, basato su una appropriata riformulazione dei punti 2) e 3):

2') un insieme di "obiettivi" rappresentati da funzioni a valori reali (criteri), aggregati per mezzo di una funzione di utilità che assegna una valutazione complessiva a ogni possibile alternativa, rendendone possibile il confronto sulla base del principio che maggiore è la valutazione complessiva, migliore è l'alternativa considerata.

3') un problema matematicamente ben formulato, consistente nel trovare la (o le) alternative che massimizzano la funzione di utilità o funzione valore (soluzione di "compromesso").

Questa metodologia, detta delle decisioni multicriteriali (Multiple Criteria Decision Making - MCDM), pur rientrando ancora in un approccio normativo, rappresenta già un modo più realistico di trattare problemi di decisione, rendendo esplicite le preferenze pre-esistenti implicitamente nella mente del decisore. Essa rientra nella cosiddetta "ottimizzazione vettoriale" o programmazione matematica multi-obiettivo e viene usualmente chiamata Multiple Attribute Utility Theory (MAUT).

Tuttavia anche l'MCDM presenta alcune limitazioni (Roy 1990):

- l'insieme delle azioni ammissibili è spesso proposto in maniera non precisa;
- le preferenze del decisore non sono sempre ben stabilite, come si ipotizza utilizzando la funzione di utilità, che permette sempre di confrontare due alternative,
- i dati coinvolti nei problemi di decisione sono spesso incerti, a causa della casualità, della vaghezza e della granularità delle informazioni disponibili;
- la validazione della soluzione può non essere basata solamente su un modello matematico, senza considerare anche gli aspetti organizzativi e culturali del processo di decisione.

Sulla base di queste considerazioni è stata proposta una nuova formulazione del problema di decisione, che prende in considerazione l'intero processo decisionale. Essa si caratterizza per i seguenti punti (Roy 1990):

1") un insieme A non necessariamente stabile di azioni potenziali: le azioni considerate non sono necessariamente tutte ammissibili (realizzabili), perché anche azioni "ideali" possono essere prese in considerazione durante il processo decisionale, per esempio come reference points per degli utili confronti. Inoltre, l'insieme delle azioni può evolvere durante il processo decisionale.

2") un insieme G di criteri che rappresentino i differenti punti di vista dai quali studiare il problema di decisione: questi criteri dovrebbero prendere in considerazione anche le diverse fonti di incertezza e la loro modellizzazione dovrebbe inoltre consentire alcune forme di esitazione espresse dal decisore.

3") un problema matematicamente non ben definito: in questo caso non esiste alcuna funzione da ottimizzare, bensì il supporto alla decisione mira a costruire un modello che permetta di confrontare le azioni potenziali sulla base dell'insieme di criteri **G** considerato al fine di affrontare coerentemente il problema decisionale affrontato.

Questa metodologia di supporto alla decisione è definita aiuto multicriteriale alla decisione (Multiple Criteria Decison Aid - MCDA). Durante una prima fase del processo, l'analista aiuta il decisore a costruire i propri convincimenti e ad ottenere una appropriata "raccomandazione" (recommendation) per il problema di decisione affrontato, lasciando al decisore medesimo la decisione finale.

1.2 CLASSIFICAZIONE DEI PROBLEMI DECISIONALI

I problemi decisionali affrontati nella realtà operativa sono diversi e di molteplice natura, sia con riferimento alla particolare problematica affrontata che al contesto che li caratterizza.

Le principali problematiche decisionali sono (Roy 1985):

1) **Scelta** (choice): selezionare il più piccolo sottoinsieme di $\boldsymbol{A}$ (possibilmente una sola azione) che contenga le azioni considerate "migliori" o soddisfacenti con riferimento all'insieme di criteri $\boldsymbol{G}$. Quindi lo scopo della decisione è quello di scegliere il migliore oggetto. Un esempio tipico è quello del processo decisionale che porta all'acquisto di un automobile, dove le automobili sono gli oggetti della decisione mentre caratteristiche come il prezzo, il colore, la velocità sono gli attributi.

2) **Classificazione** (classification): assegnare ogni azione ammissibile (se $\boldsymbol{A}$ è finito) ad una della categorie predefinite (segmentazione), eventualmente preferenzialmente ordinate (sorting). In questo caso, lo scopo della decisione è quello di assegnare gli oggetti a classi predefinite. Problemi di questo tipo si riscontrano quando occorre assegnare un'impresa ad una classe predefinita di rischio (credit scoring), dove le imprese sono gli oggetti della decisione, mentre

gli indicatori economici e finanziari sono gli attributi. Un altro esempio di decisione di questo tipo si ha quando si devono diagnosticare delle patologie ad un insieme di pazienti, dove i pazienti sono gli oggetti della decisione mentre i sintomi e i risultati dei test medici sono gli attributi.

3) **Ordinamento** (ranking): ordinare le azioni di $\boldsymbol{A}$ (se finito) dalla migliore alla peggiore in classi di equivalenza. In altre parole, lo scopo della decisione è quello di ordinare gli oggetti dal migliore al peggiore. L'esempio classico è quello delle graduatorie dei concorsi dove i candidati sono gli oggetti della decisione mentre i voti conseguiti nelle varie prove sono gli attributi.

Relativamente ai problemi di classificazione, questi possono essere a loro volta ripartiti in due sottocategorie: Tassonomici, quando gli insiemi dei valori assunti dagli attributi e le classi predefinite a cui associare gli oggetti non sono ordinati da relazioni di preferenza: questo è il caso delle diagnosi mediche sopra esposte; problemi Classificazione Ordinale (multiple criteria sorting), quando gli insiemi dei valori assunti dagli attributi e le classi predefinite a cui associare gli oggetti sono ordinati da relazione di preferenza, questo è il caso del Credit Scoring. Inoltre, se gli insiemi dei valori assunti dagli attributi sono ordinati da relazione di preferenza essi prenderanno il nome di criteri, altrimenti saranno chiamati semplicemente attributi. Per esempio, nelle decisioni che riguardano la selezione di un'automobile il prezzo dell'auto è un criterio perché, ovviamente, un prezzo basso è migliore di uno più alto, mentre il colore della auto non è un criterio perché in generale il colore rosso non è intrinsecamente migliore del colore verde. Tuttavia, anche il colore potrebbe diventare un criterio se, per esempio, il decisore considerasse il colore rosso migliore del colore verde.

I modelli che analizzano i problemi decisionali fanno uso di processi che, in modo più o meno trasparente, legano le decisioni (output del modello) alle caratteristiche degli oggetti espresse dalle informazioni ottenute dagli attributi presi in considerazione (input del modello). Infatti, le informazioni ottenute dagli attributi, in merito agli oggetti da esaminare, molto spesso vengono elaborate secondo metodologie che non consentono al decisore di comprendere in modo chiaro le relazioni tra le informazioni che esso ha fornito (tramite gli attributi) e le raccomandazioni o i comportamenti consigliati dal modello decisionale. Per cui, quando il modello decisionale è poco trasparente, esso è percepito dal decisore come una black-box il cui risultato deve essere accettato perché è l'autorità dell'analista a garantire la sua validità. Pertanto, al fine di soddisfare al meglio le esigenze del decisore, occorrono metodologie più trasparenti in cui sia chiaramente mostrata la relazione tra le informazioni fornite all'analista e la raccomandazione finale. Un modello che possiede tali caratteristiche in termini di chiarezza e trasparenza viene definito glass-box.

Si possono poi classificare e distinguere diversi tipi di problemi decisionali. Rispetto alle alternative:

1) discreti (numero finito di alternative),

2) continui ($\boldsymbol{A}$ insieme infinito).

Rispetto alla natura delle informazioni:

1) soft (in presenza di informazioni solamente qualitative),

2) hard (informazioni solamente quantitative),

3) misti (disponibilità di informazioni qualitative e quantitative).

Rispetto allo scenario:

1) in condizioni di certezza (informazioni deterministiche, perfettamente conosciute a priori),

2) in condizioni di rischio (conoscenza delle distribuzioni di probabilità delle informazioni),

3) in condizioni di incertezza (assenza di distribuzioni di probabilità),

4) in condizioni di incertezza competitiva (risultati che dipendono anche dalle decisioni adottate da altri soggetti, normalmente "avversari", "teoria dei giochi").

Rispetto alla distribuzione temporale degli effetti:

1) ad effetti immediati (conseguenze che si verificano e si esauriscono immediatamente),

2) ad effetti differiti (conseguenze lontane nel tempo o che si ripetono nel tempo).

Rispetto alla misurazione delle conseguenze:

1) con conseguenze definite e nette (precise),

2) con conseguenze sfuocate (imprecisioni linguistiche, informazioni "fuzzy"),

3) quantitative (misurabili numericamente),

4) qualitative (descrivibili verbalmente).

¨ Rispetto al numero dei decisori:

1) singolo decisore (single person: unica persona fisica o istituzione),

2) pluralità di decisori (multi person: molteplicità di persone o di enti, spesso con interessi contrapposti),

- concorrenti (più decisori con lo stesso grado di potere decisionale),
- gerarchici (più decisori con poteri decisionali subordinati).

Rispetto al numero dei punti di vista:

1) monocriteriali (in presenza di una sola funzione-obiettivo),

2) multicriteriali (preferenze espresse con riferimento esplicito a molteplici punti di vista).

Rispetto alle fasi solutive:

1) single-step (risoluzione del problema in una sola fase),

2) multistep (necessità di affrontare il problema in fasi distinte e successive).

1.3 AIUTO MULTICRITERIALE ALLA DECISIONE

Secondo Roy (1993) si può definire l'MCDA come "l'attività di chi, in modi che noi definiamo scientifici, aiuta ad ottenere elementi di risposte a domande poste dagli attori coinvolti in processi di decisione, elementi che aiutano a chiarire questa decisione al fine di metter gli attori nelle condizioni più favorevoli per quel tipo di comportamento che aumenti la coerenza tra l'evoluzione del processo decisionale, da una parte, e gli obiettivi e/o il sistema di valori in cui questi attori si trovano reciprocamente ad operare." Pertanto*,* il fine dei problemi decisionali è quello di dare al decisore (Decisore) una raccomandazione, o di favorire un comportamento*,* riguardo ad un insieme di oggetti (chiamati anche alternative, soluzioni, atti, azioni, opzioni, candidati, etc…) valutati da diversi punti di vista considerati rilevanti per il problema stesso, chiamati attributi (o anche caratteristiche, variabili, criteri, etc..).

In un contesto MCDA una raccomandazione si ottiene come risultato finale di una procedura di quattro fasi (Roy 1985):

1) la definizione delle *azioni* che devono essere prese in considerazione e la definizione e *formulazione del problema* di decisione: scelta, classificazione, ordinamento;

2) l'individuazione dei *punti di vista* da prendere in considerazione e la *modellizzazione delle preferenze* del decisore rispetto ad ognuno di questi punti di vista;

3) la sintesi delle informazioni disponibili in un *modello* complessivo che permetta di aggregare le preferenze;

4) l'applicazione di una certa procedura al fine di ottenere una raccomandazione per il problema di decisione considerato.

Gli elementi di base dell'aiuto multicriteriale alla decisione sono quindi due: un insieme di azioni $\boldsymbol{A} = \{a, b, \dots\}$ e una famiglia coerente di criteri $\boldsymbol{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$. Nel seguito si indicherà con $\boldsymbol{F}$ l'insieme degli indici dei criteri di $\boldsymbol{G}$, cioè $\boldsymbol{F} = \{1,2, \dots, m\}$.

L'insieme di azioni $\boldsymbol{A}$ contiene l'insieme degli elementi (oggetti, progetti, candidati,…) che devono essere analizzati durante il processo decisionale.

I differenti punti di vista considerati sono modellati per mezzo di attributi o criteri. Ogni **attributo** rappresenta uno o più punti di vista senza considerarne esplicitamente proprietà ordinali. Un **criterio**, invece, è una funzione $g_j: \boldsymbol{A} \to R$ tale che, $\forall\, a \in \boldsymbol{A},\ g_j(a)$ è la valutazione dell'azione a con riferimento al criterio g_j e, $\forall\, a, b \in \boldsymbol{A}\quad g_j(a) \geq g_j(b)$ significa che "a è almeno tanto buona quanto b con riferimento ai punti di vista rappresentati dal criterio g_j".

Nei problemi discreti le valutazioni delle azioni per mezzo dei criteri di $\boldsymbol{G}$ sono usualmente raccolte in una matrice, detta appunto **matrice delle valutazioni** multicriteriali o **impact matrix**.

L'insieme $\boldsymbol{G}$ dei criteri dovrebbe soddisfare alcune proprietà (Bouyssou 1990):

1) *leggibilità*, cioè l'insieme dei criteri $\boldsymbol{G}$ dovrebbe essere costituito da un numero di criteri sufficientemente piccolo in modo che essi possano costituire una base di discussione tra gli attori per permettere all'analista di ottenere le informazioni inter-criteriali necessarie per l'implementazione di una procedura di aggregazione,

2) *operatività*, cioè l'insieme di criteri ***G*** dovrebbe essere considerato come una base solida per continuare il processo di aiuto alla decisione.

Inoltre, l'insieme dei criteri ***G*** dovrebbe essere *coerente* (Roy e Bouyssou 1993), cioè dovrebbe rappresentare tutti i differenti aspetti del problema evitando ridondanze. Più precisamente, un insieme di criteri ***G*** è coerente se è:

- *esaustivo*, cioè contiene ogni punto di vista importante, cosicché, se $g_j(a) = g_j(b)$ per tutti i criteri di ***G***, si deve concludere che *a* e *b* sono indifferenti;

- *monotono*, cioè le preferenze parziali che sono rappresentate per mezzo dei singoli criteri devono essere coerenti con la preferenza complessiva, cosicché se l'azione *a* è giudicata globalmente migliore dell'azione *b*, allora ogni azione *c*, che è almeno tanto buona quanto l'azione *a* su tutti i criteri di ***G***, deve essere anch'essa giudicata migliore dell'azione $b, a, b, c \in \boldsymbol{A}$;

- *minimale*, cioè non dovrebbe contenere nessun criterio ridondante, per cui la soppressione da ***G*** di qualsiasi criterio conduce ad un insieme di criteri che non soddisfa le due condizioni precedenti.

L'approccio multicriteriale, pertanto, si propone di aiutare il decisore nell'analisi del problema decisionale affrontato rispetto alle azioni ammissibili ed all'insieme dei criteri presi in considerazione. Esso:

1. migliora la trasparenza e la coerenza del processo decisionale,

2. definisce, precisa e mette in evidenza il peculiare ruolo del decisore,

3. usa tutte le informazioni che il decisore può, sa e vuole fornire per costruire un modello quanto più fedele possibile alle sue preferenze.

Il paradigma multicriteriale proprio dell'MCDA si caratterizza fondamentalmente per:

-pluralità di criteri o punti di vista esplicitamente presi in considerazione per condurre il sistema o guidarne la sua evoluzione,

-per la conflittualità, almeno locale, di questi criteri, per cui occorre ricercare un certo "compromesso" rispettando dei principi di coerenza,

-per l'obiettivo di questi compromessi che si prefiggono di conferire ai criteri dei valori compatibili con una certa forma di equilibrio, che in un contesto dinamico avrà necessariamente carattere transitorio.

2. LE STRUTTURE DI PREFERENZA

2.1. GENERALITÀ

Un approccio più realistico all'analisi multicriteriale delle decisioni deve prendere in considerazione la modellizzazione delle preferenze. Infatti, nell'approccio classico si dà per scontata la possibilità di rappresentare le preferenze per mezzo di una funzione di utilità $u\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{R}$ che assegna ad ogni azione $a \in \boldsymbol{A}$ un valore crescente con la preferibilità dell'azione considerata rispetto al punto di vista particolare - singolo criterio - o globale – relativamente alla sintesi di tutti i criteri del problema di decisione affrontato. In quest'ottica tanto maggiore è il valore *u(a)* assegnato all'azione $a \in \boldsymbol{A}$, tanto più preferibile è l'azione *a* stessa rispetto alle altre azioni di **A**, per cui $a, b \epsilon \boldsymbol{A}$ si ha che se $u(a) > u(b)$, allora *a* è preferita a *b* e se $u(a) = u(b)$, allora *a* e *b* sono indifferenti tra di loro. Questo approccio, anche se apparentemente molto neutro e naturale, ha delle conseguenze molto rilevanti dal punto di vista del tipo di preferenze rappresentate. Più in particolare, questo approccio implicitamente assume che, date due azioni, si riesca sempre a confrontarle tra di loro (infatti per ogni $a, b \epsilon \boldsymbol{A}$ o $u(a) > u(b)$, e allora *a* è migliore di *b*, o $u(a) < u(b)$, e allora *a* è peggiore di *b*, o $u(a) = u(b)$, e allora *a* e *b* sono indifferenti). Inoltre, la presenza di una funzione di utilità implica la transitività dell'indifferenza (se *a* e *b* sono indifferenti e *b* e *c* sono pure indifferenti, allora anche *a* e *c* sono indifferenti) e la transitività della preferenza (se *a* è preferito a *b* e *b* è preferito a *c*, allora anche *a* è preferito a *c*).

Nei problemi reali però queste "conseguenze naturali" dell'esistenza di una funzione di utilità non sono sempre verificate. Infatti, non è sempre detto che si riescano a confrontare due azioni, e anzi molto spesso si sperimentano situazioni di esitazione nel valutare la preferenza tra due azioni. Inoltre, è abbastanza naturale riscontare anche situazioni in cui non vale la transitività della preferenza o della indifferenza. Classico è l'esempio ispirato a un famoso paradosso dovuto a Condorcet e che in un certo modo sta alla base del teorema di impossibilità di Arrow. Si considerino tre alternative, per esempio tre impianti di depurazione dell'aria, e tre criteri, per esempio presenza nell'aria di tre agenti inquinanti.

Indichiamo con *a*, *b*, e *c* le tre alternative e con g_1, g_2 e g_3 i tre criteri. L'ordine di preferenza delle tre alternative rispetto ai tre criteri sia quello rappresentato nella seguente Tavola 1. Pertanto, ad esempio rispetto al criterio g_1 l'alternativa a è la prima in ordine di preferenza, l'alternativa b è la seconda e c la terza.

Tavola 1. Ordinamento di preferenza delle tre alternative con riferimento ai tre criteri.

Tavola 1

Alternative\ Criteri	g_1	g_2	g_3
a	1°	2a	3a
b	2°	3a	1a
c	3°	1a	2a

Si supponga ora che il decisore voglia ordinare globalmente le tre alternative seguendo questo principio: per tutte le coppie di alternative *x* e *y*, *x* è globalmente preferita a *y* se per la maggioranza dei criteri *x* è preferita a *y*. Con riferimento alle tre alternative *a*, *b*, e *c* si ha pertanto che *a* è preferita a *b* (infatti *a* è migliore di *b* con riferimento al criterio g_1 e al criterio g_2 e che *b* è preferita *a c* (infatti *b* è migliore di *c* con riferimento al criterio g_1 e al criterio g_2). Ci si aspetterebbe, quindi, dalla preferenza di a su b e di *b* su c anche la preferenza di *a* su c. Tuttavia si osservi che *c* è preferita ad *a* per i criteri g_2 e g_3 e, pertanto, abbastanza sorprendentemente, è *c* ad essere preferita ad *a*.

Queste ed altre osservazioni hanno spinto gli studiosi di MCDA ad abbandonare l'assunzione aprioristica dell'esistenza di una funzione di utilità (marginale o complessiva). Si è, invece, considerato come dato originario una relazione binaria di preferenza su $\boldsymbol{A}$, che non necessariamente soddisfi le proprietà di completezza e transitività che caratterizzavano l'esistenza di una funzione di utilità. In quest'ottica la funzione di utilità è solo una delle possibili rappresentazioni delle relazioni binarie di preferenza. Inoltre, essa esiste solo se alcune ben precise proprietà (o, se si vuole, requisiti tecnici) sono soddisfatte.

Pertanto, l'attenzione si è spostata sulle proprietà delle relazioni binarie di preferenza e sulle conseguenti rappresentazioni numeriche. In questo contesto si riescono a rappresentare situazioni molto più variegate e realistiche (per esempio esitazioni, effetti soglia, preferenze sfumate, etc.) di quelle rappresentate dalla "classica" funzione di utilità.

2.2 OSSERVAZIONI GENERALI SULLE RELAZIONI BINARIE

La modellizzazione delle preferenze è un passo fondamentale in economia, sociologia, psicologia, scelte sociali, etc. Essa è di fondamentale importanza per l'aiuto alla decisione.

Al fine di introdurre le principali nozioni sulle strutture di preferenza, si introducono alcuni concetti generali sulle relazioni binarie. Sia X un dato insieme. Una relazione binaria R su **X** è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times X$. Se $(a, b) \epsilon R$, allora si scrive anche $a\, R\, b$. Data una relazione binaria R, il complemento R^c, l'inverso R^{-1} e il duale R^d sono rispettivamente definiti come segue:

$(a, b) \in R^c \iff (a,b) \notin R,$

$(a, b) \in R^{-1} \iff (b, a) \in R,$

$(a, b) \in R^d \iff (b, a) \notin R.$

Una relazione binaria R definita su un insieme finito X può essere rappresentata da un grafo orientato (X, R), dove X è l'insieme di nodi (vertici) e R è l'insieme di archi diretti. Esiste un arco dal nodo a al nodo b se e solo se $a\, R\, b$. $a\, R\, a$ non si rappresenta con due distinti archi ma con uno solo che si chiama cappio.

Si ricordano le proprietà fondamentali delle relazioni binarie. Una relazione binaria è:

- *riflessiva*, se e solo se $aRa,\ \forall\ a \in R$,

- *irriflessiva*, se e solo se $aR^c a, \forall\ a \in R$,

- *simmetrica*, se e solo se $aRb \implies bRa\ \forall\ a, b\ \in X$

- *antisimmetrica*, se e solo se $[aRb\ e\ bRa]\ a = b, \forall a, b \in\ X$,

- *asimmetrica*, se e solo se $aRb \implies bR^c a,\ \ a, b \in X$,

- *completa*, se e solo se aRb e/o $bRa\ \ \forall\ a, b \in X$, con $a\ \neq b$,

- *fortemente completa*, se e solo se *a*R*b* e/o *b*R*a* per $a, b\ \in X$,

- *transitiva*, se e solo se $[aRb\ e\ bRc] \implies aRc, \forall\ a, b, c\ \in X$,

- *negativamente transitiva*, se e solo se $[aR^c b\ e\ bR^c c] \implies aRc, \forall a, b, c\ \in X$,

- *una relazione di Ferrer*, se e solo se $[aRb \text{ e } cRd] \rightarrow aRd$ e/o cRb,$\forall a, b, c, d \in X$,

- *semitransitivà*, se e solo se $[aRb \text{ e } bRc] \rightarrow aRd \text{ e/o } dRc, \forall a, b, c, d \in X$.

2.3 SITUAZIONI ELEMENTARI DI PREFERENZA

Sia A un insieme di azioni e $a, b \in A$. Solitamente si suppone che confrontando due azioni un individuo possa reagire in uno dei seguenti tre modi:

-preferenza per una delle due azioni, per esempio a è preferita a b, indicata con aPb,

-indifferenza tra le due azioni, indicata con aIb,

-incomparabilità tra le due azioni, a causa di un rifiuto, di una incapacità o impossibilità di confrontare, indicata con aJb.

Talvolta (Vincke 1980, 1988, Roy e Vincke 1984, 1987) si considera un'altra possibile situazione fondamentale:

- preferenza debole per una delle due azioni, per esempio l'azione *a* è debolmente preferita a *b*, indicata con aQb.

La preferenza debole caratterizza una situazione in cui si ha una esitazione tra la preferenza stretta e l'indifferenza.

Le relazioni binarie corrispondenti alle quattro situazioni fondamentali P, I, J, Q debbono soddisfare i seguenti requisiti:

- $aPb \Longrightarrow$ non bPa, cioè P è asimmetrica,

- aIa, cioè I è riflessiva,

- $aIb \Longrightarrow bIa$, cioè I è simmetrica,

- non *a*J*a*, cioè J è irriflessiva,

- $aJb \Longrightarrow bJa$, cioè J è simmetrica,

- $aQb \Longrightarrow$ non bQa, cioè Q è asimmetrica.

Le quattro relazioni binarie P, I, Q, J definite su un insieme di azioni potenziali A formano un sistema di relazioni di preferenza di base se esse costituiscono una partizione di $A \times A$, cioè:

1) esse sono esaustive, ossia per ogni coppia ordinata di azioni, vale almeno una delle quattro relazioni; formalmente si ha:

$P \cup I \cup J \cup Q = A \times A,$

2) esse sono mutualmente esclusive, cioè per ogni coppia ordinata (a, b) di azioni di A, vale al più una delle due relazioni; formalmente si ha che, per ogni

$H, K \epsilon \{P, I, J, Q\}, \qquad H \cap K = \emptyset$

All'interno di ogni struttura di preferenza basata sulle tre situazioni fondamentali P, I, e J, queste possono essere completamente caratterizzate dalla relazione binaria S definita da

$aSb \Leftrightarrow aPb\ e/o\ aIb\ \ \forall a, b \epsilon A, (ossia, S = P \cup I).$

Infatti, $\forall\ a, b \epsilon A$ si ha:

$aPb \Leftrightarrow aSb\ e\ non\ bSa$

$aIb \Leftrightarrow aSb\ e\ bSa$

$aJb \Leftrightarrow non\ aSb\ e\ non\ bSa.$

All'interno delle strutture di preferenza basate sulle quattro situazioni fondamentali P, I, J e Q, si considera la seguente definizione:

$aSb \Leftrightarrow aPb$ e/o aIb e/o $aQb\ \forall a, b\ \epsilon A, (ossia, S = P \cup I \cup Q).$

Tuttavia in questo caso una struttura di preferenza non può essere completamente caratterizzata utilizzando la sola relazione binaria S (Tsoukias e Vincke 1998).

S viene definita relazione di surclassamento. Si osservi che $\forall\ a, b \epsilon A$ "aSb" significa "*a* è almeno tanto buona quanto *b*" e che S è riflessiva, cioè aSa.

2.4 STRUTTURE DI PREFERENZA

Un preordine completo è una struttura di preferenza che soddisfa le seguenti condizioni $\forall a, b\ e\ c \in A$:

- non *aJb*, cioè non ci sono situazioni di incomparabilità,
- $[aPb\ e\ bPc] \implies aPc$, cioè P è transitiva,
- $[aIb\ e\ bIc] \implies aIc$, cioè I è transitiva.

La relazione caratteristica S associata ad un preordine completo verifica le seguenti condizioni $\forall a, b\ e\ c \in A$:

- aSb e/o bSa, cioè S è completa,
- $[aSb\ e\ bSc] \implies aSc$, cioè S è transitiva.

Se *A* è un insieme finito o numerabile, allora esiste una funzione $g: A \implies R$ tale che

$$aPb \iff g(a) > g(b),$$

$$aIb \iff g(a) = g(b),$$

$$aSb \iff g(a) \geq g(b).$$

In altri termini, un preordine completo è la struttura di preferenza che corrisponde alla modellizzazione delle preferenze della teoria classica dell'utilità ordinale. La funzione *g* corrispondente viene chiamata anche vero-criterio.

In molte situazioni reali la transitività dell'indifferenza è una condizione troppo esigente, come evidenziato dal famoso paradosso di Luce (1956). Si considerino un certo numero di tazze di tè. La prima tazza di tè è senza zucchero, la seconda ha un solo milligrammo di zucchero, la terza ha due milligrammi di zucchero e così via. Naturalmente non si può esprimere qualsiasi preferenza tra due tazze consecutive di tè, tuttavia si può generalmente esprimere una preferenza tra una tazza di tè senza zucchero e un'altra con molto zucchero. Il semiordine è una struttura di preferenza che permette di rappresentare questo tipo di fenomeni, dovuti ad effetti di soglia, indebolendo la transitività sull'indifferenza.

Un semiordine è una struttura di preferenza che soddisfa le seguenti condizioni $\forall a, b, c, d \in A$:

- non aJb, cioè non ci sono situazioni di incomparabilità,
- $[aPb, bIc,\ cPd] \Longrightarrow aPd$,
- $[aPb, bPc, aId] \ \Longrightarrow \ dPc$.

La relazione caratteristica S associata ad un semiordine verifica le seguenti condizioni $\forall\ a, b, c, d \in A$:

- aSb e/o bSa, cioè S è completa,
- $[aSb \ e \ cSd] \ \Longrightarrow \ [aSd \ e/o \ cSb]$, cioè S è una relazione di Ferrer,
- $[aSb \ e \ bSc] \Longrightarrow \ [aSd \ e/o \ dSc]$, cioè S è semitransitiva.

Se A è un insieme finito o numerabile, allora esistono una funzione $g\colon A \rightarrow R$ ed una soglia $q \epsilon R^+$, detta soglia di indifferenza, tale che:

$$aPb \ \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q,$$

$$aIb \ \Leftrightarrow / g(a) - g(b) \ / \leq q.$$

Tale funzione g viene chiamata anche quasi-criterio. Nella rappresentazione del semiordine, la soglia q rappresenta una "piccola" differenza, non percepita dal decisore, che trasforma l'indifferenza da "puntuale" (come nell'approccio classico) a "segmentaria". Tuttavia la soglia q è costante, mentre molto spesso la reazione a differenti valutazioni dipende anche dai valori assoluti delle quantità confrontate: per esempio una differenza di \$1000 non ha lo stesso significato quando si trattano migliaia di dollari o milioni di dollari. La seguente struttura di ordine di intervalli permette di introdurre una soglia di indifferenza variabile.

Un ordine di intervalli è una struttura di preferenza che soddisfa le seguenti condizioni $\forall a, b, c, d \in A$:

- non aJb, cioè non ci sono situazioni di incomparabilità,
- $[aPb, bIc \ e \ cPd] \Rightarrow aPd$.

La relazione caratteristica associata ad un ordine di intervalli soddisfa le seguenti condizioni $\forall \ a, b, c, d \in A$:

- aSb e/o bSa, cioè S è completa,
- $[aSb \ e \ cSd] \Rightarrow [aSd \ e/o \ cSb]$, cioè S è una relazione di Ferrer.

Se l'insieme A è finito o numerabile, allora esistono una funzione $g: A \rightarrow R$ ed una funzione $q: A \Rightarrow R^{+}$, tali che:

$aPb \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q(b)$,

$aIb \Leftrightarrow g(a) \leq g(b) + q(b) \ e \ g(b) \leq g(a) + q(a)$.

Recentemente gli ordini di intervalli sono stati estesi per considerare una soglia che dipende dalle valutazioni di entrambe le azioni confrontate, piuttosto che da una sola. Questo conduce a una struttura di preferenza (Abbas e Vincke 1993, Abbas, Pirlot e Vincke 1996, Fodor e Roubens 1996) in cui esistono una funzione $g: A \Rightarrow R$ e una funzione $Q: A \times A \Rightarrow R^{+}$, tali che, per ogni $a, b \in A$, si ha

$$aPb \Leftrightarrow g(a) > g(b) + Q(a, b),$$

$aIb \Rightarrow | g(a) - g(b) | \leq Q(a, b)$.

Questa struttura di preferenza è definita ordine di co-comparabilità se, per ogni $a, b, c \in A$, è soddisfatta la seguente diseguaglianza triangolare

$$Q(a, b) \leq Q(a, c) + Q(c, b).$$

Si ricordi che le precedenti strutture di preferenza non prendono in considerazione la relazione di incomparabilità. Tuttavia in molte situazioni reali il decisore sperimenta la indisponibilità o l'impossibilità di confrontare alcune coppie di azioni, perché per esempio devono essere aggregate valutazioni fortemente conflittuali su differenti punti di vista (così, per esempio, è praticamente impossibile dire se è preferita una vettura familiare, molto economica, ma piuttosto lenta o, invece, una vettura sportiva, molto veloce ma anche piuttosto costosa). Una tipica struttura di preferenza che considera anche l'incomparabilità è il preordine parziale. Esso soddisfa le seguenti proprietà, $\forall a, b, c \in A$:

- $[aPb \text{ e } bPc] \Rightarrow aPc$, cioè P è transitiva,
- $[aIb \text{ e } bIc] \Rightarrow aIc$, cioè I è transitiva,
- $[aPb \text{ e } bIc] \Rightarrow aPc$,
- $[aIb \text{ e } bPc] \Rightarrow aPc$,
- $P \cup I$ non è completa.

La relazione caratteristica S associata ad un preordine parziale verifica le seguenti condizioni, $\forall a, b, c \in A$:

- aSa, cioè S è riflessiva,
- $[aSb \text{ e } bSc] \Rightarrow aSc$, cioè S è transitiva.

Se l'insieme A è finito o numerabile, allora esiste una funzione $g: A \rightarrow R$ tale che

$$aPb \Rightarrow g(a) > g(b),$$

$$aIb \Rightarrow g(a) = g(b).$$

Infine, si ricorda lo pseudo-ordine, che è una tipica struttura di preferenza nella quale interviene anche la preferenza debole Q (Roy e Vincke 1984, 1987). Nella rappresentazione di questa struttura di preferenza ci sono due soglie: una soglia di indifferenza, q, all'interno della quale il decisore esprime una chiara indifferenza, e una soglia di preferenza, p , superata la quale il decisore è sicuro di una preferenza (stretta):

$$aPb \iff g(a) > g(b) + p(g(b)),$$

$$aQb \iff g(b) + p(g(b)) \geq g(a) > g(b) + q(g(b)),$$

$$aIb \iff \begin{cases} g(b) + q(g(b)) \geq g(a) \\ g(a) + q(g(a)) \geq g(b) \end{cases}$$

La funzione g corrispondente viene chiamata pseudo-criterio. Al fine di evitare alcune incoerenze, le funzioni di soglia devono soddisfare le seguenti condizioni:

$$g(a) > g(b) \iff g(a) + q(g(a)) > g(b) + q(g(b)),$$

$$g(a) > g(b) \iff g(a) + p(g(a)) > g(b) + p(g(b)).$$

2.5 RELAZIONI DI PREFERENZA MULTIPLE

Una struttura di relazioni di preferenza multipla (Roberts 1971, Roubens e Vincke 1985, Doignon 1987) si ottiene utilizzando un insieme di relazioni di preferenza nidificate. Esse corrispondono a differenti “intensità” di relazioni di preferenza: preferenza molto debole, preferenza debole, preferenza forte, preferenza molto forte, preferenza quasi totale, preferenza totale, etc.

Una collezione di strutture di relazioni di preferenza nidificate è associata ad ogni struttura di preferenza multipla. Esse sono ottenute considerando, per ogni livello d’intensità, la corrispondente struttura di indifferenza tra due azioni se nessuna di esse è preferita all’altra con tale intensità.

Una rappresentazione valore-soglie di una struttura di relazioni di preferenza multiple consiste in una funzione valore g ed un vettore T di m funzioni soglia $(t_1, t_2, \dots, t_m)$. Se si tratta di una soglia superiore si ha $aP^k b$ se e solo se $g(a) > t^k(b)$. Se si tratta di una soglia inferiore si ha $g(b) < t^k(a)$.

2.6 RELAZIONE DI SURCLASSAMENTO A QUATTRO VALORI

L'idea di base del modello di preferenza a quattro valori (Tsoukias e Vincke 1995) è legato alla ricerca di "ragioni positive" (ossia argomenti a favore) e "ragioni negative" (ossia argomenti contrari) a supporto dell'ipotesi di verità della relazione di surclassamento per una coppia ordinata (*x,y*) di azioni. Le combinazioni di ragioni positive e negative creano allora quattro possibili situazioni di surclassamento:

1) surclassamento vero, che si indica con xS^Ty, nel caso che esistano sufficienti ragioni positive per stabilire xSy e non si abbiano sufficienti ragioni negative per stabilire xS^Cy;

2) surclassamento contraddittorio, indicato con xS^Ky, se esistono sufficienti ragioni positive per stabilire xSy e sufficienti ragioni negative per stabilire xS^Cy;

3) surclassamento incognito, indicato con xS^Uy, se non esistono sufficienti ragioni positive per stabilire xSy e non esistono sufficienti ragioni negative per stabilire xS^Cy;

4) surclassamento falso, indicato con xS^Fy, se non esistono sufficienti ragioni positive per stabilire xSy ed esistono sufficienti ragioni negative per stabilire xS^Cy.

La Tavola 2 riassume le quattro relazioni di surclassamento.

Tavola 2

	S^T	S^K	S^U	S^F
xSy	1	1	0	0
xS^cy	0	1	0	1

Combinando poi i quattro tipi di relazioni binarie di surclassamento prima ricordati con riferimento a ciascuna delle coppie ordinate (x, y) e (y, x) di azioni, la modellizzazione delle preferenze si arricchisce notevolmente, ottenendosi le seguenti dieci situazioni di preferenza per confrontare x e y:

1) preferenza stretta, che si indica con xPy, se x è strettamente migliore di y, cioè se xS^Ty e yS^Fx;

2) preferenza, indicata con xHy, se x può essere migliore di y, ma non si è sicuri a causa di qualche evidenza contraria, cioè se xS^Ty e yS^Kx;

3) semi preferenza, indicata con xJy, se x potrebbe essere migliore di y, ma non si è sicuri a causa della mancanza di tutte le necessarie informazioni, cioè xS^Ty e yS^Ux;

4) preferenza semidebole, indicata con xLy, se x può essere migliore di y, ma si riscontrano informazioni contraddittorie e mancanza di informazioni necessarie, cioè xS^Ky e yS^Ux;

5) indifferenza, indicata con xIy, se x e y sono strettamente equivalenti, cioè xS^Ty e yS^Tx;

6) ambiguità, indicata con xKy, se x e y potrebbero essere indifferenti, ma esistono contraddizioni in tutte e due le direzioni, cioè xS^Ky e yS^Kx;

7) ignoranza, indicata con xUy, se mancano le informazioni per stabilire la relazione che lega x e y, cioè xS^Uy e yS^Ux;

8) incomparabilità, indicata con xRy, se x e y sono in opposizione forte, cioè xS^Fy e yS^Fx;

9) incomparabilità debole, indicata con xQy, se x potrebbe essere incomparabile con y, ma ci sono informazioni contraddittorie, cioè xS^Ky e yS^Fx;

10) semi incomparabilità, indicata con xVy, se x può essere in opposizione a y, ma non si è sicuri a causa della mancanza di tutte le necessarie informazioni, cioè $xS^{U}y$ e $yS^{F}x$.

Le precedenti relazioni binarie possono essere raccolte in una matrice simmetrica di modellizzazione delle preferenze (Tavola 3).

Le dieci situazioni di preferenza Tavola 3

Tavola 3

	$\boldsymbol{xS^{T}y}$	$\boldsymbol{xS^{K}y}$	$\boldsymbol{xS^{U}y}$	$\boldsymbol{xS^{F}y}$
$\boldsymbol{xS^{T}y}$	xIy	xHy	xJy	xPy
$\boldsymbol{xS^{K}y}$	xHy	xKy	xLy	xQy
$\boldsymbol{xS^{U}y}$	xJy	xLy	xUy	xVy
$\boldsymbol{xS^{F}y}$	xPy	xQy	xVy	xRy

Si noti che nell'approccio classico del surclassamento vengono utilizzate solamente due relazioni (S^{T} e S^{F}), definite direttamente con riferimento alla coppia (x, y) e alla sua controparte simmetrica (y, x). Così si ottengono solo quattro relazioni: preferenza (xPy, yPx), indifferenza (xIy) e incomparabilità (xRy), presenti ai quattro angoli della matrice di preferenza della Tavola 3.

Nella diagonale principale della matrice di preferenza, sono raggruppate quattro relazioni simmetriche: le già note indifferenza I ($xS^{T}y$ e $yS^{T}x$) ed incomparabilità R ($x\ S^{F}y$ e $y\ S^{F}x$) e le due nuove relazioni di ambiguità K ($x\ S^{K}y$ e $yS^{K}x$) e ignoranza U ($xS^{U}y$ e $yS^{U}x$).

Le due esitazioni tra preferenza e indifferenza sono tutte denominate come "preferenze" mentre le due esitazioni tra preferenza ed incomparabilità sono denominate come "incomparabilità". Tutte queste relazioni potrebbero essere considerate come aventi un comune grado di preferenza tra la preferenza stretta e la relazione simmetrica. Inoltre, si usa “semi” solamente per esitazioni dovute alla non conoscenza e “debole” solamente per esitazioni dovute a situazioni contraddittorie. Così, si costruiscono altre cinque differenti (strettamente, semi debolmente) relazioni asimmetriche ed un’altra (semi-debolmente) relazione simmetrica (Tavola 3).

Questo modo di rappresentare le preferenze consente di considerare tre differenti livelli di preferenza anziché solamente le due situazioni ottenute utilizzando l’approccio di surclassamento tradizionale (P, I, R) o il modello classico (P, I).

3. MODELLI DI AGGREGAZIONE DELLE PREFERENZE

3.1 DOMINANZA

Un concetto molto importante nel contesto dell’aiuto multicriteriale alla decisione è la relazione di dominanza. Date $a, b \forall A$, si dice che *a* domina *b*, indicato con aDb, se e solo se $g_j(a) \geq g_j(b), \forall g_j \in G$, dove almeno una delle diseguaglianze è stretta. In altri termini, l’azione *a* domina l’azione *b* se presenta valutazioni migliori o uguali a quelle di *b* su tutti i criteri considerati, con almeno una di esse strettamente migliore. Si osservi che la dominanza è una relazione oggettiva; essa è un concetto valido per tutti i decisori, perché non dipende dalla differente importanza soggettiva che diversi decisori possono attribuire ai criteri considerati, ma solamente dalle corrispondenti valutazioni (anche soltanto ordinali) delle azioni.

Strettamente legato al concetto di dominanza è il concetto di azione efficiente: l’azione $a \forall A$ si dice efficiente se e solo se nessun’altra azione di A la domina. In altri termini, se l’azione *a* è efficiente, non è possibile trovare un’altra azione ammissibile *b* che sia migliore di *a* su (almeno) un criterio senza che sia peggiore su almeno un altro criterio. Spesso si indica con AE il sottoinsieme di A

contenente le azioni efficienti (non dominate), dette anche di ottimo paretiano; la loro ricerca è anche chiamata problema di "ottimizzazione vettoriale". Ovviamente l'introduzione o l'eliminazione di un'azione o di un criterio possono modificare le relazioni di dominanza e l'insieme delle azioni efficienti. La proprietà dell'efficienza è, infatti, una proprietà relativa, dipendente dalla composizione di A e di G e può mutare con l'alterazione di almeno una relazione di preferenza.

La dominanza di a su b rappresenta, dunque, l'unanimità dei punti di vista di G in favore di a rispetto a b. Perciò essa potrebbe essere un'informazione molto importante per fornire una soluzione al problema di decisione considerato. Per esempio, le possibili soluzioni per i problemi decisionali precedentemente elencati potrebbero essere le seguenti:

1) in un problema di scelta, si può selezionare e concentrare l'attenzione sull'insieme delle azioni efficienti trascurando le altre;

2) in un problema di classificazione dove le azioni di A dovrebbero essere divise nelle due categorie di "azioni buone" e "azioni cattive", una volta fissata un'azione *c* come "punto di riferimento medio", si può considerare buona ogni azione $a \in A$ tale che aDc e cattiva ogni azione $b \in A$ tale che $c\ D\ b$,

3) in un problema di ordinamento si può considerare l'ordine stabilito dalla relazione di dominanza in A, cioè, $\forall a, b \epsilon A$, l'azione *a* sarà non sarà ordinata peggio di (ossia precede) b se aDb.

Sfortunatamente la relazione di dominanza è generalmente abbastanza "povera", perché molto spesso solamente alcune coppie di azioni la soddisfano e talvolta addirittura nessuna coppia. Questo significa che le "semplici soluzioni" proposte per i problemi 1), 2) e 3) potrebbero non essere applicabili nei problemi reali perché potrebbero funzionare solamente se:

- con riferimento al problema 1), si ha un piccolo numero di azioni efficienti (ma rimane il rischio di trascurare il "second best", cioè un'azione che potrebbe scegliersi in subordine all'azione selezionata se questa dovesse risultare impraticabile; infatti il "second best" potrebbe risultare non efficiente),
- con riferimento al problema 2), per ogni azione $x \epsilon A$ si ha xDc o cDx,
- con riferimento al problema 3), per ogni coppia di azioni $a, b \in A$ si ha aDb o bDa.

Perciò nei problemi di decisione reali deve essere utilizzata qualche procedura di aggregazione che, sulla base di un predefinito modello di preferenza, arricchisca la relazione di dominanza al fine di poter confrontare tutte le azioni di A con riferimento ai criteri di G. Per tutte queste procedure occorre, ancora, che il decisore fornisca alcune opportune informazioni preferenziali richieste dallo specifico modello di preferenza adottato.

3.2 PROCEDURE ELEMENTARI DI AGGREGAZIONE

Si indicano con questo nome dei metodi di aggregazione che vengono intuitivamente proposti quando si affronta un problema decisionale multicriteriale. Molte di queste procedure vengono applicate nella realtà per la loro semplicità ed immediata comprensione da parte del decisore. Purtroppo, spesso, proprio per queste ragioni rischiano di affrontare il problema decisionale in maniera troppo semplicistica, ignorandone degli aspetti rilevanti e rappresentando in maniera molto approssimativa le preferenze del decisore. Nel seguito si considereranno le preferenze del decisore crescenti con i valori di g_j, $\forall g_j \; \forall \; G$. Questa assunzione non lede la generalità perché laddove le preferenze dovessero essere decrescenti rispetto ai valori di g_j si potranno ricodificare i valori di g_j, per esempio sostituendovi il loro opposto. La principali procedure sono: la somma ponderata, il massimo, il minimo, il metodo di Borda, il metodo di Condorcet, il metodo a livelli di aspirazione ed il modello lessicografico.

Il metodo più elementare è quello che associa ad ogni azione $x\forall A$ la somma ponderata $W(x)$ (ossia la media ponderata) delle sue valutazioni quantitative $g_j(x)$, j $= 1, 2, \dots,$ m, con pesi λ_j che indicano i tassi di sostituzione tra i vari criteri, ossia $W(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$. Talvolta i pesi λ_j vengono considerati dei coefficienti di importanza dei criteri corrispondenti. In questo caso le valutazioni rispetto ai diversi criteri devono essere opportunamente normalizzate, ossia ricondotte ad una comune unità di misura. Ovviamente tale procedura ammette una compensazione totale tra scarti positivi e negativi nelle valutazioni rispetto ai differenti criteri. Si ha, $\forall a, b \in A$:

$$aPb \iff W(a) > W(b),$$

$$aIb \iff W(a) = W(b).$$

La struttura di preferenza $\{P, I\}$ così ottenuta costituisce un preordine totale. Tale metodo può essere adottato quando si tratta di aggregare grandezze sufficientemente omogenee, che rappresentano diversi aspetti di una stessa caratteristica (per esempio, i voti degli studenti in differenti materie). Ma la sua natura totalmente compensatoria lo rende particolarmente inaffidabile quando si devono confrontare azioni su criteri conflittuali e profondamente diversi. Tale inaffidabilità viene accresciuta nel caso in cui si opti per ridurre i criteri ad una comune unità di misura.

Un altro approccio elementare di aggregazione delle preferenze è il metodo del massimo. Con tale approccio si associa ad ogni azione $x \epsilon A$ la massima valutazione da essa ottenuta con riferimento a tutti i criteri g_j considerati, ossia $M(x) = \underset{g_j \in G}{Max}\, g_j(x)$. Si ha, $\forall a, b \in A$:

$$aPb \iff M(a) > M(b),$$

$$aIb \iff M(a) = M(b).$$

La struttura di preferenza $\{P, I\}$così ottenuta costituisce un preordine completo.

Anche in tal caso le valutazioni rispetto ai diversi criteri devono essere espresse nella stessa unità di misura. In tale procedura ha effettiva rilevanza solamente la valutazione massima di ogni azione ed il metodo risulta parzialmente compensatorio. Tale approccio caratterizza ogni azione mediante la sua migliore performance (ossia premia azioni che presentano "picchi" di valutazioni rispetto ad azioni con valutazioni più uniformi), e prescinde dalle informazioni sugli altri criteri. Molte rilevanti informazioni vengono pertanto ignorate.

All'estremo opposto ritroviamo il metodo del minimo. Tale approccio, infatti, in un certo senso costituisce il simmetrico del precedente e associa ad ogni azione $x \in A$ la minima valutazione da essa ottenuta con riferimento a tutti i criteri g_j considerati, ossia $m(x) = \underset{g_j \in G}{min}\, g_j(x).$

Si ha, $\forall a, b \in A$:

$$aPb \iff m(a) > m(b),$$

$$aIb \iff m(a) = m(b).$$

Anche in tal caso, la struttura di preferenza $\{P, I\}$ ottenuta costituisce un preordine completo e le valutazioni rispetto ai diversi criteri devono essere espresse nella stessa unità di misura. In tale metodo ha effettiva rilevanza solamente la valutazione minima di ogni azione ed esso risulta parzialmente compensatorio. Tale approccio caratterizza ogni azione con la sua peggiore performance (e quindi premia le azioni che non presentano situazioni molto sfavorevoli rispetto a qualche criterio), prescindendo comunque dalle informazioni sugli altri criteri, per cui molte rilevanti informazioni vengono ancora ignorate.

4. CARATTERISTICHE FONDAMENTALI DI UNA PROCEDURA DI AGGREGAZIONE MULTICRITERIALE

4.1 PROCEDURE DI AGGREGAZIONE COMPENSATORIE E NON COMPENSATORIE

L'idea intuitiva di una procedura di aggregazione compensatoria è quella che un peggioramento di una valutazione di un'azione su un certo criterio possa essere compensata, ossia bilanciata, dal miglioramento di una sua valutazione rispetto ad uno (o più) differenti criteri tra quelli considerati. Tale concetto, pertanto, si basa sul ruolo cruciale che riveste l'intensità di preferenza espressa da ciascun criterio: quel che effettivamente conta ai fini della comparazione globale tra due azioni è di quanto un'azione sia preferita all'altra rispetto a ciascun criterio considerato, piuttosto che rispetto a quali criteri essa sia preferita.

Invece, l'idea di base di una procedura di aggregazione non compensatoria è che, ai fini della aggregazione delle preferenze, si tengono in considerazione solo informazioni di carattere ordinale sui singoli criteri. Più precisamente, una procedura di aggregazione multicriteriale è non-compensatoria se, date due azioni a e b tali che a è globalmente preferita a b, se l'insieme dei criteri per cui a è preferita a b si accresce e l'insieme dei criteri per cui b è preferita ad a si restringe, allora a continua ad essere preferita a b a prescindere dall'intensità di preferenza espressa dai diversi criteri. Formalmente una procedura di aggregazione è non-compensatoria se $\forall\, a, b, c, d \in A$ si ha:

$$[\{g_j \in G: aP_jb\} \subseteq \{g_j \in G: cP_jd\} \; e \; \{g_j \in G: bP_ja\} \supseteq \{g_j \in G: dP_jc\}] \Longrightarrow [aPb \Longrightarrow cPd]$$

.

Alcune procedure di aggregazione considerano solo i criteri per cui *a* è almeno tanto buona quanto *b*. Più precisamente, una procedura di aggregazione multicriteriale è unilateralmente non-compensatoria se, date due azioni *a* e *b* tali che *a* è globalmente almeno tanto buona quanto *b*, se l'insieme dei criteri per cui *a* è almeno tanto buona quanto *b* si accresce, allora *a* continua ad essere almeno tanto buona quanto *b* a prescindere dall'intensità di preferenza espressa dai diversi criteri. Formalmente una procedura di aggregazione è unilateralmente non-compensatoria se $\forall\ a, b, c, d \in A$ si ha:

$[\ \{g_j \in G: aP_jb\} \subseteq \{g_j \in G: cP_jd\}\ ] \Rightarrow\ [aSb\ \Rightarrow cSd]$.

Più in generale, il termine non-compensazione rimanda all'idea che esistono delle situazioni in cui le intensità di preferenza di a su b non vengono prese in considerazione per stabilire la relazione di preferenza tra a e b. Ciò può accadere anche in presenza di qualche situazione di veto, che si ha quando la preferenza di b su a rispetto ad almeno un criterio è talmente forte da impedire che si possa dichiarare che globalmente *a* è almeno tanto buona quanto b. In un'applicazione ambientale questo potrebbe essere il caso di una situazione fortemente a favore di *b* su a in termini di presenza di un certo agente inquinante da far escludere che a possa essere dichiarato almeno tanto buona quanto b, qualunque sia l'insieme dei criteri in favore di a e contro b e qualunque sia l'intensità di preferenza di a su questi criteri. Formalmente, per definire un veto rispetto a un criterio $g_j \in G$ si introduce una soglia $v_j > 0$ tale che, $\forall a, b \in A$, si ha:

$g_j(b) - \ g_j(a) \geq v_j \Rightarrow\ \ non\ aSb$.

Si osservi che la presenza di un veto in una procedura di aggregazione impedisce di classificare tale procedura come non- compensatoria: infatti, il veto considera l'intensità di preferenza e anzi esso stesso è basato sull'idea che l'intensità della preferenza di a su b sia molto elevata. Una procedura di aggregazione con veti non si può neanche classificare come unilateralmente non-compensatoria: infatti può benissimo succedere che $\{g_j \in G: aS_jb\} \subseteq \{g_j \in G: cS_jd\}$ e si ha aSb ma non si ha cSd a causa della presenza di un veto perché su qualche criterio la preferenza

di d su c è così forte da impedire di poter concludere che c è almeno tanto buona quanto d.

Infine, il termine non-compensazione può rimandare al caso in cui entro certi limiti variazioni molto rilevanti delle valutazioni dei criteri considerati non modificano le preferenze. E' questo il caso delle procedure di aggregazione multicriteriali basate sul minimo e sul massimo. Si consideri dapprima un semplice esempio relativo all'operatore di aggregazione "minimo". Si supponga di avere una azione a che ha le seguenti valutazioni sui tre criteri considerati nel problema di decisione affrontato: $g_1(a) = 5, g_2(a) = 7, g_3(a) = 10$. La valutazione complessiva dell'azione a è pertanto $U(a) = 5$, corrispondente alla valutazione data dal criterio g_1. Si supponga ora che per una qualche ragione la valutazione dell'azione a rispetto al criterio g_1 si modifichi passando da $g_1(a) = 5$ a $g_1(a) = 4$. In questo caso la valutazione complessiva dell'azione a passa da $U(a) = 5$ a $U(a) = 4$.

Si osservi che anche se le valutazioni di a rispetto a g_2 e a g_3 raddoppiassero, passando rispettivamente da $g_2(a) = 7$ a $g_2(a) = 14$ e da $g_3(a) = 10$ a $g_3(a) = 10$, la valutazione complessiva di a continuerebbe a rimanere $U(a) = 4$.

Vale a dire una diminuzione anche molto piccola sul criterio che ha la valutazione minima non può essere "compensata" da nessun incremento anche molto grande sugli altri criteri. Formalmente in questo caso si parla di non-sostituibilità totale (Sounderpandian 1991). Una situazione simile si ha per l'aggregazione basata sull'operatore "massimo". In questo caso un incremento, anche molto piccolo sul criterio che dà la massima valutazione, comporta un incremento nella valutazione globale, che non può essere intaccato nemmeno da decrementi molto grandi sugli altri criteri. Questa situazione si definisce di sostituibilità esclusiva totale (Sounderpandian 1991).

4.2 DIFFERENTI TIPI DI SCALE

Le funzioni di utilità possono essere rappresentate utilizzando differenti scale di misurazione. Queste scale si caratterizzano con riferimento alle cosiddette *trasformazioni ammissibili*, cioè trasformazioni che conducono da una scala accettabile ad un'altra senza alterarne il contenuto informativo. Ipotizzando che una scala assegni una valutazione $x \in \boldsymbol{R}$ all'oggetto misurato, si ha (Roberts 1971):

- una **scala assoluta**, se le trasformazioni ammissibili sono della forma $\varphi(x) = x$ (identità): un tipico esempio di scala assoluta è il contare;

- una **scala di rapporti** *(ratio scale)*, se le trasformazioni ammissibili sono della forma $\varphi(x) = ax,\ a > 0$ (*trasformazioni di similarità*, in cui esiste uno "zero" naturale): tipici esempi di scala di rapporti sono la massa (misurata in kg, libre,…) ed i prezzi (misurati in valute diverse);

- una **scala di intervalli** *(interval scale)*, se le trasformazioni ammissibili sono della forma $\varphi(x) = ax + b,\ a > 0$ (*trasformazioni lineari positive*): un esempio tipico di una scala di intervalli è la temperatura (misurata in gradi centigradi ed in Farheneit, mentre quando si definisce uno zero assoluto, come nella scala Kelvin, si ha una scala di rapporti);

- una **scala ordinale**, se le trasformazioni ammissibili sono della forma $\varphi(x)$ ove $\varphi(\cdot)$ è una funzione strettamente crescente (*trasformazioni strettamente crescenti*): un esempio tipico di una scala ordinale è la scala di durezza di Mohs;

- una **scala nominale**, se le trasformazioni ammissibili sono della forma $\varphi(x)$ ove $\varphi(\cdot)$ è una qualsiasi funzione *iniettiva*: un tipico esempio di una scala nominale sono le numerazioni assegnate a progetti alternativi, che possono permutarsi arbitrariamente.

Le funzioni di utilità rappresentano preferenze utilizzando scale di rapporti, scale di intervalli o scali ordinali. Utilizzando una scala di rapporti, la scala è determinata a meno della scelta di una unità di misura; pertanto, è possibile effettuare confronti tra i *rapporti dei valori* di due azioni considerate. Utilizzando una scala di intervalli, la scala è determinata a meno della scelta di una unità di misura e di uno zero (origine); quindi, considerando quattro azioni a, b, c, d, è possibile effettuare confronti tra i *rapporti delle differenze dei valori* di una coppia di azioni (a, b) rispetto ad un'altra (c, d), ossia possono misurarsi delle intensità di preferenza. Utilizzando una scala ordinale, la scala è determinata solamente in base a un ordinamento; non si può, pertanto, operare sui valori delle azioni, ma può solamente affermarsi se un'azione precede o segue un'altra.

Il contenuto informativo delle diverse scale si indebolisce passando da scale di rapporti a scale di intervalli ed a scale ordinali. Spesso nella realtà, si hanno valutazioni qualitative di tipo ordinale (per esempio, grado di inquinamento alto, media, basso); in tal caso sarebbe un grave errore metodologico quello di "forzare" le informazioni, ossia attribuire un valore cardinale a dati puramente ordinali. Purtroppo si assiste spesso nella pratica applicazione di talune metodologie all'esecuzione di operazioni matematiche, anche elementari, su numeri che altro non sono che codificazioni numeriche di informazioni puramente ordinali.

In alcuni casi si richiede che una funzione di utilità rappresenti le *intensità di preferenza*. In questo caso per ogni $a, b, c, d \in A$ si ha che la preferenza globale di a su b è almeno uguale alla preferenza globale di c su d se e solo se

$U(a) - U(b) \geq U(c) - U(d)$.

In questo caso, come sopra accennato, la funzione di utilità deve essere espressa su una scala di intervalli: infatti un'altra funzione di utilità $U'(\cdot)$ rappresenta la stessa struttura di preferenza se e solo se $U'(\cdot) = aU(\cdot) + b$, con $a \in \boldsymbol{R}^{+}$ e $b \in \boldsymbol{R}$.

5. I MODELLI MULTICRITERIALI

Vi sono due principali famiglie di modelli di aggregazione delle preferenze:

1) la famiglia dei modelli di utilità multicriteriale, detti anche $MAUT$ (Multiattribute Utility Theory) o anche funzionali, applicati nella teoria dell'utilità multiattributo (Keeney e Raiffa 1976),

2) la famiglia dei modelli della relazione di surclassamento (o modelli outranking) detti anche relazionali, la cui rappresentazione più largamente conosciuta è nella forma di una relazione binaria di surclassamento (Roy 1985) e/o di una relazione fuzzy (Fodor e Roubens 1996).

A questi due approcci, di recente, se ne è affiancato un terzo detto dello regole decisionali, nel quale le preferenze del decisore vengono rappresentate mediante un insieme di proposizioni "se…, allora…" (regole decisionali) (Greco, Matarazzo e Slowinski 1999, 2001, 2005).

A quest'ultimo approccio appartiene la metodologia nota come "Rough-Sets" che sarà affrontata nel prossimo capitolo.

Capitolo 2

LA TEORIA DEI ROUGH SETS

1. PARTE INTRODUTTIVA

1.1 GENERALITA'

La teoria dei rough sets (insiemi approssimati), introdotta da Pawlak (1982,1991), si è dimostrata spesso un eccellente strumento matematico per analizzare dati caratterizzati da imprecisione e vaghezza nella loro descrizione.

Essa è fondata sull'assunzione che ad ogni oggetto dell'universo è associata qualche informazione (dati, conoscenza), espressa utilizzando opportuni attributi che descrivono gli oggetti considerati. Per esempio, se gli oggetti sono delle imprese che richiedono un affidamento bancario, le informazioni sono date dalle loro caratteristiche finanziarie, economiche e tecniche, che costituiscono la loro descrizione. Oggetti caratterizzati dalla stessa descrizione sono indiscernibili (similari) con riferimento alle informazioni disponibili. La relazione di indiscernibilità così generata costituisce il fondamento matematico della teoria dei rough sets, i mattoni con cui si costruisce l'edificio della conoscenza della realtà. Ogni insieme di oggetti indiscernibili si chiama insieme elementare e costituisce un granulo elementare (atomo) della conoscenza dell'universo. Un qualunque sottoinsieme Y dell'universo può essere espresso in termini di granuli o in maniera precisa (unione di insiemi elementari) o solo approssimativamente. In quest'ultimo caso, il sottoinsieme Y può essere caratterizzato da due insiemi ordinari, chiamati approssimazione inferiore e superiore. Un rough set è definito mediante queste due approssimazioni, che coincidono nel caso di un insieme ordinario. L'approssimazione inferiore di Y è formata da tutti gli insiemi elementari inclusi in Y (i cui elementi, quindi, appartengono sicuramente a Y), mentre l'approssimazione superiore di Y è costituita da tutti gli insiemi elementari che hanno un intersezione non vuota con Y (i cui elementi, quindi, possono appartenere a Y). Ovviamente, la differenza tra l'approssimazione superiore e quella inferiore costituisce la frontiera (boundary region) del rough set, i cui elementi non possono essere di conseguenza caratterizzati con certezza circa l'appartenenza a Y, usando le informazioni disponibili. Chiaramente, negli insiemi ordinari la frontiera è vuota. La cardinalità della frontiera esprime, ancora, in che misura è possibile esprimere Y in termini esatti, in base alle informazioni disponibili.

In tale approccio, quindi, due distinti oggetti possono apparire indiscernibili (similari) usando le informazioni che li caratterizzano, come conseguenza della granularità della conoscenza, peculiare dei rough sets. Pertanto, ogni concetto descritto solamente in maniera vaga, nella filosofia di tale approccio può essere rimpiazzato da una coppia di concetti precisi, le sue approssimazioni inferiore e superiore.

La teoria dei rough sets, che si propone di analizzare possibili relazioni di causa effetto tra i dati imperfetti (caratterizzati da incertezza e vaghezza) disponibili, presenta talune intersezioni e si pone in alcuni casi come complementare a molte altre teorie matematiche che trattano l'incertezza e l'imprecisione: teoria della probabilità, analisi discriminante, etc..

Taluni importanti caratteristiche dell'approccio dei rough sets rendono tale strumento particolarmente interessante in numerose applicazioni a problemi concreti. Con riferimento all'input (informazioni richieste), è possibile trattare dati qualitativi (anzi, i dati quantitativi vanno in qualche maniera "discretizzati) e non è necessario effettuare alcuna analisi a priori circa la consistenza dei dati da analizzare. Con riferimento all'output (informazioni ottenibili), è possibile avere a posteriori informazioni circa il ruolo (l'importanza) che taluni attributi o loro sottoinsiemi hanno nell'analisi del problema affrontato (senza dover predefinire trade-offs, ecc.) e si ottengono risultati facilmente comprensibili nella forma di regole decisionali "se…., allora….." utilizzando gli attributi più rilevanti.

2. TEORIA CLASSICA DEI ROUGH SETS (CRSA)

2.1 LA TEORIA DEL CRSA

Le informazioni circa gli oggetti vengono fornite, per ragioni algoritmiche, sotto forma di una Tavola, le cui righe si riferiscono ai distinti oggetti e le colonne ai diversi attributi considerati; ogni cella indicherà quindi la valutazione (quantitativa o qualitativa) dell'oggetto posto in quella riga tramite l'attributo della corrispondente colonna. Nel caso di valutazioni quantitative su un certo attributo q, il dominio di quest'ultimo viene opportunamente suddiviso in sottointervalli, che forniscono una buona descrizione del fenomeno studiato, e codificato conseguentemente. Il problema della discretizzazione dei dati quantitativi è abbastanza delicato, in quanto i risultati delle analisi possono dipendere dalla discretizzazione adottata.

Formalmente, una Tavola delle informazioni è la 4-upla $S \;=< U, Q, V, f >$ dove a ogni oggetto dell'universo U considerato, è associato un certa quantità di informazioni relative a una serie di attributi $Q = (q_1, q_2, q_3 \dots q_m)$ tramite la funzione $f: U \times Q \rightarrow V$ con V insieme dei valori con i quali viene espressa l'informazione. Pertanto, la Tavola d'informazione contiene l'universo U degli oggetti considerati e l'insieme finito Q degli attributi.

Si indica con V_p l'insieme dei valori assunti da un attributo $q \in Q$ e $V = \bigcup_{q \in Q} V_q$. La funzione di informazione f è una funzione definita in $Q \times U$ che ha valori in

V, tale che per ogni $q \in Q$ e $x \in U$, $f(x,q) \in V$. In parole semplici $f(x,q)$ restituisce il valore dell'attributo $q \in Q$ relativo all'oggetto $x \in U$.

Pertanto, ogni oggetto x di U sarà descritto da un vettore (stringa), ogni elemento del quale rappresenta il valore che il corrispondente attributo assume per x; detto vettore è chiamato descrizione di x in termini delle valutazioni degli attributi di Q e denotato $Des_Q(X)$. Naturalmente può ottenersi una descrizione di $x \in U$ in termini di un qualunque sottoinsieme non vuoto $Q \subseteq P$.

Ad ogni sottoinsieme (non vuoto) di attributi P è associata una relazione di indiscernibilità su U, indicata con I_P:

$I_P = \{(x,y) \in U \times U: f_q(x) = f_q(y), q \in P\}$

Ovviamente, la relazione binaria di indiscernibilità così definita è una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva). La famiglia di tutte le classi di equivalenza della relazione I_P viene denotata con U/I_P e la classe di equivalenza contenente un elemento $x \in U$ con $I_P(X)$. Se $(x,y) \in I_P$, si dice che gli oggetti x e y sono P-indiscernibili. Le classi di equivalenza della relazione I_P sono chiamate insiemi P-elementari. Se $P = Q$, gli insiemi Q-elementari sono chiamati atomi.

Siano X un sottoinsieme non vuoto di U e $P \subseteq Q$. La P-approssimazione inferiore e *P*-approssimazione superiore di *X* sono definite rispettivamente da:

$$\underline{P}(X) = \{x \in U : I_P(X) \subseteq X\},$$

$\overline{P}(X) = \{x \in U : I_P(X) \cap X \neq \emptyset\}$.

In altri termini, gli elementi di $\underline{P}(X)$ sono tutti e solo gli $x \in U$ appartenenti a tutte le classi generate dalla relazione di indiscernibilità I_P e contenuti in X; gli elementi di $\overline{P}(X)$ sono tutti e solo gli $x \in U$ appartenenti a tutte le classi generate dalla relazione di indiscernibilità I_P che hanno almeno un rappresentante appartenente ad X.

La frontiera di X, denotata con $Bn_P(X)$, è $Bn_P = \overline{P}(X) - \underline{P}(X)$ e vale la seguente relazione $\underline{P}(X) \subseteq X \subseteq \overline{P}(X)$. Pertanto se un oggetto x appartiene a $\underline{P}(X)$, esso è certamente anche un elemento di X, mentre se x appartiene a $\overline{P}(X)$, esso può appartenere all'insieme X. $Bn_P(X)$ costituisce la "regione del dubbio" di x: nulla può dirsi con certezza circa l'appartenenza dei suoi elementi all'insieme X.

Se la frontiera di X è vuota $Bn_P(X) \neq \emptyset$, allora l'insieme X è un insieme ordinario (esatto) rispetto a P, ossia esso può esprimersi come unione di un certo numero di insiemi P-elementari; altrimenti se $Bn_P(X) = \emptyset$, l'insieme X è un insieme approssimato (rough) rispetto a P, caratterizzabile mediante le approssimazioni $\underline{P}(X)$ e $\overline{P}(X)$. La famiglia di tutti gli insiemi $X \subseteq U$ aventi le stesse approssimazioni inferiore e superiore si chiama rough set.

Si definisce accuratezza dell'approssimazione di X, $X \neq \emptyset$, mediante gli attributi P il rapporto:

$$\alpha_P = \frac{|\underline{P}(X)|}{|\overline{P}(X)|}$$

dove $|\ A\ |$ indica il cardinale di un insieme A, finito. Risulta naturalmente $0 \leq \ \alpha_P(X) \ \leq 1$; se $\alpha_P(X) = 1$, X è un insieme ordinario (preciso) rispetto a P; se $\alpha_P(X) < 1$, X è un insieme rough (vago) rispetto a P.

Si definisce ancora qualità dell'approssimazione di X mediante gli attributi di P il rapporto:

$$\gamma_P = \frac{|\underline{P}(X)|}{|X|}$$

Risulta $0 \leq \ \alpha_P(X) \leq \gamma_P(X) \ \leq 1$ e la qualità rappresenta la frequenza relativa degli oggetti correttamente classificati usando gli attributi di P.

Se si considera un concetto vago, ossia allorché gli elementi dell'universo non possono essere classificati con certezza come appartenenti al concetto, l'incertezza è collegata al grado di appartenenza degli elementi all'insieme.

Allora, per discutere il problema dell'incertezza dal punto di vista dei rough sets, occorre definire la funzione di appartenenza $\mu_x^P(X)$ collegata al concetto di rough set (rough membership function). Utilizzando la relazione di indiscernibilità, si ottiene:

$$\mu_x^P(X) = \frac{|X \cap I_P(X)|}{|I_P(X)|}$$

Il valore $\mu_x^P(X)$ può essere interpretato in qualche caso come una probabilità condizionata, e può essere inteso come il grado di certezza (credibilità) con cui x appartiene a X.

Tra la rough membership function e le approssimazioni di X valgono le tre seguenti relazioni:

$$\underline{P}(X) = \{x \in U : \mu_x^P(X) = 1\}$$

$$\overline{P}(X) = \{x \in U : \mu_x^P(X) > 0\}$$

$$Bn_P(X) = \{x \in U : 0 < \mu_x^P(X) < 1\}$$

Nella teoria dei rough sets vi è, quindi, una stretta relazione tra vaghezza, insita negli insiemi e richiedente quindi le approssimazioni, ed incertezza, collegata agli elementi degli insiemi e per la quale è necessario introdurre il grado di appartenenza approssimativo. La peculiarità dei rough sets consiste nel trattare una rappresentazione imprecisa della realtà dovuta alla granularità della conoscenza, conseguenza della indiscernibilità tra oggetti aventi la stessa descrizione ("granuli").

Un concetto molto importante per le applicazioni concrete è quello di dipendenza di attributi. Intuitivamente, un insieme di attributi $Q \subseteq T$ dipende totalmente da un insieme di attributi $P \subseteq Q$, notazione $P \rightarrow T$, se tutti i valori degli attributi di T sono unicamente determinati dai valori degli attributi di P, ossia se sussiste una dipendenza funzionale tra i valori assunti dagli attributi di T e di P. In altri termini, la partizione generata dagli attributi di P è più piccola di quella generata dagli attributi di T, per cui è sufficiente adoperare gli attributi di T, per costruire la partizione U/I_T; formalmente, T dipende totalmente da P se e solo se $I_P \subseteq I_T$.

Quindi, T è totalmente (parzialmente) dipendente da P se tutti (alcuni) elementi dell'universo U possono essere inequivocabilmente classificati come classi della partizione U/I_T, utilizzando solamente gli attributi di P.

Un'altra questione di grande rilievo per le applicazioni operative è quella concernente il problema dell'eventuale presenza di dati "superflui" in una Tavola le informazioni. I dati superflui, infatti, possono essere eliminati senza deteriorare le informazioni contenute nella Tavola originale. Sia $P \subseteq Q$ e $p \in P$.

Si dice che l'attributo p è superfluo in P se p è $I_p = I_p - \{P\}$, altrimenti indispensabile in P. L'insieme P è indipendente (ortogonale) se tutti i suoi attributi sono indispensabili. Il sottoinsieme P' di P è un ridotto (reduct, notazione $Red(P)$) di P se P' è indipendente e $I_{P'} = I_P$.

Pertanto, un ridotto è un insieme di attributi che preserva le partizioni, cioè è un sottoinsieme minimale di attributi che consente di ottenere le stesse classificazioni, e quindi la stessa qualità dell'approssimazione, degli elementi di U ottenibili usando l'intero insieme di attributi P. In altri termini, gli attributi che non appartengono ad un ridotto sono superflui rispetto alle classificazioni degli elementi dell'universo.

Possono esistere più ridotti di P in una Tavola delle informazioni. Dicesi nucleo (core) di P l'insieme contenente tutti gli attributi indispensabili di P, formalmente:

$Core(P) = \cap Red(P)$

Ovviamente, poiché il nucleo è l'intersezione di tutti i ridotti, esso è incluso in ogni ridotto di P, ossia il nucleo appartiene ad ogni ridotto. In altri termini, il nucleo è il più importante sottoinsieme di attributi di Q, in quanto nessuno dei suoi elementi può essere rimosso senza deteriorare la qualità della classificazione.

Il calcolo di tutti i ridotti è piuttosto complesso. Tuttavia, in molte applicazioni concrete non è necessario calcolare tutti i ridotti, ma solamente alcuni di essi. Ai fini operativi, dunque, è sufficiente prendere in considerazione solamente i più importanti attributi (ridotti) per l'analisi della Tavola delle informazioni considerata.

Se in una Tavola delle informazioni gli attributi di Q vengono distinti in attributi condizionali (insieme C) e attributi decisionali (insieme D), $C \cup D = Q$ e $C \cap D = \emptyset$, detta Tavola è chiamata Tavola delle decisioni. Gli attributi decisionali inducono delle partizioni di U dedotte dalla relazione di indiscernibilità I_D, in maniera assolutamente indipendente dagli attributi condizionali di C. Nelle applicazioni operative, si tende a ridurre gli attributi condizionali preservando la dipendenza tra attributi condizionali e decisionali. In altri termini, si vuole usare il minor numero possibile di attributi condizionali senza deteriorare la qualità dell'approssimazione della classificazione indotta dagli attributi decisionali. Poiché si tende a evidenziare la dipendenza funzionale tra gli attributi condizionali e quelli decisionali, una Tavola delle decisioni può anche essere espressa come un insieme di regole decisionali. Queste sono delle proposizioni logiche (implicazioni) del tipo "se…, allora…", ove l'antecedente riguarda valori assunti da uno o più attributi condizionali (descrizioni di insiemi C-elementari) ed il conseguente partizioni generate dagli attributi decisionali (descrizioni di insiemi D - elementari). Se queste ultime contengono le partizioni corrispondenti agli attributi condizionali considerati, la regola decisionale si dice esatta o certa; altrimenti si parla di regole decisionali approssimate o incerte. Formalmente, si

ha una regola esatta se $I_C \subseteq I_D$, approssimata se $I_C \cap I_D = \emptyset$.

Il calcolo delle regole decisionali è spesso complesso ed esistono al riguardo numerosi algoritmi. Tuttavia, nelle applicazioni concrete spesso non è necessario conoscere tutte le regole decisionali, ma solamente l'insieme minimale di queste, che fornisce le stesse informazioni dell'insieme completo, ma è di dimensioni più ridotte e facilmente comprensibile ed applicabile.

2.2 UN ESEMPIO PRATICO DI APPLICAZIONE DELLA METODOLOGIA CRSA

L'esempio che segue è stato proposto da Pawlak nel 1997. Dati sei magazzini descritti dai seguenti quattro attributi:

- A_1, capacità del personale di vendita,
- A_2, qualità percepita della merce,
- A_3, localizzazione ad alto traffico,
- A_4, utili o perdite del magazzino.

Tavola 4.

Magazzino	A1	A2	A3	A4
1	alta	buona	No	utile
2	media	buona	No	perdita
3	media	buona	No	utile
4	bassa	media	No	perdita
5	media	media	Si	perdita
6	alta	media	Si	utile

Si ha perciò $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, Q = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}, V_1 = \{\text{alta}, \text{media}, \text{bassa}\}$, e la Tavola rappresenta la funzione dell'informazione $f(x, q)$, (per esempio $f(1, A_1) = \text{alta}, f(1, A_2) = \text{buona}$ e così via).

Si osservi che ogni magazzino ha una descrizione differente nei termini degli attributi A_1, A_2, A_3, A_4 , cosicché possono essere distinti, cioè sono discernibili, per mezzo dell'informazione fornita dagli attributi considerati. Formalmente si ha $I_Q = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$ e perciò non esistono due distinti magazzini x e y tali che $(x, y) \in I_Q$. Tuttavia i magazzini 2 e 3 sono indiscernibili nei termini degli attributi di $P = \{A_1, A_2, A_3\}$, dal momento che con riferimento a questi attributi, essi hanno gli stessi valori. Formalmente $I_P = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$ e perciò $(2,3) \in I_P$ (e ovviamente anche $(3,2) \in I_P$). Allo stesso modo i magazzini 1, 2 e 3 da una parte, e 5 e 6 dall'altra, sono indiscernibili con riferimento agli attributi $P' = \{A_2, A_3\}$ e così via considerando tutti i possibili sottoinsiemi di attributi di Q.

Ogni $P \subseteq Q$ determina una partizione U/I_P, che raggruppa nelle corrispondenti classi di equivalenza gli oggetti aventi la stessa descrizione nei termini degli attributi di P: per esempio per $P' = \{A_2, A_3\}$ si ha $U/I_P = \{\{1,2,3\}, \{4\}, \{5,6\}\}$ e perciò $\{1,2,3\}$, $\{4\}$, $\{5,6\}$ sono gli insiemi P' – elementari.

Si supponga di voler approssimare tramite l'insieme di attributi $P = \{A_1, A_2, A_3\}$ l'insieme X dei magazzini che hanno conseguito un utile, cioè $X = \{1,3,6\}$. Dal momento che $U/I_P = \{\{1\}, \{2,3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$ si ha:

$\underline{P}(X) = \{1,6\}$

$\overline{P}(X) = \{1,2,3,6\}$

$Bn_P(X) = \{2,3\}$

Questi risultati danno una risposta alla domanda se si può descrivere X per mezzo dell'informazione fornita dagli attributi di P. La risposta a questa domanda non è univoca. Si osservi che esiste una frontiera $Bn_P(X)$ non vuota: essa è costituita dai magazzini 2 e 3 che hanno la stessa descrizione nei termini degli attributi considerati ma tali che il magazzino 3 ha conseguito un utile mentre il magazzino 2 ha conseguito una perdita. Tuttavia, anche l'approssimazione inferiore di X, $\underline{P}(X)$, è non vuota: essa è costituita dai magazzini 1 e 6 che hanno una descrizione nei termini degli attributi considerati differente da tutti i magazzini non appartenenti a X. Riassumendo, in termini intuitivi, si può dire che, sulla base delle informazioni fornite dagli attributi di P:

1. i magazzini 1 e 6, appartenenti alla approssimazione inferiore, sicuramente appartengono all'insieme X dei magazzini che hanno utili,
2. i magazzini 1,2,3 e 6, appartenenti alla approssimazione superiore, potrebbero appartenere all'insieme X, dei magazzini che hanno utili,
3. i magazzini 2 e 3, che appartengono alla frontiera, rappresentano i casi di appartenenza dubbia all'insieme X dei magazzini che hanno utili.

Si considerino ora i seguenti sottoinsiemi di Q: $P = \{A_1, A_2, A_3\}$, $R = \{A_1, A_2\}$, $S = \{A_1, A_3\}$, $S = \{A_2, A_3\}$. Si osservi facilmente che $I_R = I_P$, $I_S = I_P$, mentre $I_T \neq I_P$. Questo significa che E e S sono ridotti di P mentre non lo è T. In altri termini, questo significa che R e S sono dei sottoinsiemi minimali di attributi che consentono di ottenere le stesse classificazioni degli elementi di U ottenibili usando l'insieme di attributi P. Si ha anche che il nucleo di P è dato $R \cap S$, cioè dall'attributo A_1 che in un certo senso costituisce l'attributo più importante per descrivere il magazzino, mentre gli attributi R e S possono essere mutualmente scambiati.

Se dall'insieme degli attributi Q si distinguono attributi condizionali, $C = \{A_1, A_2, A_3\}$, e attributo decisionale $D = \{A_1\}$, allora la Tavola dell'informazione può leggersi come una Tavola delle decisioni, con l'intento di spiegare le valutazioni dell'attributo decisionale per mezzo delle valutazioni degli attributi condizionali.

In questo caso la Tavola delle informazioni può anche essere interpretata come un insieme di regole di decisione. Per esempio con riferimento alla Tavola 3. si ha:

1. se $f(x, A_1) = alta$, e $f(x, A_2) = buona$, e $f(x, A_3) = no$, allora $f(x, A_4) = utile$,

   (o, in termini più elementari, "se la capacità del personale di vendita è alta e la qualità percepita è buona e la localizzazione non è ad alto traffico, allora il magazzino ha un utile"),

2 se $f(x, A_1) = media$, e $f(x, A_2) = buona$, e $f(x, A_3) = no$, allora $f(x, A_4) = perdita$,

3 se $f(x, A_1) = media$, e $f(x, A_2) = buona$, e $f(x, A_3) = no$, allora $f(x, A_4) = utile$,

4 se $f(x, A_1) = bassa$, e $f(x, A_2) = media$, e $f(x, A_3) = si$, allora $f(x, A_4) = perdita$,

5. se $f(x, A_1) = media$, e $f(x, A_2) = media$, e $f(x, A_3) = si$, allora $f(x, A_4) = perdita$,

6. se $f(x, A_1) = alta$, e $f(x, A_2) = media$, e $f(x, A_3) = no$, allora $f(x, A_4) = utile$.

Questo insieme di regole può allora essere opportunamente ridotto, ottenendo un insieme di regole più concise (nel senso di un minor numero di regole e di un utilizzo di un minor numero di attributi in ogni regola), per esempio:

I. se $f(x, A_1) = alta$, allora $f(x, A_4) = utile$,

II. se $f(x, A_1) = bassa$, allora $f(x, A_4) = perdita$,

III. se $f(x, A_1) = media$, e $f(x, A_2) = media$, allora $f(x, A_4) = perdita$,

IV. se $f(x, A_1) = media$, e $f(x, A_2) = buona$, allora $f(x, A_4) = \text{perdita o utile}$.

Si osservi che le regole I , II e III hanno un conseguente univoco, e perciò esse sono regole esatte, mentre la regola IV non ha un conseguente univoco, e perciò essa è una regola approssimata.

2.3 CONFRONTO CON L'ANALISI STATISTICA

Come già accennato, esistono numerose relazioni tra la teoria dei rough sets e altre teorie matematiche che si propongono di trattare particolari tipi di "incertezza" o di analizzare dati "imperfetti". Di seguito si riportano sinteticamente alcune brevi considerazioni sinottiche relative al confronto tra la teoria dei Rough Sets e la analisi statistica.

Tavola 5

PROBLEMA	METODI STATISTICI	ROUGH SETS
OBIETTIVI	Identificazione e stima dei parametri delle equazioni strutturali	Riduzione degli attributi ridondanti, generazione di regole di decisione
RAPPRESENTAZIONE DEI DATI	Tavola a due entrate che rappresentano un campione	Tavola delle informazioni
Tipi di attributi	Attributi quantitativi (almeno nel caso classico)	Attributi qualitativi; gli attributi quantitativi sono trasformati in qualitativi per mezzo di una opportuna Discretizzazione
Requisiti dei dati	Il campione deve essere statisticamente significativo; distribuzione	Nessun requisito; possibilità di analizzare anche tavole delle informazioni di ridotte dimensioni
Operatori per l'aggregazione dei dati	Valori medi, matrice delle covarianze, test statistici	Nessun operatore; i dati vengono analizzati nella loro forma originaria
Riduzione dei dati	Selezione di attributi con il maggiore potere discriminante; tipo strumento: test statistici	Sottoinsiemi minimali di attributi che assicurano la stessa qualità di classificazione dell'intero insieme di Attributi
Risultati finali	Rappresentazione funzionale	Regole di decisione

Spesso l'approccio dei rough sets non si pone come alternativo, ma come complementare ad altri approcci basati su teorie o tecniche differenti. Sono state effettuate diverse applicazioni concrete utilizzando differenti approcci; l'uso dei rough sets è risultato molto spesso particolarmente interessante, sia per le notevoli potenzialità applicative dovute alle sue peculiari proprietà (grande "povertà" di informazioni richieste) che per i peculiari risultati ottenuti (regole decisionali, rilevanza degli attributi).

L'indiscernibilità, come osservato, implica la assoluta impossibilità di distinguere due oggetti che hanno la stessa descrizione in termini degli attributi di Q. Tale relazione induce su U delle classi di equivalenza, che costituiscono i granuli fondamentali delle conoscenza mediante l'indiscernibilità. Spesso, nella realtà, anche per l'imprecisione dei dati che descrivono gli oggetti, piccole differenze non sono considerate significative ai fini della distinzione e degli oggetti corrispondenti. Questa situazione può essere modellizzata formalmente introducendo delle relazioni di similarità o di tolleranza.

In generale, le relazioni di similarità R non generano delle partizioni su U; le informazioni sulla similarità possono rappresentarsi usando delle classi di similarità per ogni oggetto $x \in U$. Precisamente, la classe di similarità di x, denotata con R(x), è costituita dall'insieme degli oggetti che sono simili ad x:

$R(X) = \{y \in U : yRx\}$

È chiaro che un oggetto $z \in R(X)$ può essere similare ad un altro oggetto $y \in U, y \notin R(X)$. La relazione di similarità è ovviamente riflessiva (ogni oggetto è similare a se stesso). Slowinski e Vanderpooten (1997) hanno proposto una relazione di similarità che è solamente riflessiva, rilassando quindi le proprietà di simmetria e transitività. L'abbandono della transitività è facilmente giustificabile, ricordando, ad esempio, il paradosso delle tazzine di caffè di Luce (1956). Per la simmetria, gli autori fanno osservare che, $y\,Rx$, che significa y (soggetto) è similare ad x (referente), è direzionale ed in generale non è equivalente alla proposizione "x è similare a y". Ciò è abbastanza immediato quando si definisce la relazione di similarità in termini di differenza percentuale rispetto all'oggetto referente. Pertanto, la simmetria della relazione di similarità non deve essere imposta. In tali casi, gli autori ricordati propongono di considerare la relazione inversa di R, denotata R^{-1}, ove $xR^{-1}y$ significa ancora "y è similare ad x"; $R^{-1}(x)$, $x \in U$, allora la classe degli oggetti referenti cui x è similare:

$R^{-1}(x) = \{y \in U: xRy\}$

Dato un sottoinsieme $X \subseteq U$, un oggetto $x \in U$ è allora, detto non ambiguo in ciascuno dei due seguenti casi:

• x appartiene a X senza ambiguità, cioè:

$$x \in X \; e \; R^{-1}(x) \subseteq X;$$

tali oggetti vengono chiamati "positivi";

• x non appartiene ad X senza ambiguità, cioè

$x \in U \backslash X \; e \; R^{-1}(X) \subseteq U \backslash X; \; (o \; R^{-1}(X) \cap X \neq \emptyset)$

tali oggetti vengono chiamati "negativi".

Gli oggetti che non sono né positivi né negativi vengono definiti "ambigui".

Può allora proporsi una definizione di approssimazione inferiore e superiore più generale. Sia $x \in U$ e R una relazione binaria riflessiva definita su U; l'approssimazione inferiore di X, denotata con $\underline{R}(X)$ e l'approssimazione superiore di X, denotata con $\overline{R}(X)$, sono per definizione rispettivamente:

$\underline{R}(X) = \{x \in U: R^{-1}(X) \subseteq X\}$

$\overline{R}(X) = \bigcup_{x \in X} R(X)$

Può dimostrarsi che risulta ancora $\underline{R}(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}(X)$ e che:

$\underline{R}(X) = U - \overline{R}(U - X) \; e$

$\overline{R}(X) = \{x \in U: R^{-1}(X) \cap X \neq \emptyset\}$

Inoltre, le definizioni proposte sono le uniche che caratterizzano propriamente l'insieme degli oggetti positivi (approssimazione inferiore) e l'insieme degli oggetti positivi o ambigui (approssimazione superiore) quando si usa una relazione di similarità riflessiva, ma non necessariamente simmetrica e transitiva.

3. I ROUGH SETS E LE DECISIONI MULTI ATTRIBUTO

3.1 LA FUNZIONE DELLA REGOLE DECISIONALI

Come accennato in precedenza, una tavola delle decisioni raccoglie tutte le informazioni relative ad un insieme di oggetti, descritti da un certo numero di attributi. Più precisamente, gli attributi condizionali forniscono una descrizione di ogni oggetto in termini di valutazioni su ciascuno di essi; gli attributi decisionali, uno o più, rappresentano uno stato della conoscenza di ciascun oggetto, basata su esperienze pregresse, su opinioni di esperti, su preferenze di decisori, ecc.. La tradizionale analisi di tale tavola mediante i rough sets consiste sostanzialmente nel confrontare le classificazioni degli oggetti di U indotte dagli attributi condizionali di C o di un sottoinsieme $P \subseteq C$, con quella dedotta dagli attributi decisionali D. Tali classificazioni sono, quindi, costruite l'una indipendentemente dall'altra. Lo strumento che si utilizza per effettuare tali confronti sono le approssimazioni, inferiori e superiori, di ciascuna delle classi decisionali così ottenute, usualmente sulla base della classica relazione di indiscernibilità.

Tradizionalmente l'analisi delle decisioni si propone di dare una risposta alle due seguenti domande: spiegare la decisione in termini delle circostanze in cui essa è presa (analisi retrospettiva); fornire un aiuto al decisore (una raccomandazione) su come prendere decisioni future (analisi prospettica). Quest'ultima si basa fondamentalmente sulle regole di decisione ottenute dalla tavola analizzata; la fase della spiegazione, quindi prepara quella della prescrizione, dandole utili informazioni per l'aiuto alle decisioni. Sotto tale aspetto, quindi l'approccio dei rough sets è simile ad un processo di apprendimento induttivo. Ancora, le regole di decisione generate vengono “ottimizzate”, sia con riferimento agli attributi effettivamente adoperati (ridotti), consentendo un grande risparmio nella gestione delle informazioni (eliminazione dei dati superflui), che con riferimento alle regole effettivamente utilizzate (generazione di insiemi di regole decisionali minimali), facilitando la comprensione delle stesse da parte del decisore mediante l’eliminazione di regole “ridondanti”.

3.2 PROBLEMI DI CLASSIFICAZIONE MULTIATTRIBUTO

I problemi di classificazione multi attributo, che consistono nell’assegnazione di ogni oggetto a delle categorie predefinite, rappresentano l’applicazione più naturale dei rough sets. Infatti, l’insieme degli esempi di classificazione viene rappresentato in maniera molto naturale e diretta nella Tavola delle decisioni. Naturalmente, ogni problema decisionale considerato è suscettibile di molte interpretazioni possibili. Per esempio, gli attributi decisionali possono rappresentare diversi agenti coinvolti in una certa attività, oppure opinioni di uno o più decisori, risultati di studi precedenti o di casi analoghi, ecc. Il modello formale utilizzato, però, non è influenzato da tali differenti interpretazioni e rimane lo stesso per tutti i problemi di classificazione affrontati.

La teoria dei rough sets è stata applicata con successo a numerosi problemi reali di classificazione in differenti campi, quali medicina, farmacologia, ingegneria, gestione del credito, ricerche di mercato, analisi finanziarie, economia ambientale, linguistica, database e altri importanti settori.

3.3 PROBLEMI DI CLASSIFICAZIONE MULTICRITERIALE

Come evidenziato da Greco, Matarazzo e Slowinski (1996) l’approccio classico dei rough sets (CRSA), tuttavia, non considera problemi di classificazione multicriteriale, cioè basati su attributi con domini ordinati (criteri). Tuttavia, in molti problemi reali è importante considerare proprietà ordinali degli attributi considerati. Per esempio, nelle valutazioni del rischio di fallimento, se l'indice di indebitamento (debiti totali/attività totali) dell'azienda A ha un valore modesto mentre lo stesso indice dell'azienda B ha un valore rilevante, all'interno dell'approccio dei rough sets le due aziende sono discernibili, ma nessuna preferenza è stabilita tra di esse con riferimento all'attributo "rapporto di indebitamento". Invece, dal punto di vista della valutazione del rischio di fallimento delle due aziende, sarebbe meglio considerare l'azienda A migliore dell'azienda B, e non semplicemente discernibile, con riferimento all'attributo in questione.

Sulla base di queste considerazioni, Greco Matarazzo e Slowinski (1998) hanno proposto un nuovo approccio dei rough sets per problemi di classificazione multicriteriale. Così come nell'analisi CRSA, l'approccio proposto è basato su approssimazioni di una partizione degli oggetti dell'universo in alcune classi predefinite sulla base della Tavola delle informazioni. Tuttavia, a differenza dell'approccio originario dei rough sets, le approssimazioni sono costruite usando relazioni di dominanza invece che di indiscernibilità. Questo permette di prendere esplicitamente in considerazione le proprietà ordinali degli attributi (criteri) considerati.

4. DOMINANCE-BASED ROUGH SET APPROACH (DRSA)

4.1 LA TEORIA DEL DRSA

Il Dominance-based Rough Set Approach è stato proposto da Greco, Matarazzo e Slowiński nella seconda metà degli anni novanta come generalizzazione della teoria classica sui rough set (Pawlak, 1991) per approcciarsi a problemi decisionali riguardanti l'ordinamento dei dati in base alle preferenze (Greco et al., 1999a, 2001b, 1999b; Slowiński et al., 2009).

Nella DRSA, gli attributi condizionali che descrivono gli oggetti sono interpretati come criteri di valutazione tramite un insieme di valori ordinati in base alle preferenze.

Consideriamo un insieme finito di criteri $F = \{f_1 \dots \dots f_n\}$, l'insieme dei loro indici $I = \{1 \dots \dots n\}$, e un universo finito di oggetti (soluzioni, altenative, azioni) U, tali che, senza perdita di generalità, $f_i: U \rightarrow R$ per ogni $i = 1 \dots . n$, e , per tutti gli oggetti $x, y \in U$, $f_i(x) \geq f_i(y)$ significa che "x è almeno tanto buona quanto y con riferimento al criterio i", che è denotato con $x \succsim_i y$.

Pertanto, noi supponiamo che $\succsim_i$ è un preordine completo, cioè è una relazione binaria fortemente completa e transitiva, definita su U sulla base di valutazioni $f_i(\cdot)$.

Assumiamo anche che c'è un attributo decisionale *d* che attua una partizione di U in un numero finito di classi decisionali, $Cl = \{Cl_1 \dots \dots \dots Cl_m\}$, tale che ogni $x \in U$ appartiene a una e una sola classe Cl_t, $t = 1 \dots . m$. Supponiamo che le classi siano ordinate in base alle preferenze, cioè per ogni $r, s = 1 \dots . m$, tale che se $r > s$, gli oggetti appartenenti a Cl_r sono preferiti a quelli in Cl_s. Più formalmente, se $\succsim$ è una *relazione completa di preferenza debole* su U, cioè se per ogni $x, y \in U$, $x \succsim y$ leggi"x è almeno tanto buona quanto *y*", allora si suppone $[x \in Cl_r, y \in Cl_s, r > s] \Rightarrow x \succ y$, dove $x \succ y$ significa $x \succsim y$ e *non* $y \succ x$. Le assunzioni sopra sono tipiche quando si considera un problema di analisi multicriteriale.

Gli insiemi di approssimazione sono chiamati *upward union* e *downward union* delle classi decisionali, rispettivamente:

$Cl_t^{\geq} = \bigcup_{s \geq t} Cl_s$, $Cl_t^{\leq} = \bigcup_{s \leq t} Cl_s$, $t = 1 \dots . m$.

$x \in Cl_t^{\geq}$ si legge "x appartiene almeno alla classe Cl_t", mentre $x \in Cl_t^{\leq}$ si legge "x appartiene al massimo alla classe Cl_t"

Rimarchiamo che

$Cl_1^{\geq} = Cl_n^{\leq} = U$, $Cl_n^{\geq} = Cl_n$ e $Cl_1^{\leq} = Cl_1$.

Inoltre, per $t = 2 \dots . m$, noi abbiamo:

$Cl_{t-1}^{\leq} = U - Cl_t^{\geq}$ e $Cl_t^{\geq} = U - Cl_{t-1}^{\leq}$.

L'idea chiave dell'approccio dei rough set per ragionare circa i dati è una rappresentazione (approssimazione) di conoscenza generata dagli attributi decisionali, usando *granuli di conoscenza* generati dagli attributi condizionali.

Nella DRSA, laddove gli attributi condizionali sono criteri e le classi decisionali sono ordinate in base alle preferenze, la conoscenza rappresentata è una collezione di *upward* e *downward unions* di classi e i granuli di conoscenza sono *dominance cones* nello spazio dei criteri.

Noi diciamo che x *domina* y rispetto a $P \subseteq I$ (brevemente , x P-domina y), denotato da $x \, D_P \, y$ se per ogni criterio

$i \in P$, $f_i(x) \geq f_i(y)$.

La relazione di P-dominanza è riflessiva e transitiva, cioè è un preordine parziale.

Dato un insieme di criteri $P \subseteq C$ e $x \in U$ i granuli di conoscenza usati per l'approssimazione nella DRSA sono:

- un insieme di oggetti dominanti x, chiamato insieme P-dominante, $D_P^+(x) = \{y \in U: y \, D_P \, x\}$,
- un insieme di oggetti dominato da x, chiamato insieme P-dominato, $D_P^-(x) = \{y \in U: x \, D_P \, y\}$.

Ricordiamo che il principio di dominanza richiede che un oggetto *x* dominante l'oggetto *y* (cioè *x* avente valutazioni almeno buone quanto *y* su tutti i considerati criteri) dovrebbe dominare anche *y* con riferimento al criterio decisionale (cioè *x* dovrebbe essere assegnato ad una classe decionale almeno tanto buona quanto *y*).

Gli oggetti appartenenti a *U* che soddisfano il principio di dominanza su $P \subseteq C$ sono chiamati *P-consistent.*

La *P*-inferiore approssimazione (*P*-lower approximation) di $Cl_t^{\geq}$, denotata da $\underline{P}(Cl_t^{\geq})$, e la P-superiore approssimazione (*P*-upper approximation) di $Cl_t^{\geq}$, denotata da $\overline{P}(Cl_t^{\geq})$, sono denotati come di seguito $(t = 1, \dots\dots, m)$:

$$\underline{P}(Cl_t^{\geq}) = \{x \in U: D_P^+(x) \subseteq Cl_t^{\geq}\}$$

$$\overline{P}(Cl_t^{\geq}) = \{x \in U: D_P^-(x) \cap Cl_t^{\geq} \neq \emptyset\}$$

Analogamente, si può definire la P-inferiore approssimazione e la P-superiore approssimazione di $Cl_t^{\leq}$ come segue $(t = 1, \dots\dots, m)$:

$$\underline{P}(Cl_t^{\leq}) = \{x \in U: D_P^-(x) \subseteq Cl_t^{\leq}\}$$

$$\overline{P}(Cl_t^{\leq}) = \{x \in U: D_P^+(x) \cap Cl_t^{\leq} \neq \emptyset\}$$

Le *P-inferiore* e le *P-superiore approssimazioni* definite soddisfano le seguenti *proprietà di inclusione*, per ogni $t \in \{1, \dots \dots, m\}$ e per ogni $P \subseteq I$:

$$\underline{P}(Cl_t^{\geq}) \subseteq Cl_t^{\geq} \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\geq}), \qquad \overline{P}(Cl_t^{\leq}) \subseteq Cl_t^{\leq} \subseteq \underline{P}(Cl_t^{\leq})$$

Le *P-inferiore* e le *P-superiore approssimazioni* di $Cl_t^{\geq}$ e $Cl_t^{\leq}$ hanno un' importante *proprietà di complementarità*, secondo la quale

$$\underline{P}(Cl_t^{\geq}) = U - \overline{P}(Cl_{t-1}^{\leq}) \ e \ \overline{P}(Cl_t^{\geq}) = U - \underline{P}(Cl_{t-1}^{\leq}),\ t = 2, \dots\dots, m$$

$$\underline{P}(Cl_t^{\leq}) = U - \overline{P}(Cl_{t+1}^{\geq}) \ e \ \overline{P}(Cl_t^{\leq}) = U - \underline{P}(Cl_{t+1}^{\geq}),\ t = 1, \dots\dots, m-1.$$

Le *P-frontiera* di $Cl_t^{\geq}$ e di $Cl_t^{\leq}$, denotate da $Bn_p(Cl_t^{\geq})$ e $Bn_p(Cl_{t-1}^{\leq})$, rispettivamente, sono definite come segue $(t = 1, \dots\dots, m)$:

$$Bn_p(Cl_t^{\geq}) = \overline{P}(Cl_t^{\geq}) - \underline{P}(Cl_t^{\geq}),\ Bn_p(Cl_t^{\leq}) = \overline{P}(Cl_t^{\leq}) - \underline{P}(Cl_t^{\leq})$$

A causa della suddetta *proprietà di complementarità*, $Bn_P(Cl_t^{\geq}) = Bn_P(Cl_{t-1}^{\leq})$, per $(t = 2, \dots\dots, m)$.

Per ogni $P \subseteq C$, la *qualità di approssimazione* della partizione $\boldsymbol{Cl}$ su un insieme di criteri *P* è definita come la percentuale del numero di oggetti *P-consistent* con riferimento al principio di dominanza e il numero di tutti gli oggetti in *U*.

Poiché gli oggetti *P-consistent* sono quelli non appartengono ad alcun *P-boundary* $Bn_P(Cl_t^{\geq})$ o $Bn_P(Cl_{t-1}^{\leq})$, $t = 1, \dots\dots, m$, la qualità dell'approssimazione della classificazione $\boldsymbol{Cl}$ su un insieme di criteri *P*, può essere scritta come

$$\boldsymbol{\gamma_P(Cl)} = \frac{\left|U - \left(\bigcup_{t\in\{1,\dots\dots,m\}} Bn_P(Cl_t^{\leq})\right) \cup \left(\bigcup_{t\in\{1,\dots\dots,m\}} Bn_P(Cl_t^{\geq})\right)\right|}{|U|}$$

$$= \frac{\left|U - \left(\bigcup_{t\in\{1,\dots\dots,m\}} Bn_P(Cl_t^{\geq})\right)\right|}{|U|} = \frac{\left|U - \left(\bigcup_{t\in\{1,\dots\dots,m\}} Bn_P(Cl_t^{\leq})\right)\right|}{|U|}$$

$\boldsymbol{\gamma_P(Cl)}$ può essere visto come il grado di consistenza degli oggetti classificati, dove *P* è l'insieme di criteri e $\boldsymbol{Cl}$ è la classificazione considerata.

Ogni sottoinsieme minimale (con riferimento all'inclusione) $P \subseteq C$, tale che $\boldsymbol{\gamma_P(Cl)} = \boldsymbol{\gamma_C(Cl)}$ è chiamato *ridotto* di $\boldsymbol{Cl}$, ed è denotato da $\mathbf{RED}_{Cl}$. Rimarchiamo che per un dato insieme di oggetti classificati si può avere più di un ridotto. L'intersezione di tutti i ridotti è chiamata *core*, ed è denotato da $\mathbf{CORE}_{Cl}$.

I criteri nel $\mathbf{CORE}_{Cl}$ non possono essere rimossi da quelli considerati senza deteriorare la qualità dell'approssimazione. Questo significa che, nell'insieme C, ci sono tre categorie di criteri:

- criteri indispensabili inclusi nel core,
- criteri scambiabili , inclusi in alcuni ridotto, ma non nel core,
- criteri ridondanti, ne indispensabili ne scambiali, e quindi non inclusi in alcun ridotto.

Le dominance-based rough approximations delle upward and downward unions delle classi decisionali possono servire a indurre una descrizione generalizzata di oggetti su U in termini di regole decisionali del tipo $\text{"}if \ldots., them''$. Per delle date upward o downward union delle classi, $Cl_t^{\geq}$ o $Cl_s^{\leq}$, le regole decisionali indotte sull' ipotesi che gli oggetti appartenenti a $\underline{P}(Cl_t^{\geq})$,o $\underline{P}(Cl_s^{\leq})$ siano esempi positivi, e tutti gli altri siano esempi negativi, suggeriscono un' assegnazione di oggetti che ricadano all'interno delle regole indotte alla "classe Cl_t o migliore", o alla "classe Cl_s o peggiore", rispettivamente. Dall'altro lato, le regole decisionali indotte sotto l'ipotesi che gli oggetti appartenenti a $\overline{P}(Cl_t^{\geq})$ o $\overline{P}(Cl_s^{\leq})$ siano esempi positivi, e tutti gli altri siano esempi negativi, suggeriscono una possibile assegnazione alla "classe Cl_t o meglio ", o alla "classe Cl_s o peggio", rispettivamente. Infine le regole indotte sotto un'ipotesi che gli oggetti appartengono all'intersezione $\overline{P}(Cl_s^{\leq}) \cap \overline{P}(Cl_t^{\geq})$ sono esempi positivi, e tutti gli altri sono esempi negativi, suggeriscono un' assegnazione alle classi tra Cl_s e Cl_s $(s < t)$.

Allo scopo di descrivere oggetti ordinati in base alle preferenze, è utile considerare i seguenti cinque tipi di regole:

1) $D_{\geq}$-regole decisionali certe, capaci di fornire descrizioni del profilo inferiore per gli oggetti appartenenti a $\underline{P}(Cl_t^{\geq})$:

$$se \ f_{i_1}(x) \geq r_{i_1} \ e \ldots \ldots e \ f_{ip}(x) \geq r_{ip}, \quad allora \ x \in Cl_t^{\geq},$$

$$\{i_1, \ldots \ldots, i_p\} \subseteq I, t = 2 \ldots \ldots \ldots m, r_{i_1} \ldots \ldots r_{ip} \in \mathcal{R};$$

2) $D_{\geq}$-regole decisionali possibili, capaci di fornire descrizioni del profilo inferiore per gli oggetti appartenenti a $\overline{P}(Cl_t^{\geq})$:

$$se \ f_{i_1}(x) \geq r_{i_1} \ e \ldots \ldots e \ f_{ip}(x) \geq r_{ip}, \quad allora \ x \in Cl_t^{\geq},$$

$$\{i_1, \ldots \ldots, i_p\} \subseteq I, t = 2 \ldots \ldots \ldots m, r_{i_1} \ldots \ldots r_{ip} \in \mathcal{R};$$

3) $D_{\leq}$-regole decisionali certe, capaci di fornire descrizioni del profilo superiore per gli oggetti appartenenti a $\underline{P}(Cl_t^{\leq})$:

$$se\ \ f_{i_1}(x) \geq r_{i_1}\ e \dots \dots e\ f_{i_p}(x) \geq r_{i_p}, \qquad allora\ x \in \ Cl_t^{\leq},$$

$$\{i_1, \dots \dots, i_p\} \subseteq I, t = 1 \dots \dots \dots m-1, r_{i_1} \dots \dots r_{i_p} \in \mathcal{R};$$

4) $D_{\leq}$-regole decisionali possibili, capaci di fornire descrizioni del profilo superiore per gli oggetti appartenenti a $\overline{P}(Cl_t^{\leq})$:

se

$e\ f_{i_1}(x) \leq r_{i_1}\ e \dots \dots e\ f_{i_p}(x) \leq r_{i_p},$
$allora\ x\ possibilmente\ appartiene\ a\ Cl_t^{\leq},$

$$\{i_1, \dots \dots, i_p\} \subseteq I, t = 1 \dots \dots \dots m-1, r_{i_1} \dots \dots r_{i_p} \in \mathcal{R};$$

5) $D_{\geq\leq}$-regole decisionali approssimate, capaci di fornire descrizioni del profilo superiore ed inferiore per gli oggetti appartenenti a $Cl_s \cup Cl_{s+1} \cup \dots \cup Cl_t$, senza possibilità di discernere con precisione la classe di assegnazione:

$$se\ \ f_{i_1}(x) \geq r_{i_1}\ e\ \dots\ e\ f_{i_k}(x) \geq r_{i_k}$$

$$e\ f_{i_{k+1}}(x) \geq \ r_{i_{k+1}}\ e\ \dots\ e\ f_{i_p}(x) \geq r_{i_p},$$

$$allora\ x\ \in\ Cl_s\ \cup\ Cl_{s+1}\ \cup \dots \cup\ Cl_t,$$

$$\{i_1, \dots, i_p\} \subseteq\ I, s, t \in\ 1, \dots, m, s\ <\ t, r_{i_1}, \dots, r_{i_p} \in\ \mathcal{R}\ .$$

Nella premessa di una regola decisionale $D_{\geq\leq}$ noi possiamo avere "$f_i(x) \geq r_i$" e "$f_i(x) \leq r_i'$", dove $r_i \leq r_i'$, per lo stesso $i \in I$. Inoltre, se $r_i = r_i'$, le due condizioni si riducono "$f_i(x) = r_i$".

Dato che da una regola decisionale segue un tipo di implicazione, un'implicazione derivante da una regola *minimale* equivale a dire che non ci sono altre implicazioni collegate alla premessa con almeno la stessa forza (in altre parole, una regola basata su un sottoinsieme di condizioni elementari e/o di condizione deboli elementari) e la conclusione con almeno la stessa forza (in altre parole, una regola decisionale $D_{\geq}$ o una $D_{\leq}$ capace di assegnare oggetti alla stessa unione o sotto unione di classi, o una regola decisionali $D_{\geq\leq}$ capace di assegnare oggetti allo stesso o a un più esteso insieme di classi).

Le regole di tipo 1) e 3) rappresentano conoscenza certa estratta dai dati (esempi considerati) mentre le regole di tipo 2) e 4) rappresentano possibile conoscenza; le regole di tipo 5) appresentano solo oggetti appartenenti alla partizione.

Inoltre, le regole di tipo 1) e 3) sono *esatte* se esse non coprono esempi negativi, altrimenti sono *probabilistiche*.

Nell' ultimo caso, ogni regola è caratterizzata da un tasso di confidenza, rappresentante la probabilità che un oggetto che rispetti la premessa della regola rispetti anche la sua conclusione.

Data una regola decisionale certa o possibile $D_{\geq}r \equiv$ "$se\ f_{i_1}(x) \geq r_{i_1}\ e \ldots \ldots e\ f_{ip}(x) \geq r_{ip},\ allora\ x \in Cl_t^{\geq}$", un oggetto $y \in U$ *supporta* r se $f_{i_1}(y) \geq r_{i_1}$ e ...... e $f_{ip}(y) \geq r_{ip}$, e $y, x \in Cl_t^{\geq}$. Inoltre, l'oggetto $y \in U$ supportante la regola decisionale r è una *base* di r se $f_{i_1}(y) = r_{i_1}$ e ...... e $f_{ip}(y) = r_{ip}$. Definizioni similari valgono per le regole decisionali $D_{\leq}$ certe o possibili e per le regole decisionali approssimate $D_{\geq\leq}$.

Una regola decisionale avente almeno una base è chiamata *robusta*. L'identificazione del supporto degli oggetti e della base di robuste regole è importante per l'interpretazione delle regole nella prospettiva di un'analisi decisionali multicriteriale.

Il rapporto fra il numero di oggetti che supportano una regola e il numero di tutti gli oggetti su *U* è chiamato supporto relativo di una regola. Il supporto relativo e il rapporto di confidenza sono caratteristiche base di una regola, tuttavia, alcune misure Bayesiane di conferma riflettono molto meglio l'attrattività di una regola (Greco et al., 2004).

Un insieme di regole decisionali è *completo* se copre tutti gli oggetti su *U* in maniera tale che gli oggetti consistenti sono riassegnati alle loro classi originarie, e oggetti inconsistenti sono assegnate ai clusters di classi che si riferiscono a questa inconsistenza. Noi chiamiamo ogni insieme di regole decisionali che è completo e non ridondante *minimal*, cioè l'esclusione di alcune regole da questo insieme lo rende incompleto.

Una delle tre strategie di induzione adottate può essere adottata per ottenere un insieme di regole decisionali (Stefanowski, 1998):

- generazione di una rappresentazione *minimal*, cioè un minimo insieme di regole,
- generazione di una rappresentazione *esaustiva*, cioè tutte le regole per un dato insieme *U* di oggetti (*sorting examples*),
- generazione di una rappresentazione *caratteristica*, cioè un insieme di regole che copre relativamente molti oggetti, tuttavia, non necessariamente tutti gli oggetti su *U*.

Nota che la sintassi delle regole decisionali indotte dalla rough approximations definite usando coni di dominanza comporta anche coni di dominanza. Ogni profilo della condizione di una regola definisce un cono di dominanza nello spazio condizionali n-dimensionale $\mathcal{R}^n$, e ogni profilo della decisione di una regola definisce un cono di dominanza uno spazio decisionale a una dimensione

$\{1, \ldots, m\}$.In entrambi i casi, i coni sono positivi per le regole $D_{\geq}$, e negativi per le regole $D_{\leq}$.

Rimarchiamo, inoltre, che i coni di dominanza corrispondenti ai profili delle condizioni si possono originare in qualche punto di $\mathcal{R}^n$, senza il rischio di conferire troppa specificità alla regola. Quindi, contrariamente al tradizionale granular computing, lo spazio condizionale $\mathcal{R}^n$, non ha bisogno di essere discretizzato.

Procedure per l'induzione delle regole dalle dominance-based rough approximations sono state proposte in (Greco et al., 2001).

In (Giove et al., 2002), una nuova metodologia per l'indizione di una nuova metodologia per l'induzione di alberi decisionali monotonici dalle dominance-based rough approximations delle classi decisionali ordinate in base alle preferenze sono state proposte.

4.2 UN ESEMPIO PRATICO DI APPLICAZIONE DELLA METODOLOGIA DRSA

In questo paragrafo, noi presentiamo un esempio didattico che illustra i principali concetti della DRSA.

Un' impresa deve gestire le scorte di un prodotto per la quale vi è una domanda sconosciuta, nell'orizzonte temporale di 365 giorni.

Il manager non conosce i costi di mantenimento e i costi di riordino in anticipo, ma egli sa che una crescita della quantità complessiva Q di riordino comporta una crescita dei costi di mantenimento, e che una crescita del numero di ordini comporta un aumento del costo di riordino.

L'impresa può comprare il prodotto da alcuni fornitori ma il suo potere contrattuale è molto basso.

Infatti, ogni fornitore propone alcune combinazioni della quantità di riordino complessiva Q e del numero di ordini N nel considerato orizzonte temporale, correlate a date condizioni di sconto S.

Costruire un modello di preferenze dell'inventory manager aiuta a capire il valore delle differenti combinazioni proposte e, conseguentemente, a scegliere le più adatte inventory strategy per l'azienda.

Al fine di costruire il modello di preferenza, noi consideriamo alcune alternative proposte da differenti fornitori e noi mostriamo quelle all'inventory manager sotto forma di Tavola 6.

Tavola 6

Alternative	**Q**	**N**	**S**
s1	**250**	**60**	**1000**
s2	**350**	**80**	**1000**
s3	**400**	**60**	**2000**
s4	**250**	**45**	**2000**
s5	**300**	**40**	**3000**
s6	**250**	**30**	**3000**
s7	**550**	**90**	**1000**
s8	**550**	**70**	**2000**

Q denota la quantità di ordine complessiva, N è il numero di ordini che può essere effetuato dall'azienda, e S è lo sconto concesso dal fornitore nell'orizzonte temporale considerato. Nel contesto di un'analisi multi criteriale della inventory strategia, gli attributi condizionali Q, N ed S che descrivono le alternative

$s1, \dots, s8$ sono criteri di valutazione: Q e N devono essere minimizzati, e S deve essere massimizzato.

L' inventory manager esprime la sua valutazione complessiva delle alternative proposte; la valutazione complessiva corrisponde all'attributo decisionale.

L'insieme delle valutazioni complessive è composto da $scarsa, media$ e $buona$. L'ordine di preferenze di questi valori è ovvio.

Assumiamo che l'inventory manager dia la valutazione complessiva mostrata nella Tavola 7.

Tavola 7

Alternative	Q	N	S	Valutazione complessiva
s1	250	60	1000	Scarsa
s2	350	80	1000	Media
s3	400	60	2000	Media
s4	250	45	2000	Buona
s5	300	40	3000	Buona
s6	250	30	3000	Buona
s7	550	90	1000	Scarsa
s8	550	70	2000	Scarsa

Rimarchiamo che il principio di dominanza che ovviamente si applica alle alternative considerate imponga che, da un miglioramento delle alternative su uno dei tre criteri, con gli altri invariati, non dovrebbe derivare un peggioramento della valutazione complessiva della strategia, piuttosto ciò dovrebbe migliorare quella.

Osserviamo che la strategia $s1$ ha una valutazione non peggiore che la strategia $s2$ su tutti i considerati criteri, tuttavia, la valutazione complessiva di $s1$ è peggiore che la valutazione complessiva di $s2$. Ciò contraddice il principio di dominanza, quindi le due alternative considerate sono inconsistenti. Osserviamo che se riduciamo l'insieme dei criteri considerati, allora possono verificarsi ulteriori inconsistenze. Per esempio, rimuoviamo dalla Tavola 7 i valori di *S*.

In questo modo, noi otteniamo la Tavola 8, dove non solo $s1$ e $s2$ sono inconsistenti, ma anche $s3$. Infatti, la strategia s1 ha una valutazione non peggiore della strategie $s2$ e $s3$ su tutti i due criteri considerati (Q e N), tuttavia, la valutazione complessiva di $s1$ è peggiore della valutazione complessiva di $s2$ ed $s3$ che quindi sono inconsistenti rispetto ad $s1$.

Tavola 8

Alternative	Q	N	Valutazione complessiva
s1	250	60	Scarsa
s2	350	80	Media
s3	400	60	Media
s4	250	45	Buona
s5	300	40	Buona
s6	250	30	Buona
s7	550	90	Scarsa
s8	550	70	Scarsa

Osserviamo, inoltre, che se noi rimuoviamo dalla Tavola 7 i valori di N, noi otteniamo la Tavola 9, dove non incorrono inconsistenze a confronto con la Tavola 7.

Tavola 9

Alternative	Q	S	Valutazione complessiva
s1	250	1000	Scarsa
s2	350	1000	Media
s3	400	2000	Media
s4	250	2000	Buona
s5	300	3000	Buona
s6	250	3000	Buona
s7	550	1000	Scarsa
s8	550	2000	Scarsa

Similarmente, se noi rimuoviamo dalla Tavola 7 i valori di Q, noi otteniamo la Tavola 10, dove non incorrono nuove inconsistenze rispetto alla Tavola 7.

Tavola 10

Alternative	N	S	Valutazione complessiva
s1	60	1000	Scarsa
s2	80	1000	Media
s3	60	2000	Media
s4	45	2000	Buona
s5	40	3000	Buona
s6	30	3000	Buona
s7	90	1000	Scarsa
s8	70	2000	Scarsa

Il fatto che non si verifichino nuove inconsistenze quando i valori di N o Q sono rimossi, significa che i sottoinsiemi di criteri $\{N, S\}$ o $\{Q, S\}$ contengono sufficiente informazione per rappresentare la valutazione complessiva delle strategie alternative con la stessa qualità di approssimazione del caso in cui si considerino tutti e tre i criteri.

Questo non è il caso, tuttavia, per il sottoinsieme $\{Q, N\}$.

Osserviamo, inoltre, che i sottoinsiemi $\{N, S\}$ e $\{Q, S\}$ sono "minimal", poiché nessun altro criterio può essere rimosso senza che si incorra in nuove inconsistenze. Quindi $\{N, S\}$ e $\{Q, S\}$ sono ridotti del insieme completo dei criteri $\{Q, N, S\}$. Poiché Q è il solo criterio che non può essere rimosso da alcun ridotto senza che ciò comporti l'introduzione di nuove inconsistenze, ciò costituisce il core, cioè l'insieme di criteri indispensabili. Il core è, infatti, l'intersezione di tutti i ridotti, cioè nel nostro esempio:

$\{S\} = \{N, S\} \cap \{Q, S\}$.

Al fine di illustrare in modo semplice i concetti delle rough approximations, noi confiniamo la nostra analisi al ridotto $\{Q, S\}$.

Consideriamo la strategia $s3$. Il suo cono positivo di dominanza $D^{+}_{\{Q,S\}}(s3)$ è composto di tutte le strategie aventi valori non peggiori di quello su Q e S, cioè di tutte le strategie dominanti rispetto a Q ed S.

Quindi, noi abbiamo

$D^{+}_{\{Q,S\}}(s3) = \{s3, s4, s5, s6\}$.

Dall'altro lato, il cono negativo di dominanza della strategia $s3$, $D^{-}_{\{Q,S\}}(s3)$, è composto di tutte le strategie aventi valori non migliori che quello su Q e S, cioè di tutte le strategie dominate da quello rispetto a Q e S. Quindi, noi abbiamo

$D^-_{\{Q,S\}}(s3) = \{s3, s7, s8\}$.

Gli stessi coni di dominanza possono essere ottenuti per tutte le strategie alternative della Tavola 9.

Per esempio, per $s2$ noi abbiamo

$D^+_{\{Q,S\}}(s2) = \{s1, s2, s4, s5, s6\}$

e

$D^-_{\{Q,S\}}(s2) = \{s2, s7\}$.

Usando i coni di dominanza, noi possiamo calcolare the rough approximations.

Consideriamo, per esempio, l'approssimazione inferiore dell' insieme di strategie aventi valutazione complessiva "buona" $\underline{P}(Cl^{\geq}_{good})$, con $P = \{Q, S\}$. Noi abbiamo, $\underline{P}(Cl^{\geq}_{good}) = \{s4, s5, s6\}$, poichè i coni positivi di dominanza delle strategie $s4, s5$ e $s6$ sono tutti inclusi nell'insieme di strategie con valutazione complessiva "buona".

In altre parole, questo significa che non c'è strategia dominante $s4$ o $s5$ o $s6$ avente valutazione complessiva peggiore di "buona". Dal punto di vista del decisore, questo significa che, tenendo conto dell'informazione disponibile relativa alla valutazione delle strategie su Q e S, il fatto che una strategia y domina $s4$ o $s5$ o $s6$ è una condizione *sufficiente* a concludere che y è una buona strategia.

Come approssimazione superiore dell' insieme di strategie con valutazione complessiva "buona" noi abbiamo $\overline{P}(Cl^{\geq}_{good}) = \{s4, s5, s6\}$, poichè i coni negativi di dominanza delle strategie $s4$, $s5$ e $s6$ hanno una intersezione non vuota con l'insieme di strategie aventi una valutazione complessiva "buona".

In altre parole, questo significa che per ognuna delle strategie s4, s5 e s6, c'è almeno una strategia con valutazione complessiva "buona". Dal punto di vista del decisore, questo significa che, tenendo conto dell'informazione disponibile circa la valutazione delle strategie su Q e S, il fatto che una strategia y è dominata da $s4$ o $s5$ o $s6$ è una condizione *possibile* per concludere che y è una strategia “buona”.

Noi osserviamo che per l'insieme di criteri $P = \{Q, S\}$, l’approssimazione superiore e inferiore dell'insieme delle strategie con valutazione complessiva “buona” sono le stesse.

Questo significa che gli esempi della tavola relativi a questa classe sono tutti consistenti.

Questo non è il caso, tuttavia, degli esempi relativi all'unione delle classi decisionali “almeno media”.

Per questa unione superiore noi abbiamo $\underline{P}(Cl^{\geq}_{medium}) = \{s3, s4, s5, s6\}$ e $\overline{P}(Cl^{\geq}_{medium}) = \{s1, s2, s3, s4, s5, s6\}$. La differenza tra $\overline{P}(Cl^{\geq}_{medium})$ e $\underline{P}(Cl^{\geq}_{medium})$, cioè la frontiera $Bn_p(Cl^{\geq}_{medium}) = \{s1, s2\}$, è composta di strategie con valutazioni complessive inconsistenti, che sono stati già posti in evidenza sopra. Dal punto di vista del decisore, questo significa, che tenendo conto dell'informazione disponibile circa la valutazione delle strategie su Q e S, il fatto che una strategia y è dominata da $s1$ e domina $s2$ è una condizione per concludere che y può ottenere valutazione complessiva “almeno media” con qualche dubbio.

Fino ad ora noi abbiamo considerato le approssimazioni delle sole unioni superiori delle classi decisionali. E' interessante, tuttavia, calcolare anche le rough approximations delle downward unions delle classi decisionali.

Consideriamo prima l’approssimazione inferiore dell'insieme di strategie aventi una valutazione complessiva “al massimo media” $\underline{P}(Cl^{\leq}_{medium})$. Noi abbiamo, $\underline{P}(Cl^{\leq}_{medium}) = \{s1, s2, s3, s7, s8\}$, poichè i coni negativi di strategie

$s1, s2, s3, s7,$ e $s8$ sono tutti inclusi nell' insieme di strategie con Valutazione Complessiva “al massimo media”. In altre parole, questo significa che non ci sono strategie dominate da $s1$ o $s2$ o $s3$ o $s7$ o $s8$ aventi valutazione complessiva migliore che “media”. Dal punto di vista del Decisore, questo significa che, tenendo conto dell'informazione disponibile relativa alla valutazione delle strategie su Q e S, il fatto che una strategia y è dominato da $s1$ o $s2$ o $s3$ o $s7$ o $s8$ è una condizione $sufficiente$ a concludere che y è una strategia “al massimo media”.

Poichè l' approssimazione superiore dell' insieme di strategie con valutazione complessiva “al massimo media”, noi abbiamo $\overline{P}(Cl^{\leq}_{medium}) = \{s1, s2, s3, s7, s8\}$, poichè i coni positivi di dominanza delle strategie $s1, s2, s3, s7,$ e $s8$ hanno una non vuota intersezione con l'insieme di strategie aventi valutazione complessiva “al massimo media”. In altre parole, questo significa che per ognuna delle strategie $s1, s2, s3, s7,$ e $s8,$ c'è almeno una strategia dominante quella con una valutazione complessiva “al massimo media”. Dal punto di vista del decisore, questo significa, tenendo conto dell'informazione disponibile circa la valutazione delle strategie su Q e S, il fatto che una strategia y è dominata da s1 o s2 o s3 o s7 o s8 è una *possibile* condizione a concludere che y è una strategia “al massimo media”.

Infine, per l'insieme di strategie aventi valutazione complessiva, per l' insieme delle strategie aventi valutazione complessiva “scarsa”, noi abbiamo $\underline{P}(Cl^{\leq}_{bad}) = \{s7, s8\}$ e $\overline{P}(Cl^{\leq}_{bad}) = \{s1, s2, s7, s8\}$. La differenza tra $\underline{P}(Cl^{\leq}_{bad})$ e $\overline{P}(Cl^{\leq}_{bad})$, cioè la frontiera $Bn_p(Cl^{\leq}_{bad}) = \{s1, s2\}$ è composta di strategie con valutazione complessiva inconsistente, che è stata posta in evidenza sopra. Dal punto di vista del decisore, questo significa che, tenendo conto dell'informazione disponibile circa la valutazione delle strategie su Q e S, il fatto che una strategia y è dominata da $s1$ e domina $s2$ è una condizione per concludere che y può ottenere una valutazione complessiva “scarsa” con qualche dubbio. Osserviamo, inoltre, che $Bn_p(Cl^{\geq}_{medium}) = Bn_p(Cl^{\leq}_{bad})$.

Date le suddette rough approximations relative all'insieme di criteri $P = \{Q, S\}$, è possibile indurre un insieme di regole decisionali che rappresentantano le preferenze dell' inventory manager. L'idea è che i profili di strategie appartenenti alle approssimationi inferiori possano servire come base di alcune regole certe, mentre i profili di strategie appartenenti alle frontiere possono servire come base di alcune regole approssimate. Il seguente insieme completo di regole decisionali è stato indotto (tra parentesi ci sono le strategie che supportano tali regole; la strategie che fungono da base per la regole sono sottolineate):

- regola 1) Se il valore su Q è al massimo 250, e il valore su S è almeno 2000, allora la valutazione complessiva è almeno "buona"', $\{\underline{s4}, s6\}$,
- regola 2) se il valore su Q è al massimo 400, e il valore su S è almeno 2000, allora la valutazione complessiva è almeno media, $\{\underline{s3}, s4, s5, s6\}$,
- regola 3) se il valore su Q è almeno 350, e il valore su S è al massimo 1000, allora la valutazione complessiva è scarsa o media, $\{s1, \underline{s2}, s7\}$,
- regola 4) se il valore su Q è almeno 400, allora la valutazione complessiva è al massimo media, {<u>s3</u>, s7,s8},
- regola 5) se il valore su S è al massimo 1000, allora la valutazione complessiva è al massimo media, $\{s1, \underline{s2}, s7\}$,
- regola 6) se il valore su Q è almeno 550, allora la valutazione complessiva è al massimo scarsa, $\{\underline{s7, s8}\}$,

- regola 7) se il valore su S è almeno 3000, allora la valutazione complessiva è almeno buona, $\{\underline{s5, s6}\}$.

Rimarchiamo che le regole che le regole 1)-2), 4)-7) sono certe, mentre la regola 3) è approssimata. Queste regole rappresentano conoscenza tratta dall'informazione disponibile.

In un tale contesto, questa informazione è interpretata come modello di preferenza dell' inventory manager.

Anche se si può rappresentare l'informazione relativa alle preferenze usando solo un ridotto dell'insieme di criteri (come noi abbiamo fatto usando $P = \{Q, S\}$), considerando un più largo insieme di criteri rispetto al ridotto, uno può ottenere una più sintetica rappresentazione della conoscenza, cioè il numero delle regole decisionali o il numero delle condizioni elementari in ogni regola decisionale, o entrambi, può essere più basso.

Per esempio, considerando l'insieme di tutti e tre i criteri, $\{Q, N, S\}$, noi possiamo indurre un insieme completo di regole decisionali composto delle suddette regole 2), 3) e 6), più le seguenti:

- regola 8) se il valore su N è al massimo 45, allora la Valutazione Complessiva è almeno buona, $\{\underline{s4}, s5, s6\}$,
- regola 9) se il valore su N è almeno 60, allora la Valutazione Complessiva è al massimo media, $\{\underline{s1}, s2, \underline{s3}, s7, s8\}$.

Quindi, in caso di tre criteri, l'insieme completo delle regole decisionali è composto di 5 regole, mentre nel caso di due criteri, esso era composto da 7 regole.

Capitolo 3

MODELLI INTERATTIVI E PROBLEMI MULTIOBIETTIVO NONLINEARI

1. I MODELLI INTERATTIVI COME STRUMENTO PER ESPLORARE LE PREFERENZE

1.1 GENERALITA’

L’approccio di ottimizzazione multiobiettivo non-lineare comporta il prendere decisioni multicriteriali che coinvolgono funzioni non lineari di variabili decisionali continue. In questi problemi, il miglior compromesso possibile è da trovare su un infinito numero di alternative rappresentate dai vettori di variabili decisionali che rispettano i vincoli funzionali.

Risolvere problemi di ottimizzazione multiobiettivo richiede la partecipazione di un decisore che è supposto avere una maggior consapevolezza della problematica e capace di esprimere relazioni di preferenza fra le soluzioni alternative. I metodi possono essere divisi in quattro classi in base al ruolo che il decisore ricopre nella procedura di risoluzione. Se il decisore non è coinvolto, si usano metodi dove non viene considerata alcuna articolazione dell’informazione sulle preferenze, in altre parole, si tratta di *no-preference methods*.

Se il decisore esprime l’informazione sulle preferenze dopo il processo di soluzione, si parla di *a posteriori methods* mentre gli *a priori methods* richiedono l’articolazione dell’informazione sulle preferenze prima del processo di soluzione. La classe più estesa di metodi comprende gli *interactive methods* dove il decisore specifica l’informazione sulle preferenze progressivamente durante il processo di soluzione. Di seguito ci concentriamo su questa ultima classe menzionata

(Miettinen 1999). Molti fenomeni del mondo reale possono essere rappresentati in una maniera non-lineare.

Inoltre, i problemi lineari possono sempre essere risolti usando metodi creati per i problemi non-lineari ma non viceversa. Per queste ragioni, noi qui ci riferiamo ai soli problemi non lineari.

Si assume che tutta l'informazione fornita sia deterministica e che si abbia un singolo decisore.

Veniamo a introdurre una serie di concetti e definizioni. Si considerano problemi di ottimizzazione multiobiettivo dalla forma

$$\begin{array}{ll} min & \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}) \ldots, f_k(\mathbf{x})\} \\ sottoposto\ a & \mathbf{x} \in S \end{array}$$

riguardanti $k(\geq 2)$ funzioni obiettivo $f_i\colon R^n \to R$ che noi vogliamo minimizzare simultaneamente. I vettori della variabile (decisionale) **x** appartengono alla (non vuota) regione ammissibile $S \subset R^n$. La regione ammissibile è formata da funzioni vincolate ma noi non fissiamo questi vincoli qui.

Denotiamo l'immagine della regione ammissibile con $Z \subset R^n$ e chiamiamo questa come regione obiettivo ammissibile. I valori delle funzioni obiettivo formano i vettori obiettivo $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f_2}(\boldsymbol{x}), \ldots \boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{x}))^{\boldsymbol{T}}$. Si noti che se f_i deve essere massimizzata, ciò equivale a minimizzare $-f_i$.

Un problema di ottimizzazione multi obiettivo si definisce convesso se tutte le funzioni obiettivo e la regione ammissibile sono convesse. Il problema è non differenziabile se almeno uno degli obiettivi o delle funzioni vincolate è non differenziabile. (Qui non differenziabilità significa che la funzione è non necessariamente continuamente differenziabile ma che è localmente Lipschitz continua.)

Si assume che le funzioni obiettivo siano almeno parzialmente *confliggenti* e possibilmente *incommensurabili*. Questo significa che non è possibile trovare una singola soluzione in grado di ottimizzare tutti gli obiettivi simultaneamente. In caso opposto, se cioè dovesse esistere una soluzione che ottimizzasse tutte le funzioni obiettivo il problema di decisione si risolve semplicemente scegliendo la soluzione Pareto otiimale. Come definizione di ottimo noi impieghiamo l'ottimo di Pareto. Un vettore è Pareto ottimale (o non inferiore o efficiente o non dominato) se nessuna delle sue componenti può essere migliorata senza deteriorare almeno una delle altre.

Da ciò deriva la seguente definizione. Un vettore decisionale $\mathbf{x}^* \in S$ è (globalmente) Pareto ottimale se non esiste un altro vettore $\mathbf{x} \in S$ tale che $\boldsymbol{f}_i(\mathbf{x}) \leq \boldsymbol{f}_i(\mathbf{x}^*)$ per ogni $i = 1, \dots, k$ e $\boldsymbol{f}_j(\mathbf{x}) < \boldsymbol{f}_j(\mathbf{x}^*)$ per almeno un indice *j*.

Un vettore obiettivo $\mathbf{z}^* \in Z$ è Pareto ottimale se non esiste un altro vettore $\mathbf{z} \in Z$ tale che $\mathbf{z} \leq \mathbf{z}^*$ per almeno un indice *j*; o equivalentemente, $\mathbf{z}^*$ è Pareto ottimale se il vettore decisionale corrispondente è Pareto ottimale.

Una soluzione localmente Pareto ottimale è definita in un piccolo intorno di $\mathbf{x}^* \in S$. Naturalmente, una soluzione globalmente Pareto ottimale è localmente Pareto ottimale. Il contrario non è generalmente valido, a meno che non valgano alcune particolari condizioni, per esempio, per problemi multi obiettivo convessi.

Per ragioni di brevità, nel proseguo si parla di soluzioni Pareto ottimali. In pratica, tuttavia, si hanno disponibili dal punto di vista computazionale solo soluzioni Pareto ottimali localmente, a meno che qualche richiesta aggiuntiva, come la convessità, non sia soddisfatta, non si hanno risolutori globali.

Un insieme Pareto ottimale consiste in un numero di soluzioni infinito Pareto ottimali.

Nei metodi interattivi, noi in genere operiamo attorno all'insieme Pareto ottimale e dimentichiamo le altre soluzioni. Tuttavia ci si dovrebbe ricordare che questa limitazione potrebbe comportare delle limitazioni. In concreto, l'insieme Pareto ottimale reale può rimanere sconosciuto. Questo potrebbe essere il caso in cui una funzione obiettivo è solo l'approssimazione della vera funzione obiettivo o se non tutte le funzioni obiettivo coinvolte sono esplicitamente espresse.

Passare da una soluzione Pareto ottimale all'altra necessita l'accettazione di trading off. In maniera più specifica, un trade-off riflette la natura del cambiamento nei valori delle funzioni obiettivo concernenti l'incremento in una funzione obiettivo che si verifica quando il valore di qualcun'altra funzione decresce.

Fra due soluzioni egualmente preferibili c'è un trade-off per il quale il decisore, rimanendo inalterata la preferenza accordata, tollera un certo incremento nel valore di una funzione obiettivo a fronte di un certo decremento di valore in un'altra funzione obiettivo.

Tutto ciò si può definire come tasso marginale di sostituzione.

Di solito una delle funzioni obiettivo viene scelta come funzione di referenza (reference function) quando sono trattati i trade-offs e i tassi marginali di sostituzione che la riguardano. Tali trade-offs e tassi marginali di sostituzioni sono generati rispetto ad essa.

Talvolta, gli insiemi Pareto ottimali non sono sufficienti per risolvere il problema di ottimizzazione, poiché vi è il bisogno di insiemi più ampi o più piccoli; insiemi Pareto ottimali deboli (weakly) approssimati (properly), rispettivamente. Un vettore è debolmente Pareto ottimale se non esiste alcun vettore per il quale tutte le componenti sono migliori. Le soluzioni debolmente Pareto ottimali sono qualche volta computazionalmente più facili da generare rispetto alle soluzioni

Pareto ottimali. Quindi, queste hanno rilevanza da un punto di vista tecnico. Dall'altro lato, un vettore è properly Pareto ottimale se non sono permessi trade-offs in numero infinito.

I problemi di ottimizzazione multi obiettivo sono generalmente risolti per mezzo di scalarizzazioni. Ciò significa che il problema viene di volta in volta convertito in uno o in una famiglia di problemi (scalari) di ottimizzazione mono obiettivo.

Ciò produce un nuovo problema con una funzione obiettivo a valori reali, possibilmente dipendente da alcuni parametri.

I metodi interattivi differiscono l'uno dall'altro per la forma con la quale il problema è trasformato in un problema di ottimizzazione mono obiettivo, per la forma tramite la quale l'informazione viene fornita dal decisore, e per la forma nella quale l'informazione viene fornita al decisore.

Un modo per esprimer le preferenze del decisore è chiedergli dei valori soddisfacenti o desiderabili della funzione obiettivo. Essi sono chiamati aspiration levels e sono denotati da $\bar{z}_i, i = 1, \dots, k$. Essi formano un vettore $\bar{z} \in R^k$ chiamato reference point.

Il range dell'insieme delle soluzioni Pareto ottimali fornisce una notevole informazione per il decisore, perché gli permette di farsi un'idea sulle possibilità e sulle restrizioni del problema (assumendo che le funzioni obiettivo sono limitate in S).

Le componenti del vettore obiettivo ideale $z^* \in R^k$ sono gli ottimi individuali delle funzioni obiettivo. Questo vettore rappresenta il limite inferiore dell'insieme Pareto ottimale. (Nei problemi non convessi, noi abbiamo bisogno di un global solver per la minimizzazione delle *k* funzioni.)

Si noti che qualche volta vi è la necessità di un vettore strettamente migliore del vettore ideale obiettivo. Questo vettore è chiamato vettore obiettivo utopistico ed denotato da z^{**}.

I limiti inferiori dell'insieme Pareto ottimale, cioè, le componenti del vettore obiettivo nadir z^{nad}, sono molto più difficili da ottenere. Attualmente non vi sono metodi costruttivi per poter calcolare il vettore obiettivo nadir per problemi non lineari. Tuttavia, una stima rozza può essere ottenuta tenendo in mente punti dove ogni funzione obiettivo tenda al suo più basso valore e calcolando i valori degli altri obiettivi. Il più alto valore ottenuto per ogni obiettivo può essere selezionato come componente estimativo di z^{nad}.

Spesso si assume che il decisore faccia le sue scelte in base a una sottostante funzione a valori reali $U : R^k \to R$ che rappresentanti le sue preferenze tra i vettori obiettivo. Sebbene le funzione a valori realis sono raramente esplicitamente conosciute, esse sono importanti nello sviluppo di metodi di soluzione e come background teorico. Di conseguenza, spesso si presume la funzione a valori reali sia implicitamente conosciuta.

La funzione a valori reali è generalmente assunta essere fortemente decrescente. In altre parole, le preferenze del decisore sono assunte essere crescenti se il valore di una delle funzioni obiettivo decresce mentre allo stesso tempo tutte le altre rimangono invariate. In breve, si può dire che *less is preferred to more*. In questo caso, la soluzione massimale di *U* è assunta essere Pareto ottimale. Si noti che a prescindere dall'esistenza di una *funzione a valori reali*, spesso nei metodi interattivi di ottimizzazione multi obiettivo si dovrà assumere (per comodità) che valori più bassi della funzione obiettivo siano preferiti a valori più alti, cioè, il meno è preferito al più dal decisore.

Un'alternativa all'idea di massimizzare qualche *funzione a valori reali* è il *satisficing decision making*. In questo approccio il decisore prova a conseguire determinate aspirazioni. Se tali aspirazioni vengono raggiunte, la soluzione è chiamata *satisficing solution*.

1.2 CLASSIFICAZIONE DEI METODI INTERATTIVI

Un'ampia varietà di metodi è stata sviluppata per risolvere problemi di ottimizzazione multi obiettivo. Si può dire che nessuno di questi è generalmente superiore a tutti gli altri. Come menzionato prima, si applica una classificazione dei metodi in quattro classi secondo la partecipazione del decisore nel processo risolutivo; qui si discutono i metodi interattivi.

I metodi interattivi si dividono in *ad hoc* e *non ad hoc* (basati su funzione a valori realis).

Anche se si è preso coscienza della funzione a valori reali del decisore, non si dovrebbe sapere esattamente come rispondere alle domande poste da un algoritmo *ad hoc*. Dall'atro lato, negli algoritmi non *ad hoc*, le risposte possono essere determinate o almeno confidenzialmente simulate sulla base della funzione a valori reali.

Nei metodi interattivi, un modello di soluzione è (*solution pattern*) posto in essere e ripetuto parecchie volte. Dopo ogni interazione, una qualche informazione è data al decisore che è chiamato a rispondere a qualche domanda o a fornire qualche altro tipo di informazione. In questo modo solo parte dei punti Pareto ottimali vengono generati e valutati, mentre il decisore, venendo ad avere una maggiore conoscenza del problema, può specificare e correggere le sue preferenze e le sue scelte durante il processo di selezione. Quindi il decisore in questo caso non ha da conoscere la struttura globale delle sue preferenze.

Nei metodi interattivi ci sono tre principali criteri di *stopping*. Nella migliore situazione, il decisore trova immediatamente una soluzione desiderabile e vuole fermarsi. Alternativamente, il decisore si annoia e si ferma o come in alcuni algoritmi gli viene fornita una regola. Nell'ultimo caso menzionato, si deve verificare che il decisore gradisce lo stop.

2. ALCUNI MODELLI INTERATTIVI PER LA SOLUZIONE DI PROBLEMI MULTIOBIETTIVO NONLINEARI

2.1 INTERACTIVE SURROGATE WORTH TRADE-OFF METHOD

L'Interactive Surrogate Worth Trade-Off (ISWT) Method (Chankong, Haimes 1978, 1983**)** risolve il problema mediante il metodo $\varepsilon - constraint$ dove una delle funzioni obiettivo viene minimizzata soggetta a limiti superiori su tutti gli altri obiettivi:

$min \quad f_l(\mathbf{x})$

$$sottoposta\ a\ f_j(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_j \text{ per ogni } j = 1, \dots, k, \quad j \neq l, \quad (\therefore)$$

dove $l \in \{1, \dots, k\}$ e ε_j sono i limiti superiori per gli altri obiettivi.

La soluzione di $(\therefore)$ è debolmente Pareto ottimale. Il punto $\mathbf{x}^* \in S$ è Pareto ottimale se e solo se ciò risolve $(\therefore)$ per ogni $l = 1, \dots, k$, dove $\varepsilon_j = f_j(\mathbf{x}^*)$ per $j = 1, \dots, k, \ j \neq l$. Un'unica soluzione è Pareto ottimale per ogni limite superiore.

L'idea del metodo ISWT è di massimizzare un'approssimazione di una sottostante funzione a valori reali. Una direzione di ricerca è determinata basata sull'opinione del decisore concernente i tassi di trade-off relativi alla soluzione corrente. Si assume che la sottostante funzione a valori reali esista e che sia implicitamente nota al decisore. In aggiunta, deve essere differenziabile con continuità e fortemente decrescente. Inoltre, la funzione obiettivo e i vincoli funzionali devono essere differenziabili di ordine due e la regione ammissibile deve essere compatta. Infine, si assume che la condizione Pareto ottimale delle soluzioni del problema $\varepsilon - constraint$ sia garantita e che l'informazione sul tasso di trade-off è disponibile nei moltiplicatori Karush-Kuhn-Tuker (KKT) collegati al problema $\varepsilon - constraint$.

Le variazioni nei valori delle funzione obiettivo tra una reference function f_l e tutti gli altri obiettivi vengono comparati. Sia dato un vettore obiettivo $\boldsymbol{z}^h$, se il valore di f_l è decrescente rispetto alle λ_i^h unità, allora il valore di f_i è decrescente su una unità (o viceversa) rimanendo gli altri valori obiettivo inalterati. Per ogni $i = 1, \dots, k, \quad i \neq l,$ il decisore deve rispondere alle seguente questione: "quanto è desiderabile questo trade-off?"

La risposta del decisore indicante il grado di preferenza è chiamata Surrogate Worth Value. In concreto, si tratta di un valore intero positivo o negativo.

Il gradiente della funzione a valori reali sottostante è allora stimato con l'aiuto dei valori Surrogate Worth. Il Surrogate Worth da una direzione di ricerca con più step di ascesa per la funzione a valori reali.

Parecchi steps di ricerca vengono posti in essere nella direzione di ricerca e il decisore deve selezionare le più soddisfacente fra quelle. In pratica, i limiti superiori del problema $\varepsilon - constraint$ sono revisionati sulla base dei valori Surrogate Worth con differente step-sizes.

Le principali caratteristiche del metodo ISWT possono essere presentate in quattro steps.

1 Si selezioni la f_l da minimizzare e si dia un limite superiore alle altre funzioni obiettivo. Sia $h = 1$.

2 Si risolva la $(\because)$ per ottenere una soluzione $\mathbf{z}^h$. L'information sul tasso di trade-off è ottenuta dai multipli *KKT*.

3 Si chieda al decisore per i surrogate worth values in $\mathbf{z}^h$.

4 Se qualche stopping criterio è soddisfatto, ci si ferma. Altrimenti, si ritorni ai limiti superiori con l'aiuto delle risposte ottenute nello step 3 e risolvendo i differenti problemi $\varepsilon - constraint$. Il decisore sceglie l'alternativa $\mathbf{z}^{h+1}$ maggiormente preferita e si predispone $h = h + 1$. Si vada al passo 3.

2.2 GEOFFRION-DYER-FEINBERG METHOD

Nel Geoffrion-Dyer-Feinberg Method (Geoffrion, Dyer, Feinberg 1972) l'idea base è collegata a quella del metodo ISWT. In entrambi i metodi, la sottostante (sconosciuta implicita) funzione a valori reali è approssimata e minimizzata. Nel GDF l'approssimazione è basata sui tassi marginali di sostituzione.

Si assume che esista una funzione a valori reali sottostante, che sia implicitamente nota al decisore e strettamente decrescente rispetto alla reference function f_l. In aggiunta, la corrispondente funzione a valori reali rispetto alle variabili decisionali deve essere continuamente differenziabile e concava su S. Inoltre, la funzioni obiettivo devono essere continuamente differenziabili e la regione ammissibile deve essere compatta e convessa.

Sia $\boldsymbol{x}^h$ la soluzione corrente. Noi possiamo ottenere una *local linear approximation* per il gradiente della funzione a valori reali con l'aiuto dei tassi marginali di sostituzione m_i^h che implicano una reference function f_l e le altre funzioni f_i. Basandosi su questa informazione noi risolviamo il problema

$$\begin{array}{ll} min & \left(\sum_{i=1}^{k} -m_i^h \nabla_x f_i(\boldsymbol{x}^h)\right)^T \boldsymbol{y} \\ sottoposta\ a & \mathbf{y} \in S, \end{array} \qquad \text{(xx)}$$

dove $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ è la variabile decisionale. Denotiamo con $\boldsymbol{y}^h$ la soluzione del problema, mentre denotiamo con $\boldsymbol{d}^h = \boldsymbol{y}^h - \boldsymbol{x}^h$ la direzione di ricerca. Il problema si sostanzia nel trovare una soluzione *step-size* del problema. Dei vettori obiettivo possono essere offerti al decisore e differenti *step-sizes* vengono apportati nella search direction a partire dalla soluzione corrente. Sfortunatamente queste alternative non sono necessariamente Pareto ottimali.

Si può ora presentare l'algoritmo di questo metodo.

1 Si chieda al decisore di selezionare f_l. Sia $h = 1$.

2 Si chieda al decisore di specificare i tassi marginali di sostituzione tra f_l e gli altri obiettivi e con riferimento alla corrente soluzione $\boldsymbol{z}^h$.

3 Si risolva la (*xx*). Si setti la direction search $\boldsymbol{d}^h$. Se $\boldsymbol{d}^h$=**0**, ci si ferma.

4 Si determini con l'aiuto del decisore l'appropriato step-size t^h da compiere nella direzione d^h. Si denoti la corrispondente soluzione con $\boldsymbol{z}^{h+1} = \mathbf{f}(\boldsymbol{x}^h + \boldsymbol{t}^h \boldsymbol{d}^h)$.

5 Sia $h = h + 1$. Se il decisore vuole continuare, si vada allo step 2 altrimenti ci si fermi.

2.3 METODOLOGIA TCHEBYCHEFF

Questo metodo è conosciuto anche con il nome di *interactive weighted Tchebycheff procedure* (Steuer 1986).

L'idea in questo *weighting space reduction method* è di sviluppare una sequenza di sottoinsiemi Pareto ottimali progressivamente più piccoli fino a quello laddove è collocata la soluzione finale.

Questo metodo non ha troppe assunzioni. Tutto ciò che si assume è che le funzioni obiettivo siano collocate e delimitate in *S*. Si inizi con lo stabilire un (*global*) *utopian objective vector* z^{**}. La distanza fra l'*utopian objective vector* e un vettore obiettivo della regione ammissibile si determina risolvendo il seguente problema

$$\begin{array}{ll} lex\ min & \max_{i=1,\dots k} \left[w_i^h (f_i(x) - z_i^{**})\right],\ \sum_{i=1}^k (f_i(x) - z_i^{**}) \\ soggetto\ a & x \in S. \end{array} \qquad (zx)$$

La notazione sopra significa che se il problema min-max non ha un'unica soluzione, il termine somma è minimizzato in base ai punti ottenuti.

Nel Tchebycheff method, differenti soluzioni Pareto ottimali vengono generate alterando il weighting vector w^h. In ogni interazione h, lo spazio del weighting vector $W^h = \left\{w^h \in R^k \mid l_i^h < w_i^h < u_i^h,\ \sum_{i=1}^k w_i^h = 1\right\}$ è ridotto a $W^{h+1} \subset W^h$.

In una interazione viene generato un campione di soluzioni Pareto ottimali andando a risolvere la (zx) con weighting verctors alquanto dispersi su $W = W^1$ (con $l_i^1 = 0$ e $u_i^1 = 1$). Lo spazio W^h è ridotto stringendo il limite superiore e inferiore per i pesi.

Sia z^h il vettore obiettivo che il decisore sceglie dal campione per l'interazione h e sia w^h il corrispondente weighting vector nel problema. Qualora viene generato un gruppo concentrato di weighting attorno a w^h ne deriva che viene ottenuto un campione di soluzioni Pareto ottimali centrato attorno a z^h.

A questo punto si possono presentare i passi dell'algoritmo Tchebycheff.

1. Si setti il size *P* e un' approssimazione per il numero di interazioni *H*. Si ponga $l_i^1 = 0$ e $u_i^1 = 1$ per ogni $i = 1, \dots, k$. Si costruisca z^{**}. Si setti $h = 1$.

2. Si formi il weighting vector space W^h e si generi $2P$ dispersi weighting vectors $w^h \in W^h$.

3. Si risolva la (zx) per ognuno dei *2P* weighting vectors.

4. Si presenti al decisore il P più differente dei vettori obiettivo risultanti e lo si lasci scegliere fra quelli il vettore preferito.

5. Se $h = H$,stop.

6. Altrimenti di riduca W^h a W^{h+1}, si setti $h = h + 1$ e si vada allo step 2.

2.4 REFERENCE POINT METHOD

Il reference Point Method (Wierzbicki 1980, 1986a, 1986b) è basato su vettori formati da livelli di aspirazione ragionevoli o desiderabili. Questi punti di referenza sono usati per derivare funzioni scalarizzabili aventi soluzioni di minimo in punti *weakly*, *properly* o *Pareto* ottimali.

In questo metodo non vengono poste in essere specifiche assunzioni. L'idea è di indirizzare la ricerca a cambiare il *reference point* $\bar{z}^h$ allo scopo di soddisfare il decisore piuttosto che ottimizzare una funzione valore. E' importante che i *reference points* siano intuitivi e facili da specificare per il decisore mentre la loro consistenza non è un elemento essenziale.

Si noti che specificare un reference point può essere considerato un modo per classificare le funzioni obiettivo. Se l'*aspiration level* è inferiore rispetto al valore corrente della funzione obiettivo, quell' *obiective function* può essere considerato correntemente inaccettabile mentre al contrario se l'*aspiration level* è uguale o più elevato rispetto al valore corrente della funzione obiettivo quell'*obiective function* può essere considerato accettabile. Naturalmente il trading off è inaccettabile nel passare da una soluzione Pareto ottimale a un'altra che non lo è; allo stesso tempo differenti soluzioni possono essere ottenute con differenti approcci.

Le *funzioni scalarizzabili* usate nel *reference point method* sono le cosiddette *achievement* (*scalarizing*) *functions* e il metodo è rilevante per le sue proprietà. Noi possiamo definire le cosiddette *order-representing* e *order-approximating* *achievement functions*. Un esempio di problema con *order-representing achievement function* è

$$\begin{array}{ll} \min & \max\limits_{i=1,\dots,k} \; [w_i(f_i(\mathbf{x}) - \bar{z}^h{}_i)] \quad (\#+) \\ \text{sottoposta a} & \mathbf{x} \in S, \end{array}$$

dove $\boldsymbol{w}$ è un qualche fissato vettore di pesi positivi. Un esempio di problema con *order-representing approximating function* è

$$\begin{array}{ll} \min & \max\limits_{i=1,\dots,k} \; [w_i(f_i(\mathbf{x}) - \bar{z}^h{}_i)] + \rho \sum_{i=1}^{k} w_i(f_i(\mathbf{x}) - \bar{z}^h{}_i) \quad (\# + +) \\ \text{sottoposta a} & \mathbf{x} \in S, \end{array}$$

con $\boldsymbol{w}$ come sopra e $\rho > 0$.

Se l'achievement function è order-representing, allora la sua soluzione è *debolmente Pareto ottimale*. Se la function è order-approximating, allora la sua soluzione è Pareto ottimal ed è *propriamente Pareto ottimal* se la funzione è anche fortemente crescente. Una soluzione debolmente Pareto ottimale può essere trovata se l'achievement function è order- representing. Infine, si può trovare una qualche soluzione propriamente Pareto ottimale se la funzione è order-approximating.

Il reference point tecnico di Wierzbicki è molto semplice. Prima che il processo risolutivo inizi, una qualche informazione viene fornita al decisore circa il problema. Possibilmente, vengono presentati il vettore obiettivo ideale e l'(approximated) nadir obiettivo. Un'altra possibilità è di minimizzare e massimizzare le funzioni obiettivo individualmente nella regione ammissibile (se è limitata).

I passi base sono i seguenti:

1) si selezioni l'achievement function. Si presenti al decisore l'informazione con riferimento al problema. Si setta $h = 1$.

2) si chieda al decisore di specificare il reference point $\bar{z}^h \in R^k$.

3) si minimizzi l'achievement function e si ottenga una soluzione (debolmente, propriamente o) Pareto ottimale z^h. Si presenti questo al decisore.

4) si calcoli un numero *k* di altre soluzioni (debolmente, propriamente) Pareto ottimali z^h con "*pertubated reference point* $\bar{z}(i) = \bar{z}^h + d^h e^i$, dove $d^h = \|\bar{z}^h - z^h\|$ e e^i è lo iesimo vettore unità per $i = 1, \dots, k$.

5) si presentino le alternative al decisore. Se egli trova una delle $k + 1$ soluzioni soddisfacenti, ci si fermi. Altrimenti si chieda decisore di specificare un nuovo reference point $\bar{z}^{h+1}$. Si setti $h = h + 1$ e si va al passo 3.

L'obiettivo di perturbare il reference point al passo 4 è di dare al decisore una migliore concezione delle possibili soluzioni attorno alla corrente soluzione. Se il reference point è lontano dall'insieme Pareto ottimale, il decisore ottiene una più ampia descrizione dell'insieme Pareto ottimale e se il reference point è vicino all'insieme Pareto ottimale viene fornita una più fine descrizione dell'insieme Pareto ottimale.

In questo metodo, il decisore può specificare livelli di aspirazioni e comparare i vettori obiettivo. Il decisore è libero di cambiare il suo parere durante il processo e può indirizzare il processo risolutivo senza essere forzato a capire concetti complicati e il loro significato. Dall'altro lato, il metodo non necessariamente aiuta il decisore a trovare soluzioni migliorative.

2.5 GUESS METHOD

Il GUESS method (Burchanam 1997) è anche chiamato *naïve method*. Il metodo è collegato al reference point method.

Si assume che i vettori globali z^* e z^{nad} siano disponibili. La struttura del metodo è veramente semplice: il decisore specifica un reference point (o un guess) $\bar{z}^h$ e un soluzione viene generata. Dopodiché il decisore specifica un nuovo reference point e così via.

In generale, l'idea è di massimizzare la minima *weighted deviation* sul vettore nadir objective.

Il problema da risolvere è

$$\begin{array}{ll} max & \min_{i=1,\dots,k} \left[\frac{z_i^{nad} - f_i(\boldsymbol{x})}{z_i^{nad} - \bar{z}_i^h} \right] \qquad (\# *) \\ soggetta\ a & x \in S. \end{array}$$

Si noti che i livelli di aspirazioni devono essere di valore strettamente meno elevato rispetto alle componenti del vettore nadir objective.

La soluzione della $(\# *)$ è weakly Pareto ottimale e qualche soluzione Pareto ottimale può essere trovata.

Il GUESS method ha cinque passi base.

1.Si calcolino z^* e z^{nad} e si presentino al decisore. Si setti $h = 1$.

2.Si lasci che il decisore specifichi i limiti superiori o inferiori per le funzioni obiettivo, se lo desideri. Si aggiorni il problema, se necessario.

3.Si chieda al decisore di specificare un reference point $\bar{z}^h$ tra z^* e z^{nad}.

4.Si risolva $(\# *)$ e si presenti la soluzione per il decisore.

5.Se il decisore è soddisfatto, stop. In caso contrario, si imposti $h = h + 1$ e si passi al punto 2.

Nel passo 2, limite superiore o inferiore significa aggiungere vincoli al problema $(\# *)$ ma gli ideal o i nadir objective vectors non sono interessati. La regola di arresto è solo la soddisfazione del decisore. Non vengono forniti orientamenti al decisore nella definizione di nuovi livelli di aspirazione. Questo è tipico di molti reference point-based method.

Il GUESS method è semplice da usare e non necessita di coerenza.

L'unica informazione che deve essere obbligatoriamente fornita dal decisore è un reference point e possibili limiti superiori e inferiori. Si noti che inappropriati limiti inferiori possono condurre a soluzioni che non sono debolmente Pareto ottimali. Sfortunatamente, il metodo GUESS dipende fortemente dalla disponibilità del vettore obiettivo nadir, che di solito è solo una stima. Il GUESS method è un metodo ad hoc. Il metodo è stato confrontato con diversi altri metodi interattivi ed ha un'ottima applicabilità.

2.6 SATISFICING TRADE-OFF METHOD

Il Satisficing Trade-Off Method (Nakayama 1984, 1995) utilizza la classificazione e i reference points. Come il suo nome suggerisce, STOM si basa sul soddisfare il decision marking. Al decisore viene chiesto di classificare le funzioni obiettivo nella corrente soluzione $z^h = f(x^h)$ in tre classi: funzioni obiettivo inaccettabili i cui valori devono essere migliorati $(I^<)$, funzioni obbiettivo accettabili i cui valori possono essere aumentati $(I^>)$ e funzioni obiettivo accettabili i cui valori sono accettabili così come sono $(I^=)$. Il decisore deve solo specificare i livelli di aspirazione per le funzioni in $(I^<)$. I livelli di aspirazione (cioè i limiti superiori) per le funzioni in $(I^>)$ possono essere derivati utilizzando i cosiddetti trade-off. In aggiunta, le aspirazioni di livello per le funzioni in $(I^=)$ sono uguali a $f_i(\boldsymbol{x}^h)$. Tutti i tre tipi di livelli di aspirazione formano un reference point $\bar{\boldsymbol{z}}^h$.

Diverse scalarizing functions possono essere utilizzate in STOM. Un' alternativa è risolvere il problema

$$\min \quad \max_{i=1,\dots,k} \left[\frac{f_i(x) - z_i^{**}}{\bar{z}_i^h - z_i^{**}} \right] \qquad (***)$$

$$sottoposta\ a \qquad x \in S,$$

dove il reference point deve essere strettamente peggiore del vettore obiettivo utopico.

La soluzione della $(***)$ è debolmente Pareto ottimale e alcune soluzioni Pareto ottimali possono essere trovate.

Se le soluzioni debolmente Pareto ottimale sono da evitare, il problema da risolvere è

$$\min \quad \max_{i=1,\dots,k} \left[\frac{f_i(x) - z_i^{**}}{\bar{z}_i^h - z_i^{**}} \right] + \rho \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i(x)}{\bar{z}_i^h - z_i^{**}} \qquad (***+)$$

$$sottoposta\ a \qquad x \in S,$$

dove $\rho > 0$ è un qualche scalare sufficientemente piccolo.

La soluzione di $(***+)$ è propriamente Pareto ottimale e alcune soluzioni properly Pareto ottimali possono essere trovate.

Qui il vettore obiettivo utopico deve essere globalmente conosciuto. Tuttavia se una qualche funzione obiettivo f_j non è limitata dal basso in S, allora un qualche piccolo valore scalare può essere utilizzato come z_j^{**}.

Assumendo tutte le funzioni coinvolte come differenziabili le scalarizing functions possono essere scritte in una forma differenziabile introducendo una variabile scalare α da ottimizzare e settando ciò come limite superiore per ogni funzione nel suo max-term.

Sotto certe assunzioni, la trade-off rate information può essere ottenuta dai moltiplicatori KKT connessi alla soluzione di questa formula. Nell' automatic trade-off, i limiti superiori per le funzioni in $I^{>}$ sono derivati con l'aiuto di questa trade-off information.

Andiamo a descrivere l'algoritmo.

1. Si selezioni la funzione scalarizzabile. Si calcoli z^{**}. Si ponga $h = 1$.

2. Si chieda al decisore di specificare un reference point $\bar{\mathbf{z}}^h \in \boldsymbol{R}^k$ tale che $\bar{z}_i^h > \bar{z}_i^{**}$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

3. Si minimizzi la funzione scalarizzabile usata. Si denoti la soluzione con $\mathbf{z}^h$.Si presenti questa al decisore,

4. Si chieda al decisore di classificare le funzioni obiettivo. Se $I^{<} = \emptyset$, stop. Altrimenti, si chieda al decisore di specificare nuovi aspiration levels $\bar{z}_i^{h+1}$ per I $\in I^{<}$. Si ponga $\bar{z}_i^{h+1} = \bar{z}_i^h$ per $i \in I^{=}$.

5. Si usi l'*automatic trade-off* per ottenere nuovi livelli (upper bounds) $\bar{z}_i^{h+1}$ per le funzioni in $I^{>}$. Si ponga $h = h + 1$ e si torni allo step 3.

2.7 REFERENCE DIRECTION APPROACH

Il reference direction approach (Korhonen, Laakso 1986, Korhonen 1997) è anche conosciuto come *visual interactive approach*. Questo contiene per esempio, l'idea del GDF method e del reference point method di Wierzbicki. Tuttavia, qui una maggior informazione viene ad essere fornita a decisore.

Nel reference point based method, un reference point è generato all'interno dell'insieme Pareto ottimale da un'*achievement function*. In tutto questo una cosiddetta reference direction viene predisposta all'interno dell'insieme Pareto ottimale. Questo è un vettore orientato dal corrente punto di iterazione $\mathbf{z}^h$ al reference point $\bar{\mathbf{z}}^h$. Nella pratica, steps di differenti dimensioni vengono portati lungo le differenti direzioni e posti in essere. L'idea è di configurare i valori della funzione obiettivo sul monitor di un computer come *value paths*. Il decisore può spostare il cursore dietro e avanti e vedere i corrispondenti valori numerici in ogni punto.

I punti lungo le reference direction sono generati risolvendo il problema

$$\begin{array}{ll} \min & \max\limits_{i \in I} \left[\dfrac{f_i(\boldsymbol{x}) - \bar{z}_i^h}{w_i} \right] \\ \text{soggetta a} & \bar{\boldsymbol{z}}^h = \boldsymbol{z}^h + t\boldsymbol{d}^{h+1}, \\ & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}, \end{array} \qquad (* + *)$$

dove $I = \{i | w_i > 0\} \subset \{1, \dots, k\}$ e t ha differenti non valori negativi. Il weighting vector w può essere, per esempio, il reference point specificato dal decisore.

La soluzione di $(* + *)$ è *debolmente Pareto ottimale.*

Di seguito si descrive l'algoritmo.

1. Si trovi un vettore obiettivo arbitrario z^1. Ponendo $h = 1$.
2. Si chieda al decisore di specificare un reference point $\bar{z}^h \in R^k$ e si setti $d^{h+1} = \bar{z}^h - z^h$
3. Si trovi l'insieme Z^{h+1} di soluzioni debolmente Pareto ottimali con differenti valori di t nella $(* + *)$.
4. Si chieda al decisore di selezionare la z^{h+1} maggiormente preferita in Z^{h+1}.
5. Se $z^h \neq z^{h+1}$, si pone $h = h + 1$ e si vada allo step 2. Altrimenti, si verifichino le condizioni ottimali. Se le condizioni ottimali sono soddisfatte, stop. Altrimenti, si ponga $h = h + 1$ e si setti d^{h+1} al fine di identificare la search direction tramite la *optimality checking procedure*. Si vada allo step 3.

Ricercare le condizioni ottimali nello step 5 rappresenta la parte più complicata dell'algoritmo. Finora, non sono state poste in essere specifiche assunzioni sulla funzione a valori reali. Tuttavia si può verificare se z^{h+1} sia ottimale, considerando il fatto che il cono contenente tutte le direzioni ammissibili abbia o meno un numero finito di generatori. Si deve assumere che una sottostante funzione a valori reali esista e sia pseudoconcava su Z. In aggiunta, si assume che S debba essere convesso e compatto e le funzioni vincolo debbano essere differenziabili.

Il ruolo del decisore è simile nel reference point method e nel reference direction approach: specificare i reference points e selezionare l'alternativa maggiormente preferita. Fornendo una similare informazione sui reference point, nel reference direction approach, il decisore può esplorare una più ampia parte dell'insieme debolmente Pareto ottimale. Questa possibilità elimina alla fonte il problema di comparare le alternative.

La performance del modello dipende fortemente dalla qualità di come il decisore specifica le reference directions che conducono alle soluzioni migliorative.

La consistenza delle risposte del decisore non è importante e non è verificata dall'algoritmo.

2.8 REFERENCE DIRECTION METHOD

Il classification-based reference direction (RD) method (Narula, Kirilov, Vassilev 1994a, 1994b) è collegato al reference direction approach. Nel RD method, un vettore obiettivo corrente z^h viene presentato al decisore al quale si chiede di specificare un reference point $\bar{z}^h$ rappresentante i differenti livelli delle funzioni obiettivo.

L'idea è di spostarsi all'interno dell'insieme debolmente Pareto ottimale. Ciò comporta che alcune funzioni obiettivo vengono lasciate aumentare di valore a discapito del valore di alcune altre che invece vengono lasciati decrescere.

Come menzionato prima, specificare un reference point è equivalente a una classificazione implicita che indichi quelle funzioni obiettivo i cui valori dovrebbero decrescere fino a che non arrivino ad alcuni livelli di aspirazione considerati accettabili, quelle di cui i valori sono soddisfacenti nella situazione corrente, e quelle di cui i valori possono essere accresciuti sino a un qualche limite superiore.

Si denotino le tre classi con $I^{<}$, $I^{=}$, $I^{>}$, rispettivamente. Inoltre, noi denotiamo le componenti del reference point corrispondente a $I^{>}$con ε_i^h a causa dei limiti superiori in questione.

Qui, come nel reference direction approach, vengono posti in essere steps nella reference direction $\bar{\mathrm{z}}^{\mathrm{h}} - \mathrm{z}^{\mathrm{h}}$. Tuttavia qui il decisore specifica a priori il numero di steps che devono essere posti in essere. L'idea è di muoversi step by step in base alla volontà del decisore. In questo modo, vengono evitate calcoli supplementari in quanto vengono calcolate solo le alternative che il decisore vuole vedere.

Le alternative sono prodotte risolvendo il seguente problema

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\max_{i\in I^{<}} \left[\frac{f_i(\boldsymbol{x}) - \bar{z}_i^h}{z_i^h - \bar{z}_i^h}\right] & \\
\text{soggetta a} & f_i(\boldsymbol{x}) \leq \varepsilon_i^h + \alpha\left(z_i^h - \varepsilon_i^h\right) \text{ per ogni } i \in I^{>}, & (xzx) \\
& f_i(\boldsymbol{x}) \leq z_i^h \qquad \text{per ogni } i \in I^{=}, & \\
& x \in S, &
\end{array}
$$

dove $0 \leq \alpha < 1$ è lo step size nella reference direction, $\bar{z}_i^h < z_i^h$ per $i \in I^{>}$. La soluzione della (xzx) è weakly Pareto ottimale per ogni $0 \leq \alpha < 1$.

Gli steps dell'algoritmo RD sono i seguenti:

1. Si trovi una starting solution $\mathbf{z}^1$ e si mostri questa al decisore. Si ponga $h = 1$.

2. Se il decisore non vuole decrescere il valore di una qualche componente di $\bar{\mathbf{z}}^h$, stop. Altrimenti, si chieda al decisore di specificare $\bar{\mathbf{z}}^h$, laddove alcune delle sue componenti sono più basse, più alte o eguali comparate a quelle di $\mathbf{z}^h$. Se non ci sono valori più alti, si ponga $P = r = 1$ e si vada allo step 3. Altrimenti si chieda al decisore di specificare il massimo numero di alternative P che egli vuole vedere. Si ponga $r = 1$.

3. Si ponga $\alpha = 1 - r/P$. Si risolva la $(xz)x$ e si ottenga $\mathbf{z}^h(r)$. Si ponga $r = r + 1$.

4. Si mostri $\mathbf{z}^h(r)$ al decisore. Se è sodisfatto, stop. Se $r \leq P$ e il decisore vuole vedere un'altra soluzione, si vada allo step 3. Altrimenti, se $r > P$ o il decisore vuole cambiare il reference point, si ponga $\mathbf{z}^{h+1} = \mathbf{z}^h(r)$, $h = h + 1$ e si vada allo step 2.

3. DOMINANCE-BASED ROUGH SET APPROACH E METODI INTERATTIVI

3.1 INTERACTIVE MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION GUIDED BY DOMINANCE-BASED ROUGH SET APPROACH (IMO-DRSA)

La rappresentazione delle preferenze in termini di regole indotte attraverso la Dominance-based Rough Set Approach (DRSA) può di certo ancor più fruttuosamente esprimersi in una procedura Interactive Multiobjective Optimization (IMO), come proposto in (Greco, Matarazzo e Slowinski 2008).

Come è ormai chiaro una procedura interattiva è composta di due momenti alternativi: la fase computazionale e quella decisionale.

Nella fase computazionale, viene calcolato e proposto al decisore un sottoinsieme di Pareto soluzioni ottimali.

Nella fase decisionale, il decisore analizza con occhio critico le soluzioni proposte discernendo fra queste quelle in linea con le sue preferenze. In ultima istanza, qualora il (DM) identifichi un'alternativa soddisfacente relativamente alle sue preferenze la procedura si arresta.

Altrimenti, l'analisi critica delle soluzioni proposte è usata come informazione sulle preferenze per costruire un modello di preferenze del decisore.

Questo modello è usato per calcolare un nuovo sottoinsieme di soluzioni Pareto ottimali in una nuova fase computazionale, allo scopo di una migliore interpretazione delle preferenze del decisore. In alcune procedure il modello di preferenza emergente tra la fase decisionale e la fase computazionale è implicito, tuttavia; tutto questo è utile quando tale modello decisionale può essere mostrato al decisore per la sua approvazione.

Per questo il modello di preferenze dovrebbe essere comprensibile e il trattamento dell'informazione sulle preferenze tale da condurre al modello dovrebbe essere intellegibile per il decisore. Le regole decisionali indotte per il tramite della DRSA rispondono a entrambi questi requisiti.

La metodologia IMO-DRSA è presentata di seguito.

Noi assumiamo che la procedura interattiva vada a esplorare l'insieme Pareto ottimale di un problema di ottimizzazione multi-obiettivo, tuttavia, tale procedura può riguardare solamente un' approssimazione di tale insieme.

La procedura si compone dei seguenti passi.

- 1. Generare un campione rappresentativo di alternative della frontiera Pareto ottimale.
- 2. Presentare il campione al decisore.

- 3. Se il decisore è soddisfatto di un' alternativa del campione, allora questa è la soluzione di compromesso e la procedura si arresta. Altrimenti continua.
- 4. Si chiede al decisore di indicare un sottoinsieme di alternative “buona” all'interno del campione presentato.
- 5. Si applica la DRSA al campione delle alternative suddivise in “buona” e “altri”, allo scopo di indurre un insieme di regole decisionali caratterizzate dalla seguente sintassi $"se\ f_{i_1}(x) \leq \alpha_{i_1}\ e \dots e\ \ f_{i_p}(x) \leq\ \alpha_{i_p}, allora\ la\ soluzione\ è\ buona",$ $\{i_1, \dots, i_p\} \subseteq \{1, \dots, n\}.$
- 6. Si presenta l'insieme di regole ottenuto al decisore.
- 7. Si chiede al decisore di selezionare la più importante (dal suo punto di vista) regola decisionale dell'insieme.
- 8. Si aggiungono i vincoli $f_{i_1}(x) \leq \alpha_{i_1}, \dots, f_{i_p}(x) \leq \alpha_{i_p}$ tratti dalla regola selezionata al passo 7 come insieme di vincoli imposti sulla frontiera Pareto ottimale, allo scopo di identificare zone della frontiera di Pareto interessanti dal punto di vista delle preferenze del decisore.
- 9. Si torna indietro al passo 1.

La sintassi delle regole scritte al passo 5 corrisponde alla minimizzazione delle funzioni obiettivo.

Nel caso di massimizzazione di funzioni obiettivo f_i, la condizione concernente questo obiettivo nella regola decisionale dovrebbe avere la forma $f_i(x) \geq \alpha_i$.

Rimarchiamo, inoltre che l'insieme Pareto ottimale ristretto nel passo 8 dai vincoli $f_{i_1}(x) \leq \alpha_{i_1}, \dots, f_{i_p}(x) \leq \alpha_{i_p}$ è certamente non vuoto se questi vincoli derivano da una sola regola.

Ricordiamo che noi consideriamo regole robuste (si veda il capitolo 2) e, pertanto i valori $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_p}$ sono valori di funzioni obiettivo di alcune alternative dell'insieme Pareto ottimale.

Se $\{i_1, \dots, i_p\} = \{1, \dots, n\}$, cioè $\{i_1, \dots, i_p\}$ è l'insieme di tutte le funzioni obiettivo, allora la nuova restrizione dell' insieme Pareto ottimale contiene almeno una sola soluzione *x* tale che $f_1(x) = \alpha_1, \dots, f_k(x) = \alpha_k$.

Se $\{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, n\}$, cioè $\{i_1, \dots, i_p\}$è un sottoinsieme adatto a tutte le funzioni obiettivo, allora la nuova restrizione dell' insieme Pareto ottimale contiene alternative contenenti soluzioni soddisfacenti $f_{i_1}(x) \leq \alpha_{i_1}$ e … e $f_{i_p}(x) \leq \alpha_{i_p}$.

Dal fatto che le regole considerate sono robuste, deriva che c'è almeno una soluzione, *x* soddisfi questi vincoli.

Quando l'insieme Pareto ottimale è ristretto al passo 8 da vincoli $f_{i_1}(x) \leq \alpha_{i_1}, \dots, f_{i_p}(x) \leq \alpha_{i_p}$ provenienti da più di una regola, allora è possibile che l'insieme risultante dalla restrizione sia vuoto.

Quindi, prima di passare allo Step9, è necessario verificare se l'insieme Pareto ottimale è non vuoto.

Se l'insieme Pareto ottimale ristretto è vuoto, allora al decisore viene richiesto di rivedere la sua selezione delle regole.

La restrizione dell'insieme Pareto ottimale non può essere considerato irreversibile.

In effetti, il decisore può ritornare all'insieme Pareto ottimale considerato in una delle precedenti interazioni e continuare da questo punto. Questo è nello spirito di una concezione orientata all' apprendimento dell'ottimizzazione interattiva multiobiettivo, in accordo con l'idea che la procedura interattiva multiobiettivo debba permettere al decisore di apprendere con riferimento alle sue preferenze e alla frontiera Pareto ottimale.

3.2 CARATTERISTICHE DELL' IMO-DRSA

La procedura interattiva presentata nella Section 3 può essere analizzata dal punto di vista dell'input e dell'output information. Come input, il decisore fornisce l'informazione sulle preferenze rispondendo a semplici domande legate all'analisi di alcune alternative rappresentative.

Molto spesso, nell'analisi decisionale multicriteriale, in generale, e nell'ambito dell'ottimizzazione interattiva multiobiettivo, in particolare, l'informazione sulle preferenze è fornita in termini di parametri del modello di preferenze, come pesi sull'importanza dei differenti criteri, tassi di sostituzione, e vari altri parametri.

Ottenere una tale informazione richiede un significativo sforzo cognitivo da parte del decisore.

E' generalmente risaputo che le persone spesso preferiscono prendere delle decisioni esemplificative e non possono sempre spiegarle in termini di specifici parametri.

Per questa ragione, l'idea di inferire modelli di preferenza dalle decisioni esemplari fornite dal decisore è molto attrattiva.

Il risultato output dell'analisi è il modello delle preferenze in termini di regole decisionali "*se..., allora..*" che è usato per restringere interattivamente l'insieme Pareto ottimale, fino a quando il decisore seleziona una soluzione soddisfacente.

Un modello di preferenza basato sulle regole decisionali agevola il supporto alla decisione, poiché fornisce argomentazioni per le preferenze in una forma logica e, pertanto, intellegibile per il decisore.

In effetti, tale modello parla il linguaggio del decisore senza ricorrere a termini tecnici, come utilità, tradeoff, scalarizzazioni di funzioni, reference points, ecc...

Inoltre, il decisore può identificare le soluzioni Pareto ottimali che supportano ogni regola decisionale.

Tutto questo fa si che l'IMO-DRSA abbia un feedback trasparente organizzato in una prospettiva orientata al learning, che permetta di considerare questa procedura una "glass box", contrariamente alla "black box" caratteristica di molte procedure che forniscono un risultato finale senza una chiarificazione di tale risultato.

Le regole decisionali forniscono un ben chiaro legame tra fase di calcolo e fase decisionale. A causa di questo tratto, la decisione finale non risulta da una meccanica applicazione di un metodo tecnico certo, ma piuttosto da una matura conclusione di un processo decisionale basato su un intervento attivo del decisore.

Osserviamo, infine, che le regole decisionali sono basate sulle proprietà ordinali delle sole funzioni obiettivo.

A differenza, di alcuni metodi che si basano su alcune scalarizzazioni (quasi tutti i metodi interattivi esistenti), la procedura proposta non aggrega gli obiettivi in un singolo valore in una qualunque delle fasi, evitando operazioni (quali il calcolare medie, somme pesate, differenti tipi di distanza, il porre in essere scalarizzazioni) che sono sempre, da qualche punto, di vista arbitrarie.

In effetti, la procedura opera su dati che usano solo comparazioni ordinali che non dovrebbero essere influenzate da trasformazioni crescenti di scala, e questo contribisce ad assicurare un'elevata comprensibilità e significatività dei risultati della misurabilità della teoria.

Capitolo 4

TEORIA DEI ROUGH SETS E INVENTORY MANAGEMENT

1. IMO-DRSA APPLICATA ALLA GESTIONE DELLA SCORTA DI UN PRODOTTO CON DOMANDA STOCASTICA.

1.1 MODELLO TEORICO

Si considera la politica di controllo delle scorte di un prodotto soggetto a domanda d_t stocastica come in Whitin (1952).

Il processo di domanda è supposto essere indipendente da fattori di trend, quindi, il tasso di domanda $\delta \in \mathcal{R}^+$ costante nell'intervallo di tempo $[b;\ b+t]$, $b, t\ \in \mathcal{R}^+$e la domanda attesa in $[b;\ b+t]$ è $v_t = \delta t$.

Il processo di domanda è modellato usando il processo di Poisson che è adeguato a descrivere la domanda reale e rende i calcoli semplici(vedi Whitin, 1952; Scarf, 1958; Karlin and Scarf, 1958; Finch, 1961). Secondo il processo di Poisson, la probabilità che la domanda d_t è non più grande che $x \in \mathcal{N}$ è data da

$$P(d_t\ \leq \mathrm{x}) = \sum_{d_t=0}^{x} \frac{e^{-v_t} {v_t}^x}{d_t!} \qquad \text{(i).}$$

Di conseguenza la probabilità di una domanda più grande che $x \in \mathcal{N}$ è

$$P(d_t\ \geq \mathrm{x}+1) = \sum_{d_t=x+1}^{+\infty} \frac{e^{-v_t} {v_t}^x}{d_t!} = 1 - P(d_t\ \leq \mathrm{x}) = 1 - \sum_{d_t=0}^{x} \frac{e^{-v_t} {v_t}^x}{d_t!} \qquad \text{(ii).}$$

Il pipeline period τ, cioè l'intervallo di tempo impiegato dal fornitore per soddisfare l'ordine, è supposto essere costante.

Per questioni di semplicità si suppone che, se il prodotto non è disponibile per la domanda corrente, il consumatore non attende, cioè non vi è la possibilità di ordini successivi, con la conseguenza che lo shortage genera una perdita secca nelle vendite.

Whitin propose la minimizzazione della seguente funzione di Costo Totale Variabile (TVC) con rispetto al punto di riordino K e al lotto di riordino Q prendendo in considerazione l'intervallo di tempo $[a;\ a+T]$ $a;T \in \mathcal{R}$:

$$\text{TVC}= C_O \frac{\nu_T}{Q} + C_L \left[\frac{Q}{2} + (K - \nu_\tau)\right] + \pi \frac{\nu_T}{Q} \left[\sum_{d_\tau=K+1}^{+\infty} (d_\tau - K) \frac{e^{-\nu_\tau} \nu_\tau{}^{d_\tau}}{d_\tau!}\right]$$

dove

- C_O è il costo unitario per ordine;
- C_L è il costo unitario di mantenimento;
- π è il costo unitario per la perdita di una vendita;
- $C_O \frac{\nu_T}{Q} + C_L \left[\frac{Q}{2} + (K - \nu_\tau)\right]$ rappresenta il costo totale dell'ordine;
- $C_L \left[\frac{Q}{2} + (K - \nu_\tau)\right]$ rappresenta il costo totale di mantenimento;
- $\pi \frac{\nu_T}{Q} \left[\sum_{d_\tau=K+1}^{+\infty} (d_\tau - K) \frac{e^{-\nu_\tau} \nu_\tau{}^{d_\tau}}{d_\tau!}\right]$ rappresenta il costo totale dello shortage.

A nostro parere, il modello di Within, così come tutti i tradizionali modelli, ha due principali limiti:

- elementi abbastanza differenti come i costi di ordine, di mantenimento, di shortage in generale difficili da stimare sono aggregati in una funzione di costo totale,
- l'incertezza è modellata usando valori attesi, ciò da una rappresentazione troppo sintetica delle quantità stocastiche coinvolte nella decisione: per esempio, altri indici statistici, come la varianza o la curtosi che possono influenzare l'avversione al rischio non sono considerati.

Per fronteggiare questi due aspetti negativi, si propone un approccio di ottimizzazione multi obiettivo al modello di Within. L'idea è di evitare l'uso di costi unitari tenendo conto del numero di ordini, della quantità mantenuta in magazzino, e il rischio di shortage, come differenti obiettivi che devono essere ottimizzati (per la precisione, minimizzati). Per tener conto della stocasticità della domanda, proponiamo di considerare alcuni appropriati quantili di ogni funzione obiettivo poiché essi danno una semplice e intuitiva rappresentazione dell'incertezza.

Sia $\Pi = \{ P^i, i = 1,2, \dots, M \}$ un insieme di alcune misure di probabilità considerate appropriate.

Per ogni $P^i \in \Pi$, $i = 1,2, \dots M$, e per ogni $t \in \mathcal{R}$, $x(P^i, t) \in \mathcal{N}$ è il quantile destro della domanda in un periodo di durata $t \in \mathcal{R}$, cioè $P\left(d_t \geq x(P^i, t)\right) = P^i$. Questo significa che la domanda in un periodo di durata t è almeno $x(P^i, t)$ con probabilità P^i.

Usando l'approccio multi obiettivo, le variabili decisionali sono ancora il lotto di riordino Q e il punto di riordino K.

Consideriamo le seguenti funzioni obiettivo che devono essere minimizzate:

- i quantili destri di ordini nell'intervallo di tempo $[a, a+T]$, che sono attesi con probabilità $P^i \in \Pi$:

$$N(P^i) = \frac{x(P^i, t)}{Q} \qquad i = 1,2, \dots, M; \qquad (1.i)$$

- il rischio di shortage corrispondente alla probabilità che il livello delle scorte non sia abbastanza per soddisfare la domanda

$$P(d_\tau \geq K+1) = \sum_{d_\tau = K+1}^{+\infty} \frac{e^{-v_\tau} {v_\tau}^{d_\tau}}{d_\tau!} = 1 - P(d_\tau \geq K+1) =$$

$$1-\sum_{d_\tau=0}^{K}\frac{e^{-\nu_\tau}\nu_\tau^{\;d_\tau}}{d_\tau!}\quad ;\quad (2)$$

- i quantili destri del massimo livello di stock legati alle probabilità $P^i \in \Pi$:

$$St^{Max}(P^i) = max[Q + K - x(P^i,\tau);0]; \qquad i = 1,2,\dots,M; \qquad (3.i)$$

- i quantili destri del minimo livello di stock legati alle probabilità $P^i \in \Pi$:

$$St^{Min}(P^i) = max[K - x(P^i,\tau);0] \qquad i = 1,2,\dots,M; \qquad (4.i)$$

- i quantili destri di shortage legati alle probabilità $P^i \in \Pi$:

$$Sh(P^i) = max[x(P^i,\tau) - K;0] \qquad i = 1,2,\dots,M; \qquad (5.i)\ .$$

Queste funzioni intercorrelate rappresentano misure dei differenti rischi che un inventory manager affronta e deve minimizzare allo stesso tempo; quindi, applicando l'IMO DRSA le funzioni $(1.i)$, (2), $(3.i)$, $(4.i)$ e $(5.i)$ corrispondono agli attributi condizionali.

Analiticamente l'inventory problem può essere espresso come segue:

$$min \quad N(P^i) = \frac{x(P^i,\tau)}{Q},$$

$$min \quad P(d_\tau \geq K+1) = \sum_{d_\tau=K+1}^{+\infty}\frac{e^{-\nu_\tau}\nu_\tau^{\;d_\tau}}{d_\tau!},$$

$$min \quad St^{Max}(P^i) = max[Q + K - x(P^i,\tau);0],$$

$$min \quad St^{Min}(P^i) = max[K - x(P^i,\tau);0],$$

$$min \quad Sh(P^i) = max[x(P^i,\tau) - K;0],$$

soggette ai vincoli sul range di variazione delle variabili decisionali.

L'applicazione dell' IMO DRSA al problema multi obiettivo visto sopra implica un'interazione con l'inventory manager. Nella fase computazionale, viene generato un insieme di strategie esemplificative e viene presentato al manager. Nella fase decisionale, il manager indica le strategie che all'interno dell' insieme di strategie esemplificative sono relativamente buone. Questa informazione sulle preferenze è sfruttata per indurre un insieme di regole decisionali tramite l'uso della DRSA. Le regole rappresentano le preferenze del manager espresse sottoforma di strategie.

Esse hanno la seguente sintassi

"$Se\ cond_1\ e/o\ cond_2 \ldots\ldots e/o\ cond_z$ *sono soddisfatte, allora la strategia è buona",*

dove $cond_i$, $i = 1, \ldots\ldots, Z$, può essere una o più delle seguenti condizioni $N(P^i) \leq N^*$; $P(d_\tau \geq K+1) \leq P^*$; $St^{Max}(P^i) \leq St^{Max*}$; $St^{Min}(P^i) \leq St^{Min*}$; $Sh(P^i) \leq Sh^*$.

In questa fase, il manager è invitato a selezionare fra queste regole quella che è la più importante per lui, definita regola r. Le condizioni nella regola r definiscono un nuovo insieme di vincoli che devono essere soddisfatti in ordine a prendere una buona decisione:

- le condizioni $N(P^i) \leq N^*$ definiscono vincoli del tipo $Q \leq \frac{x(P^i,\tau)}{N^*}$;
- le condizioni $P(d_\tau \geq K+1) \leq P^*$ definiscono vincoli del tipo $\mathrm{K} \geq \mathrm{K}^*(P^*)$, dove $\mathrm{K}^*(P^*)$, è un valore della funzione inversa $P(d_\tau \geq K^*+1) = P^*$ rispetto alla variabile K;
- le condizioni $St^{Max}(P^i) \leq St^{Max*}$ definiscono vincoli del tipo $Q + K \leq St^{Max*} + x(P^i,\tau)$;
- le condizioni $St^{Min}(P^i) \leq St^{Min*}$ definiscono vincoli del tipo $K \leq \mathrm{St}^{Min*} + x(P^i,\tau)$;
- le condizioni $Sh(P^i) \leq Sh^*$ definiscono vincoli del tipo $K \geq x(P^i,\tau) - Sh^*$.

Quindi le condizioni di una regola selezionata r sono convertite in corrispondenti vincoli da considerare nel successivo stadio computazionali allo scopo della generazione di un nuovo insieme di strategie.

1.2 ESEMPIO DIDATTICO

In questo paragrafo, presentiamo un esempio didattico illustrante la nostra metodologia.

Supponiamo una domanda attesa di 90 unità nell'orizzonte temporale di 90 giorni, quindi poniamo $T = 90$. Inoltre, supponiamo un pipeline time τ di 15 giorni e, conseguentemente, una corrispondente domanda attesa di 15 unità in τ.

Consideriamo il seguente insieme di appropriate misure di probabilità $\Pi = \{0{,}01;\ 0{,}25;\ 0{,}50;\ 0{,}75;\ 0{,}99\}$ e il corrispondente insieme di appropriati quantili destri di domanda $x(P^i, \tau) \in \mathcal{R}$, $\mathrm{P}^i \in \Pi$.

Poichè supponiamo che l'user è avverso al rischio, per ogni funzione obiettivo selezioniamo un appropriato sottoinsieme di Π tenendo conto delle situazioni più critiche, cioè le probabilità correlate ai peggiori risultati per la funzione obiettivo considerata. Conseguentemente, selezioniamo

- $\Pi_1 = \{\ 0{,}01;\ 0{,}25;\ 0{,}50\ \}$ per $N(P^i)$,
- $\Pi_2 = \{\ 0{,}75;\ 0{,}99\}$ per $St^{Max}(P^i)$ e per $St^{Min}(P^i)$,
- $\Pi_3\ = \{\ 0{,}01;\ 0{,}25\ \}$ per $Sh(P^i)$.

Analiticamente, il problema può essere espresso come segue:

$$min \quad N(0.50) = \frac{x(0{,}50;90)}{Q};$$

$$min \quad N(0{,}25) = \frac{x(0{,}25;90)}{Q};$$

$$min \quad N(0.01) = \frac{x(0{,}01;90)}{Q};$$

$$min \quad P(d_\tau\ \geq\ K+1);$$

$$min \quad St^{Max}(0{,}99) = max[Q + K - x(0{,}99;15);0];$$

$$min \quad St^{Max}(0{,}75) = max[Q + K - x(0{,}75;15);0];$$

$$min \quad St^{Min}(0{,}99) = max[K - x(0{,}99;15);0];$$

$$min \quad St^{Min}(0{,}75) = max[K - x(0{,}75;15);0];$$

$$min \quad Sh(0{,}25) = max[x(0{,}25;15) - K\ ;0];$$

$$min \quad Sh(0{,}01) = max[x(0{,}01;15) - K\ ;0]$$

soggetto ai vincoli sul range di variazione delle variabili decisionali.

Nella prima interazione, nell'ambito della fase computazionale, la procedura coinvolge il decisore nella definizione di un campione di strategie presentato nella Tavola 11. Per esempio, il decisore può scegliere in tale fase di minimizzare $N(0.50)$ (il quantile destro del numero di ordini attesi legati alla probabilità dello 0,50) soggette ai vincoli $St^{Max}(0{,}99) \leq 16{,}00$ (la scorta massima legata alla probabilità dello 0,99 è non più elevata di 16,00), $St^{Min}(0{,}99) \leq 9{,}00$ (la scorta minima legata alla probabilità dello 0,99 è non più elevata di 9,00) e $Sh(0{,}25) \leq 2{,}00$ (lo shortage legato alla probabilità dello 0,25 è non più elevato di 2,00). La soluzione di questo problema di gestione delle scorte mono obiettivo $(min \quad N(0.50))$ con il lotto di riordino Q e il punto di riordino K come variabili decisionali è mostrata come strategia $a1$ nella tavola 11. La stessa procedura, cambiando di volta in volta la funzione da minimizzare rispetto a differenti vincoli, è stata applicata in fase computazionale per ciascun alternativa di ogni interazione dell’ottimizzazione interattiva multi obiettivo proposta.

L’insieme di strategie di gestione delle scorte presentato in Tavola 11 è considerato rappresentativo di tutto l'insieme di strategie Pareto ottimali. Il manager valuta tali strategie e indica quelle che sono relativamente buone. Questa informazione è mostrata nella Tavola 12.

Tavola 11

alternative	Q	K	N(0.50)	N(0.25)	N(0.01)	P(d>k)	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Max}(0.75)$	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Min}(0.75)$	Sh(0.25)	Sh(0.01)
a1	7.00	16.00	12.86	13.71	16.14	33.59%	16.00	11.00	9.00	4.00	2.00	9.00
a2	11.00	23.00	8.18	8.73	10.27	1.95%	27.00	22.00	16.00	11.00	0.00	2.00
a3	27.00	20.00	3.33	3.56	4.19	8.30%	40.00	35.00	13.00	8.00	0.00	5.00
a4	15.00	14.00	6.00	6.40	7.53	53.43%	22.00	17.00	7.00	2.00	4.00	11.00
a5	20.00	12.00	4.50	4.80	5.65	73.24%	25.00	20.00	5.00	0.00	6.00	13.00
a6	18.00	14.00	5.00	5.33	6.28	53.43%	25.00	20.00	7.00	2.00	4.00	11.00
a7	33.00	16.00	2.73	2.91	3.42	33.59%	42.00	37.00	9.00	4.00	2.00	9.00
a8	11.00	29.00	8.18	8.73	10.27	0.04%	33.00	28.00	22.00	17.00	0.00	0.00
a9	18.00	16.00	5.00	5.33	6.28	33.59%	27.00	22.00	9.00	4.00	2.00	9.00
a10	14.00	24.00	6.43	6.86	8.07	1.12%	31.00	26.00	17.00	12.00	0.00	1.00
a11	21.00	10.00	4.29	4.57	5.38	88.15%	24.00	19.00	3.00	0.00	8.00	15.00
a12	22.00	10.00	4.09	4.36	5.14	88.15%	25.00	20.00	3.00	0.00	8.00	15.00
a13	30.00	9.00	3.00	3.20	3.77	93.01%	32.00	27.00	2.00	0.00	9.00	16.00
a14	15.00	15.00	6.00	6.40	7.53	43.19%	23.00	18.00	8.00	3.00	3.00	10.00
a15	39.00	13.00	2.31	2.46	2.90	63.68%	45.00	40.00	6.00	1.00	5.00	12.00
a16	29.00	6.00	3.10	3.31	3.90	99.24%	28.00	23.00	0.00	0.00	12.00	19.00

Tavola 12

alternative	Q	K	N(0.50)	N(0.25)	N(0.01)	P(d>k)	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Max}(0.75)$	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Min}(0.75)$	Sh(0.25)	Sh(0.01)	Valutazione complessiva
a1	7.00	16.00	12.86	13.71	16.14	33.59%	16.00	11.00	9.00	4.00	2.00	9.00	buona
a2	11.00	23.00	8.18	8.73	10.27	1.95%	27.00	22.00	16.00	11.00	0.00	2.00	
a3	27.00	20.00	3.33	3.56	4.19	8.30%	40.00	35.00	13.00	8.00	0.00	5.00	
a4	15.00	14.00	6.00	6.40	7.53	53.43%	22.00	17.00	7.00	2.00	4.00	11.00	buona
a5	20.00	12.00	4.50	4.80	5.65	73.24%	25.00	20.00	5.00	0.00	6.00	13.00	buona
a6	18.00	14.00	5.00	5.33	6.28	53.43%	25.00	20.00	7.00	2.00	4.00	11.00	
a7	33.00	16.00	2.73	2.91	3.42	33.59%	42.00	37.00	9.00	4.00	2.00	9.00	buona
a8	11.00	29.00	8.18	8.73	10.27	0.04%	33.00	28.00	22.00	17.00	0.00	0.00	
a9	18.00	16.00	5.00	5.33	6.28	33.59%	27.00	22.00	9.00	4.00	2.00	9.00	buona
a10	14.00	24.00	6.43	6.86	8.07	1.12%	31.00	26.00	17.00	12.00	0.00	1.00	
a11	21.00	10.00	4.29	4.57	5.38	88.15%	24.00	19.00	3.00	0.00	8.00	15.00	buona
a12	22.00	10.00	4.09	4.36	5.14	88.15%	25.00	20.00	3.00	0.00	8.00	15.00	
a13	30.00	9.00	3.00	3.20	3.77	93.01%	32.00	27.00	2.00	0.00	9.00	16.00	
a14	15.00	15.00	6.00	6.40	7.53	43.19%	23.00	18.00	8.00	3.00	3.00	10.00	buona
a15	39.00	13.00	2.31	2.46	2.90	63.68%	45.00	40.00	6.00	1.00	5.00	12.00	buona
a16	29.00	6.00	3.10	3.31	3.90	99.24%	28.00	23.00	0.00	0.00	12.00	19.00	buona

L'applicazione della DRSA all'informazione della Tavola 12 fornisce il seguente insieme minimo di regole che coprono tutte le strategie del primo campione con valutazione complessiva "buona" (tra parentesi le strategie della Tavola 12 supportanti la regola decisionale; la strategie base per le regole sono sottolineata).

- regola 1.1) se $St^{Max}(0{,}75) \leq\ 19$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,75 che la scorta massima è non più elevata di 19, allora la strategia è buona), $\{a1, a4, \underline{a11}, a14\}$;

- regola 1.2) se $N(0{,}01) \leq 3{,}42$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,01 che il quantile destro del numero di ordini è non più elevato di 3,42, allora la strategia è buona), $\{\underline{a7}, a15\}$;
- regola 1.3) se $St^{Min}(0{,}99) \leq 0$ allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,99 che la scorta minima è non più elevata di 0, allora la strategia è buona), $\{\underline{a16}\}$;
- regola 1.4) se $St^{Max}(0{,}75) \leq 22$, $N(0{,}01) \leq 6.28$ e $Sh(0{,}01) \leq 9$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,75 che the scorta massima è non più elevata di 22, e c'è probabilità dello 0.01 che il quantile destro di ordini è non più elevata di 6,28, e c'è probabilità dello 0.01 che il livello di shortage è non più elevato di 9, allora la strategia è buona), $\{\underline{a9}\}$;
- regola 1.5) se $St^{Min}(0{,}75) \leq 0$ e $Sh(0{,}01) \leq 13$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,75 che la scorta minima è non più elevata di 0, e c'è la probabilità dello 0,01 che il livello di shortage è non più elevato di 13, allora la strategia è buona), $\{\underline{a5}\}$.

Il manager seleziona la regola 1.2 come la più importante nel corrente modello di preferenza.

In base a questa selezione, un vincolo è aggiunto al problema multi obiettivo di gestione delle scorte originario, che ora diventa il seguente:

$$min \quad N(0{,}50) = \frac{x(0{,}50; 90)}{Q};$$

$$min \quad N(0{,}25) = \frac{x(0{,}25; 90)}{Q};$$

$$min \quad P(d_\tau \geq K + 1);$$

$$min \quad St^{Max}(0{,}99) = max[Q + K - x(0{,}99; 15); 0];$$

$$min \quad St^{Max}(0{,}75) = max[Q + K \; - \; x(0{,}75;\; 15); 0];$$

$$min \quad St^{Min}(0{,}99) = max[K \; - \; x(0{,}99;\; 15); 0];$$

$$min \quad St^{Min}(0{,}75) = max[K \; - \; x(0{,}75;\; 15); 0];$$

$$min \quad Sh(0{,}25) = max[x(0{,}25;\; 15) - K\; ; 0];$$

$$min \quad Sh(0{,}01) = max[x(0{,}01;\; 15) - K\; ; 0];$$

soggetto a

$Q \geq \frac{x(0{,}01;\, 90)}{3{,}42}$; (condizione $N(0{,}01) \leq \; 3{,}42$ nella regola 1.2).

Considerando il problema multi obiettivo di gestione delle scorte con i nuovi vincoli, generiamo nell'ambito di una nuova fase computazionale un secondo campione di strategie Pareto-ottimali presentate nella Tavola 13. Si noti che tutte le strategie alternative della Tavola 13 soddisfano anche la condizione imposta dalla regola decisionale 1.2 selezionata dal manager. Il manager è invitato a dare una valutazione complessiva per le strategie del campione, classificandone alcune come “buona”, come mostrato nell'ultima colonna della Tavola 13.

Tavola 13

alternative	Q	K	$N(0.50)$	$N(0.25)$	$N(0.01)$	P(d>k)	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Max}(0.75)$	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Min}(0.75)$	Sh(0.25)	Sh(0.01)	Valutazione complessiva
a1'	40.00	13.00	2.25	2.40	2.83	63.68%	46.00	41.00	6.00	1.00	5.00	12.00	
a2'	34.00	20.00	2.65	2.82	3.32	8.30%	47.00	42.00	13.00	8.00	0.00	5.00	
a3'	39.00	15.00	2.31	2.46	2.90	43.19%	47.00	42.00	8.00	3.00	3.00	10.00	buona
a4'	44.00	10.00	2.05	2.18	2.57	88.15%	47.00	42.00	3.00	0.00	8.00	15.00	
a5'	36.00	22.00	2.50	2.67	3.14	3.27%	51.00	46.00	15.00	10.00	0.00	3.00	buona
a6'	45.00	14.00	2.00	2.13	2.51	53.43%	52.00	47.00	7.00	2.00	4.00	11.00	buona
a7'	35.00	23.00	2.57	2.74	3.23	1.95%	51.00	46.00	16.00	11.00	0.00	2.00	
a8'	38.00	18.00	2.37	2.53	2.97	18.05%	49.00	44.00	11.00	6.00	0.00	7.00	buona
a9'	41.00	15.00	2.20	2.34	2.76	43.19%	49.00	44.00	8.00	3.00	3.00	10.00	buona
a10'	38.00	9.00	2.37	2.53	2.97	93.01%	40.00	35.00	2.00	0.00	9.00	16.00	buona
a11'	44.00	15.00	2.05	2.18	2.57	43.19%	52.00	47.00	8.00	3.00	3.00	10.00	buona
a12'	37.00	22.00	2.43	2.59	3.05	3.27%	52.00	47.00	15.00	10.00	0.00	3.00	
a13'	37.00	20.00	2.43	2.59	3.05	8.30%	50.00	45.00	13.00	8.00	0.00	5.00	
a14'	39.00	20.00	2.31	2.46	2.90	8.30%	52.00	47.00	13.00	8.00	0.00	5.00	buona
a15'	42.00	11.00	2.14	2.29	2.69	81.52%	46.00	41.00	4.00	0.00	7.00	14.00	
a16'	39.00	16.00	2.31	2.46	2.90	33.59%	48.00	43.00	9.00	4.00	2.00	9.00	buona

Applicando la DRSA alle informazioni sulle preferenze della Tavola 13, si ottiene il seguente insieme minimal di regole decisionali capace di coprire tutte le strategie in essa con valutazione complessiva “buona”:

- regola 2.1) se $St^{Min}\ (0{,}99) \leq\ 2$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,99 che il minimum stock level è non più elevata di 2, allora la strategia è buona), $\{\underline{a10'}\}$;
- regola 2.2) se $N(0{,}01) \leq\ 2{,}51$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,01 che il quantile destro del numero di ordini è non più elevato di 2,51, allora la strategia è buona), $\{\underline{a6'}\}$;
- regola 2.3) se $Sh(0{,}01) \leq 10$ e $N(0{,}01) \leq 2{,}97$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,01 che il livello di shortage è non più elevato di 10, e c'è la probabilità dello 0,01 che il quantile destro del numero di ordini è non più elevato di 2,97, allora la strategia è buona), $\{\underline{a3'}, \underline{a8'}, \underline{a9'}, \underline{a11'}, a14, a16\}$;
- regola 2.4) se $Sh(0{,}01) \leq 3$ e $St^{Min}(0{,}75) \leq 10$ e $St^{Max}(0{,}75) \leq\ 46$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,01 che il livello di shortage è non più elevato di 3, e c'è la probabilità dello 0,75 che la scorta minima è non più elevata di 10, e c'è la probabilità dello 0,75 che la scorta massima è non più elevata di 46, allora la strategia è buona), $\{\ \underline{a5'}\}$.

Il manager seleziona la regola 2.3 come la più importante nel corrente modello di preferenza. Conseguentemente, il vincolo corrispondente alle condizioni di questa regola è aggiunto al problema multi obiettivo di gestione delle scorte, che ora diventa:

$$min \quad N(0{,}50) = \frac{x(0{,}50;\, 90)}{Q};$$

$$min \quad N(0{,}25) = \frac{x(0{,}25;\, 90)}{Q};$$

$$min \quad P(d_\tau \geq K + 1);$$

$$min \quad St^{Max}(0{,}99) = max[Q + K - x(0{,}99;\, 15); 0];$$

$$min \quad St^{Max}(0{,}75) = max[Q + K - x(0{,}75;\, 15); 0];$$

$$min \quad St^{Min}(0{,}99) = max[K - x(0{,}99;\, 15); 0];$$

$$min \quad St^{Min}(0{,}75) = max[K - x(0{,}75;\, 15); 0];$$

$$min \quad Sh(0{,}25) = max[x(0{,}25;\, 15) - K\, ; 0];$$

soggette a

$Q \geq \frac{x(0{,}01;\, 90)}{2{,}97}$; (condizione $N(0{,}01) \leq 2{,}97$ nella regola 2.3);

$K \geq x(0{,}01;\, 15) - 10$; (condizione $Sh(0{,}01) \leq 10$ nella regola 2.3).

Un nuovo insieme di strategie rappresentative è generato nella nuova regione ammissibile, come mostrato nella Tavola 14.1.1, e cioè proposto al manager che specifica la valutazione complessiva mostrati nell'ultima colonna di questa Tavola.

Tavola 14.1.1

alternative	Q	K	$N(0.50)$	$N(0.25)$	$N(0.01)$	P(d>k)	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Max}(0.75)$	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Min}(0.75)$	Sh(0.25)	Sh(0.01)	Valutazione complessiva
a1''	39.00	21.00	2.31	2.46	2.90	5.31%	53.00	48.00	14.00	9.00	0.00	4.00	
a2''	40.00	19.00	2.25	2.40	2.83	12.48%	52.00	47.00	12.00	7.00	0.00	6.00	
a3''	38.00	21.00	2.37	2.53	2.97	5.31%	52.00	47.00	14.00	9.00	0.00	4.00	buona
a4''	40.00	16.00	2.25	2.40	2.83	33.59%	49.00	44.00	9.00	4.00	2.00	9.00	buona
a5''	42.00	18.00	2.14	2.29	2.69	18.05%	53.00	48.00	11.00	6.00	0.00	7.00	
a6''	41.00	19.00	2.20	2.34	2.76	12.48%	53.00	48.00	12.00	7.00	0.00	6.00	buona
a7''	39.00	20.00	2.31	2.46	2.90	8.30%	52.00	47.00	13.00	8.00	0.00	5.00	buona
a8''	38.00	19.00	2.37	2.53	2.97	12.48%	50.00	45.00	12.00	7.00	0.00	6.00	
a9''	43.00	16.00	2.09	2.23	2.63	33.59%	52.00	47.00	9.00	4.00	2.00	9.00	buona
a10''	43.00	17.00	2.09	2.23	2.63	25.11%	53.00	48.00	10.00	5.00	1.00	8.00	buona
a11''	39.00	19.00	2.31	2.46	2.90	12.48%	51.00	46.00	12.00	7.00	0.00	6.00	
a12''	40.00	20.00	2.25	2.40	2.83	8.30%	53.00	48.00	13.00	8.00	0.00	5.00	buona
a13''	38.00	22.00	2.37	2.53	2.97	3.27%	53.00	48.00	15.00	10.00	0.00	3.00	
a14''	41.00	16.00	2.20	2.34	2.76	33.59%	50.00	45.00	9.00	4.00	2.00	9.00	buona

Il terzo insieme di regole è il seguente:

- regola 3.1.a) se $St^{Min}(0{,}75) \leq 5$, allora la strategia è buona ; (cioè se c'è la probabilità dello 0,75 che la scorta minima è non più elevata di 5, allora la strategia è buona), $\{a4'', a9'', \underline{a10''}, a14''\}$;
- regola 3.2.a) se $Sh(0{,}01) \leq 5$ e $St^{Min}(0{,}75) \leq 8$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,01 che il livello di shortage è non più elevato di 5, e c'è la probabilità dello 0,75 che la scorta minima è non più elevata di 8, allora la strategia è buona), $\{\underline{a7''}, \underline{a12''}\}$;
- regola 3.3.a) se $Sh(0{,}01) \leq 4$ e $St^{Max}(0{,}75) \leq 47$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,01 che il livello di the shortage è non più elevato di 4, e c'è la probabilità 0,75 the scorta massima è non più elevata 47, allora la strategia è buona), $\{\underline{a3''}\}$;
- regola 3.4.a) se $N(0{,}01) \leq 2{,}76$ e $Sh(0{,}01) \leq 6$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,01 che il quantile destro del numero di ordini è non più elevato di 2,76, e c'è la probabilità dello 0,01 che il livello di shortage è non più elevato di 6, allora la strategia è buona), $\{\underline{a6''}\}$.

Come già spiegato in precedenza tutta la procedura ha un spirito esplorativo. Quindi il decisore può sempre ritornare indietro al precedente. Infatti, non esiste una strategia che è ottima di per se. Piuttosto, il decisore in un processo “step by step” ottiene un’approfondita conoscenza degli aspetti tecnici del problema e forma le sue preferenze per tentativi e, errori. Infatti, la procedura si ferma quando il decisore si convince degli argomenti a favore di una data soluzione che può essere considerata abbastanza buona da essere scelta.

Supponiamo che il manager non consideri le suddette regole compatibili con le sue preferenze.

Conseguentemente, egli può rimpiazzare le valutazioni complessive nella Tavola 14.1.1. con un nuovo insieme di valutazioni complessive mostrate nell'ultima colonna della Tavola 14.1.2.

Tavola 14.1.2.

alternative	*Q*	*K*	*N*(0.50)	*N*(0.25)	*N*(0.01)	P(d>k)	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Max}(0.75)$	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Min}(0.75)$	Sh(0.25)	Sh(0.01)	Valutazione complessiva
a1''	39.00	21.00	2.31	2.46	2.90	5.31%	53.00	48.00	14.00	9.00	0.00	4.00	
a2''	40.00	19.00	2.25	2.40	2.83	12.48%	52.00	47.00	12.00	7.00	0.00	6.00	buona
a3''	38.00	21.00	2.37	2.53	2.97	5.31%	52.00	47.00	14.00	9.00	0.00	4.00	
a4''	40.00	16.00	2.25	2.40	2.83	33.59%	49.00	44.00	9.00	4.00	2.00	9.00	buona
a5''	42.00	18.00	2.14	2.29	2.69	18.05%	53.00	48.00	11.00	6.00	0.00	7.00	buona
a6''	41.00	19.00	2.20	2.34	2.76	12.48%	53.00	48.00	12.00	7.00	0.00	6.00	
a7''	39.00	20.00	2.31	2.46	2.90	8.30%	52.00	47.00	13.00	8.00	0.00	5.00	buona
a8''	38.00	19.00	2.37	2.53	2.97	12.48%	50.00	45.00	12.00	7.00	0.00	6.00	buona
a9''	43.00	16.00	2.09	2.23	2.63	33.59%	52.00	47.00	9.00	4.00	2.00	9.00	
a10''	43.00	17.00	2.09	2.23	2.63	25.11%	53.00	48.00	10.00	5.00	1.00	8.00	buona
a11''	39.00	19.00	2.31	2.46	2.90	12.48%	51.00	46.00	12.00	7.00	0.00	6.00	
a12''	40.00	20.00	2.25	2.40	2.83	8.30%	53.00	48.00	13.00	8.00	0.00	5.00	buona
a13''	38.00	22.00	2.37	2.53	2.97	3.27%	53.00	48.00	15.00	10.00	0.00	3.00	
a14''	41.00	16.00	2.20	2.34	2.76	33.59%	50.00	45.00	9.00	4.00	2.00	9.00	buona

L' insieme di regole correlate alla Tavola 14.1.2 è il seguente:

- regola 3.1.b) se $St^{Max}(0{,}75) \leq 45$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,75 che la scorta massima è non più elevata di 45, allora la strategia è buona), $\{a4'', \underline{a8''}, \underline{a14''}\}$;
- regola 3.2.b) se $N(0{,}01) \leq 2{,}69$ e $Sh(0{,}01) \leq 8$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,01 che il quantile destro del numero di ordini è non più elevato di 2,69, e c'è la probabilità dello 0,01 che il livello di shortage è non più elevato di 8, allora la strategia è buona), $\{\underline{a5''}, \underline{a10''}\}$;
- regola 3.3.b) se $Sh(0{,}01) \leq 5$ e $St^{Min}(0{,}75) \leq 8$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0.01 che il livello di shortage è non

più elevato di 5, e c'è la probabilità dello 0,75 che la scorta minima è non più elevata di 8, allora la strategia è buona), $\{a7'', a12''\}$;

- regola 3.4.b) se $N(0{,}01) \leq 2{,}83$ e $Sh(0{,}01) \leq 6$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,01 che il quantile destro del numero di ordini è non più elevato di 2,83, e c'è la probabilità dello 0,01 che il livello di shortage è non più elevato di 6, allora la strategia è buona),$\{a6''\}$.

Anche le regole indotte dalla Tavola 14.1.2 non sono considerate dal manager compatibili con le sue preferenze.

In questo caso il decisore può scegliere di ritornare allo step precedente.

Infatti, egli può non considerare compatibili con le sue preferenze tutta la regione rappresentata dalle alternative nella Tavola 14.1.1 o nella Tavola 14.1.2.

Supponiamo che il decisore scelga la regola 2.3 piuttosto che la regola 2.2.

Conseguentemente, il vincolo corrispondente alle condizioni presenti in questa regola è aggiunto al multiobjective inventory problem, che ora diventa:

$$min \quad N(0{,}50) = \frac{x(0{,}50;90)}{Q};$$

$$min \quad N(0{,}25) = \frac{x(0{,}25;90)}{Q};$$

$$min \quad P(d_\tau \geq K+1);$$

$$min \quad St^{Max}(0{,}99) = max[Q + K - x(0{,}99;\, 15); 0];$$

$$min \quad St^{Max}(0{,}75) = max[Q + K - x(0{,}75;\, 15); 0];$$

$$min \quad St^{Min}(0{,}99) = max[K - x(0{,}99;\, 15); 0];$$

$$min \quad St^{Min}(0{,}75) = max[K - x(0{,}75;\, 15); 0];$$

$$min \quad Sh(0{,}25) = max[x(0{,}25;\, 15) - K\, ; 0];$$

$$min \quad Sh(0{,}01) = max[x(0{,}01;\, 15) - K\, ; 0];$$

soggetto a

$Q \geq \frac{x(0{,}01;90)}{2{,}51}$; (condizione $N(0{,}01) \leq\ 2{,}51$ nella regola 2.2).

Un nuovo insieme di strategie rappresentative è generato nella regione ammissibili, come mostrato nella Tavola 14.2, e questa è proposta al manager che specifica valutazione complessiva mostrata nell'ultima colonna di questa Tavola.

Tavola 14.2

alternative	Q	K	$N(0.50)$	$N(0.25)$	$N(0.01)$	P(d>k)	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Max}(0.75)$	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Min}(0.75)$	Sh(0.25)	Sh(0.01)	Valutazione complessiva
a1'''	45.00	14.00	2.00	2.13	2.51	53.43%	52.00	47.00	7.00	2.00	4.00	11.00	buona
a2'''	45.00	15.00	2.00	2.13	2.51	43.19%	53.00	48.00	8.00	3.00	3.00	10.00	buona
a3'''	53.00	21.00	1.70	1.81	2.13	5.31%	67.00	62.00	14.00	9.00	0.00	4.00	
a4'''	49.00	16.00	1.84	1.96	2.31	33.59%	58.00	53.00	9.00	4.00	2.00	9.00	buona
a5'''	54.00	11.00	1.67	1.78	2.09	81.52%	58.00	53.00	4.00	0.00	7.00	14.00	
a6'''	46.00	18.00	1.96	2.09	2.46	18.05%	57.00	52.00	11.00	6.00	0.00	7.00	
a7'''	63.00	10.00	1.43	1.52	1.79	88.15%	66.00	61.00	3.00	0.00	8.00	15.00	
a8'''	57.00	13.00	1.58	1.68	1.98	63.68%	63.00	58.00	6.00	1.00	5.00	12.00	buona
a9'''	46.00	22.00	1.96	2.09	2.46	3.27%	61.00	56.00	15.00	10.00	0.00	3.00	buona
a10'''	52.00	19.00	1.73	1.85	2.17	12.48%	64.00	59.00	12.00	7.00	0.00	6.00	
a11'''	47.00	17.00	1.91	2.04	2.40	25.11%	57.00	52.00	10.00	5.00	1.00	8.00	
a12'''	56.00	12.00	1.61	1.71	2.02	73.24%	61.00	56.00	5.00	0.00	6.00	13.00	buona
a13'''	65.00	9.00	1.38	1.48	1.74	93.01%	67.00	62.00	2.00	0.00	9.00	16.00	

L'insieme di regole correlate alla Tavola 14.2 è il seguente:

- regola 3.1.c) se $St^{Max}(0{,}75) \leq\ 48$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,75 che la scorta massima è non più elevata di 48, allora la strategia è buona), {a1''', a2'''};

- regola 3.2.c) se $Sh(0{,}01) \leq\ 3$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,01 che lo il livello di shortage level è non più elevato di 3, allora la strategia è buona), {a9'''};

- regola 3.3.c) se $N(0{,}01) \leq 2{,}02$ e $Sh(0{,}01) \leq 13$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,01 che il quantile destro del numero di ordini è non più elevato di 2,02, e c'è la probabilità dello 0,01 che il livello di shortage è non più elevato di 13, allora la strategia è buona), {a8''', a12'''};

- regola 3.4.c) se $\mathrm{St}^{Max}(0{,}75) \leq 53$ e $N(0{,}01) \leq 2{,}31$ e $\mathrm{Sh}(0.01) \leq 9$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,75 che la scorta massima è non più elevata di 53, e c'è la probabilità dello 0,01 che il quantile destro del numero di ordini è non più elevato di 2,31, e c'è la probabilità dello 0,01 che il livello di shortage è non più elevato di 9, allora la strategia è buona), $\{\underline{\mathrm{a}4}'''\}$;

Il manager sceglie la regola 3.3.c. Conseguentemente, i corrispondenti vincoli sono aggiunti al multiobjective inventory problem, che ora diventa:

$$min \quad N(0{,}50) = \frac{x(0{,}50;\, 90)}{Q};$$

$$min \quad N(0{,}25) = \frac{x(0{,}25;\, 90)}{Q};$$

$$min \quad P(d_\tau \geq K + 1);$$

$$min \quad St^{Max}(0{,}99) = max[Q + K - x(0{,}99;\, 15); 0];$$

$$min \quad St^{Max}(0{,}75) = max[Q + K - x(0{,}75;\, 15); 0];$$

$$min \quad St^{Min}(0{,}99) = max[K - x(0{,}99;\, 15); 0];$$

$$min \quad St^{Min}(0{,}75) = max[K - x(0{,}75;\, 15); 0];$$

$$min \quad Sh(0{,}25) = max[x(0{,}25;\, 15) - K\, ; 0];$$

soggetto a

$Q \geq \frac{\mathrm{x}(0{,}01;\, 90)}{2{,}02}$; (condizione $N(0{,}01) \leq 2{,}02$ nella regola 2.2)

$K \geq x(0{,}01;\, 15) - 13$; (condizione $Sh(0{,}01) \leq 13$ nella regola 3.3.b).

Viene generato nuovo campione di strategie rappresentative nella nuova regione ammissibile, come mostrato nella Tavola 15, e proposte al manager per la valutazione.

Tavola 15

alternative	*Q*	*K*	*N*(0.50)	*N*(0.25)	*N*(0.01)	P(d>k)	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Max}(0.75)$	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Min}(0.75)$	Sh(0.25)	Sh(0.01)
a1''''	58.00	17.00	1.55	1.66	1.95	25.11%	68.00	63.00	10.00	5.00	1.00	8.00
a2''''	56.00	19.00	1.61	1.71	2.02	12.48%	68.00	63.00	12.00	7.00	0.00	6.00
a3''''	56.00	18.00	1.61	1.71	2.02	18.05%	67.00	62.00	11.00	6.00	0.00	7.00
a4''''	58.00	16.00	1.55	1.66	1.95	33.59%	67.00	62.00	9.00	4.00	2.00	9.00
a5''''	57.00	16.00	1.58	1.68	1.98	33.59%	66.00	61.00	9.00	4.00	2.00	9.00
a6''''	57.00	14.00	1.58	1.68	1.98	53.43%	64.00	59.00	7.00	2.00	4.00	11.00
a7''''	59.00	15.00	1.53	1.63	1.92	43.19%	67.00	62.00	8.00	3.00	3.00	10.00
a8''''	60.00	14.00	1.50	1.60	1.88	53.43%	67.00	62.00	7.00	2.00	4.00	11.00
a9''''	57.00	18.00	1.58	1.68	1.98	18.05%	68.00	63.00	11.00	6.00	0.00	7.00
a10''''	58.00	14.00	1.55	1.66	1.95	53.43%	65.00	60.00	7.00	2.00	4.00	11.00
a11''''	62.00	13.00	1.45	1.55	1.82	63.68%	68.00	63.00	6.00	1.00	5.00	12.00

Il manager seleziona la strategia a4”“ come la più soddisfacente, fermando la procedura.

Tavola 16

alternative	*Q*	*K*	*N*(0.50)	*N*(0.25)	*N*(0.01)	P(d>k)	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Max}(0.75)$	$St^{Min}(0.99)$	$St^{Min}(0.75)$	Sh(0.25)	Sh(0.01)
a4''''	58.00	16.00	1.55	1.66	1.95	33.59%	67.00	62.00	9.00	4.00	2.00	9.00

2. IMO-DRSA PER LA GESTIONE DEL CAVEAU DI UNA BANCA

2.1 MODELLO TEORICO

In questo paragrafo scegliamo di considerare il problema collegato alla politica di gestione del caveau di una banca, cioè le scelte manageriali per il controllo delle scorte di banconote di un istituto di credito in un intervallo di tempo $[a;\ a+T]$ $a, T \in \mathcal{R}^{+}$. L’argomento, si colloca nell’ambito del così detto “cash flow management” o “liquidity management” ed è stato ampiamente trattato in letteratura in una maniera più o meno diretta rispetto alla tematica più specifica del caveau management (Harrison, Sellke, Taylor 1983), (Harrison, Taksar, 1983), (Dixit 1991), (Ormeci, Dai, Vate 2008), (Harrison, Taylor 1978), (Bar-Ilan, Perry, Stadje 2004), (Baccarin 2002).

Pur nella comunanza di alcune ipotesi rispetto a quanto presente in letteratura, l' approccio che qui proporremo di seguire per affrontare tale problematica è però similare a quello adoperato nei due paragrafi precedenti: applicheremo cioè, uno schema di ottimizzazione multi obiettivo per mezzo dell' IMO-DRSA e della DRSA in condizioni di incertezza.

Siamo convinti infatti, che il management del caveau possa essere accostato per analogia al problema mono-item di inventory management analizzato sopra con le dovute precisazioni e i dovuti adattamenti.

Questo perché nella tradizionale attività di intermediazione bancaria le banconote rappresentano grossomodo una commodity per la quale è necessario adottare un'adeguata politica di inventory management.

Le banconote sono soggette a una domanda d_t stocastica caratterizzata da prelevamenti e da versamenti per i più disparati motivi secondo le peculiarità proprie dell'attività di sportello bancario.

In tale contesto è più adatto quindi, considerare d_t come domanda-offerta.

Per modellare il processo di domanda-offerta usiamo il seguente processo diffusivo

$$d_t = \mu\, dt + \sigma\, dW(t)$$

$\mu \in \mathcal{R}$, $\sigma \in \mathcal{R}^+$, dove $dW(t) = \epsilon \sqrt{t}$ è il processo di Wiener che ha valore atteso $E[dW(t)] = 0$ e deviazione standard $\sigma[dW(t)] = t$ e dove ϵ rappresenta una variabile casuale normale standard.

Supponiamo che il processo di domanda-offerta sia indipendente da fattori di trend, e che quindi, μ, σ siano costanti nell'intervallo di tempo $[b; b + t]$, $b, t \in \mathcal{R}^+$.

Tale processo è con buona approssimazione adeguato a descrivere la dinamica reale sottostante e a rendere i calcoli semplici.

La probabilità che la domanda d_t sia non più grande di $x \in \mathcal{R}$ è data da

$$P(\, d_t \leq \; x) = \quad \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}\, dx \quad (iii).$$

Di conseguenza la probabilità di una domanda più grande di $x \in \; \mathcal{R}$ è

$$P(\, d_t > \; x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}\, dx =$$

$$1 - P(d_t \leq \; x) = 1 - \quad \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}\, dx \qquad (iiii).$$

Il pipeline period τ, cioè l'intervallo di tempo impiegato dall'istituto di emissione per soddisfare l'ordine, è supposto essere costante.

Anche questa peculiare forma di inventory management mira alla minimizzazione di una serie di costi che possono essere riclassificati nelle tre tradizionali macrocategorie: costi di mantenimento, costi di ordine, costi di shortage.

Mantenere banconote per la banca è costoso. Come tutto ciò che ha un volume e una massa, il loro stoccaggio assorbe una serie di risorse sia in termini di ore lavorative impiegate sia in termini di risorse capitale. A questi costi tradizionali di mantenimento si aggiunge il costo opportunità collegato al fatto che le banconote detenute in caveau rappresentano depositi infruttiferi.

Su un versante completamente opposto, ricordiamo invece quanto possa pesare negativamente l'eventuale shortage sull'economia gestionale di una banca. In tal senso, il costo dello shortage di una singola unità di moneta sottoforma di banconota è difficilmente quantificabile in termini monetari poiché ha risvolti più strettamente legati all'immagine.

Il rapporto bancario, infatti, è in primo luogo di tipo fiduciario: il cliente che investe i suoi risparmi in un conto corrente o in altre prodotti finanziari similari oltre a confidare in un piccolo rendimento sposta sulla banca il rischio della custodia della sua ricchezza liquida. Malgrado la diffusione sempre più massiccia della moneta elettronica abbia attenuato non poco gli effetti di uno shortage, per una banca rimane vitale la capacità di soddisfare le esigenze di liquidità cartacea dei suoi clienti.

Ancor più intimamente connesso alle peculiarità del caso è il consumo di risorse legato agli ordinativi di stock di banconote; la questione non riguarda solo la non semplice quantificazione e qualificazione di tali costi.

Poichè d_t è configurabile come domanda-offerta, lo stock totale di banconote in caveau è naturalmente soggetto a variazioni stocastiche sia positive sia negative; le prime comportando aumento di stock incidono sui costi di mantenimento, le seconde possono causare un aumento drastico del rischio di shortage per la banca.

Da qui, da un lato, la necessità di abbassare il livello di stock di banconote al di sotto di una soglia di sostenibilità dei costi di mantenimento; dall'altro, l'esigenza di ordinare nuovi stock di banconote al fine di riportare il livello di scorte al di sopra di una soglia considerata ad alto rischio di shortage.

Si prospettano quindi due diverse tipologie di ordine: ordini di immissione e ordini di dismissione.

I costi connessi sono classificabili in esterni ed interni in base al fatto che le risorse consumate siano aziendali o esterne; dall'altro lato tali costi sono di difficile identificazione e misurazione.

Allo scopo di trovare il giusto equilibrio fra le diverse componenti di rischio suesposte, il processo decisionale deve necessariamente determinare un valore B^* ottimale per il decisore, rispetto al quale per effetto della domanda-offerta d_t far oscillare il livello di scorte delle banconote in caveau.

Definiamo le seguenti grandezze:

- K^{Max} punto (soglia) di dismissione, che corrisponde al livello massimo tollerato dello stock di banconote, raggiunto il quale l'utilizzatore effettua un ordine di dismissione,

- K^{Min} punto (soglia) di immissione, che corrisponde al livello minimo tollerato dello stock di banconote, raggiunto il quale l'utilizzatore effettua un ordine di immissione,

- Q^{im} quantità di immissione, che corrisponde alle unità di moneta reintrodotte in caveau in seguito a un ordine di immissione,

- Q^{dis} quantità di dismissione, che corrisponde alle unità di moneta dismesse dal caveau in seguito a un ordine di dismissione.

Queste grandezze appena introdotte da un lato, esplicitano l'ampiezza delle oscillazioni dello stock di banconote attorno al valore B^* di equilibrio, dall'altro, possono essere considerate come le stesse indirette determinanti di B^*.

Deve infatti aversi, la seguente relazione

$$B^* = K^{Max} - Q^{dis} = K^{Min} + Q^{im} \quad (*)$$

che rappresenta il livello di stock di banconote ritenuto ottimale dal decisore, con $K^{Max} > B^* > K^{Min}$.

La (*) infatti, garantisce una neutralità della politica di immissione di banconote rispetto a quella di dismissione sullo stock complessivo trascorso il pipeline period τ e viceversa: in altre parole, le differenze di stock in caveau immediatamente dopo l'esecuzione di un ordine di dismissione o di immissione saranno legate solamente alla stocasticità della domanda-offerta di banconote.

Le grandezze $K^{Max}, Q^{dis}, K^{Min}, Q^{im}$ appena definite, possono essere in questo contesto considerate come variabili decisionali, in quanto sono le uniche su cui il decisore ha la possibilità di agire in un'ottica di risk management.

Dalla (*) si ricava

$Q^{dis} = K^{Max} - Q^{im} - K^{Min}$ (**)

Sul piano computazionale la (*) e la (**) permettono una semplificazione; il fissare tre delle quattro variabili decisionali implica la determinazione della quarta.

Nel proseguo della trattazione, scegliamo di usare K^{Max}, K^{Min}, Q^{im}; la variabile Q^{dis} sarà inserita in taluni passaggi al solo scopo esplicativo.

Proponiamo anche in questo caso un approccio di ottimizzazione multi obiettivo, con l'intendo di minimizzare in una logica di compromesso le diverse componenti di rischio esaminate sopra.

Per tener conto della stocasticità della domanda, proponiamo di considerare alcuni appropriati quantili di ogni funzione obiettivo poiché essi danno una semplice e intuitiva rappresentazione dell'incertezza.

Sia $\Pi = \{ P^i, i = 1,2, \dots, M \}$ un insieme di alcuni livelli di probabilità considerate appropriate.

Per ogni $P^i \in \Pi$, $i = 1,2, \dots, M$, e per ogni $t \in \mathcal{R}$, $x(P^i, t) \in \mathcal{R}$ è il quantile destro della domanda in un periodo di durata $t \in \mathcal{R}$, cioè $P(\, d_t \geq \; x(P^i, t)) = P^i$.

Questo significa che la domanda in un periodo di durata t è almeno $x(P^i, t)$ con probabilità P^i.

Consideriamo le seguenti funzioni obiettivo che devono essere minimizzate:

- i quantili destri di ordini di immissione attesi nell'intervallo di tempo $[a, a+T]$, legati alla probabilità $P^i \in \Pi$:

$$N^{im}(P^i) = \; Max\left[\frac{x(P^i, T)}{Q^{im}}; 0\right],$$

$$i = 1,2, \dots, M, \qquad (1.i)$$

- i quantili destri di ordini di dismissione attesi nell'intervallo di tempo $[a, a+T]$, legati alla probabilità $P^i \in \Pi$:

  $$N^{dis}(P^i) = Max\left[\frac{x(P^i,T)}{-Q^{dis}};0\right] = Max\left[\frac{x(P^i,T)}{Q^{im}+K^{Min}-K^{Max}};0\right] \qquad i = 1,2,\dots,M, \quad (2.i)$$

- i quantili destri di shortage legati alla probabilità $P^i \in \Pi$:

  $$Sh(P^i) = Max[x(P^i,\tau) - K^{Min};0],$$

  $$i = 1,2,\dots,M, \qquad (3.i)$$

- i quantili destri di over stock legati alle probabilità $P^i \in \Pi$:

  $$So(P^i) = Max[K^{Max} - x(P^i,\tau);\ K^{Max}],$$

  $$i = 1,2,\dots,M, \qquad (4.i)$$

Queste funzioni intercorrelate rappresentano misure dei differenti rischi che il decisore affronta e deve minimizzare allo stesso tempo; quindi, applicando l'IMO DRSA le funzioni (1.*i*), (2.*i*), (3*i*), (4.*i*) corrispondono agli attributi condizionali.

Analiticamente il caveau management problem può essere espresso come segue:

$$min \quad N^{im}(P^i) = Max\left[\frac{x(P^i,T)}{Q^{im}};0\right],$$

$$i \quad = 1,2,\dots,M, \qquad (1.i)\ ;$$

$$min \quad N^{dis}(P^i) = Max\left[\frac{x(P^i,T)}{-Q^{dis}};0\right] = Max\left[\frac{x(P^i,T)}{Q^{im}+K^{Min}-K^{Max}};0\right]$$

$$i \quad = 1,2,\dots,M, \qquad (2.i)\ ;$$

$$min \quad Sh(P^i) = Max[x(P^i,\tau) - K^{Min};0],$$

$$i \quad = 1,2,\dots,M, \qquad (3.i)\ ;$$

$$min \quad So(P^i) = Max[K^{Max} - x(P^i,\tau);\ K^{Max}],$$

$$i \quad = 1,2,\dots,M, \qquad (4.i)$$

soggette ai vincoli sul range di variazione delle variabili decisionali.

L'applicazione dell' IMO DRSA a questo problema multi obiettivo implica un'interazione con l'inventory manager. Nella fase computazionale, viene generato un insieme di strategie esemplificative e viene presentato al manager. Nella fase decisionale, il manager indica le strategie che all'interno dell' insieme di strategie esemplificative sono a suo giudizio relativamente buone. Questa informazione sulle preferenze è sfruttata per inferire un insieme di regole decisionali tramite l'uso della DRSA. Le regole rappresentano le preferenze del manager espresse sottoforma di strategie.

Esse hanno la seguente sintassi

"se $cond_1$ e/o $cond_2$ .... e/o $cond_Z$ sono soddisfatte, allora la strategia è buona",

dove $cond_i, i = 1, \dots, Z$, può essere una o più delle seguenti condizioni: $N^{im}(P^i) \leq N^{im*}$; $N^{dis}(P^i) \leq N^{dis*}$; $Sh(P^i) \leq Sh^*$; $So(P^i) \leq So^*$;

con $P^i \in \Pi$.

In questa fase, il manager è invitato a selezionare fra queste regole quella che è la più importante per lui, definita regola r. Le condizioni nella regola r definiscono un nuovo insieme di vincoli che devono essere soddisfatti per a prendere una buona decisione:

- le condizioni $N^{im}(P^i) \leq N^{im*}$ definiscono vincoli del tipo $Q^{im} \geq \frac{x(P^i,T)}{N^{im*}}$, $i = 1,2, \dots, M$;
- le condizioni $N^{dis}(\mathrm{P}^i) \leq N^{dis*}$ definiscono vincoli del tipo $K^{Max} - Q^{im} - K^{Min} \leq \frac{x(P^i,T)}{N^{dis*}}$;
- le condizioni $Sh(P^i) \leq Sh^*$ definiscono vincoli del tipo $K^{Min} \geq x(P^i,\tau) - Sh^*$;

- le condizioni $So(P^i) \leq So^*$ definiscono vincoli del tipo $K^{Max} \leq So^* + x(P^i, \tau)$ per $x(P^i, \tau) < 0$, $K^{Max} \leq So^*$ per $x(P^i, \tau) \geq 0$.

Quindi le condizioni di una regola selezionata r sono convertite in corrispondenti vincoli da considerare nel successivo stadio computazionale allo scopo della generazione di un nuovo insieme di strategie da sottoporre al manager.

2.2 ESEMPIO DIDATTICO

In questo paragrafo, noi presentiamo un esempio didattico che illustra la nostra metodologia.

Supponiamo di avere $\mu = 0$ e $\sigma = 5$, un orizzonte temporale T di 90 giorni e un pipeline time τ di 2 giorni.

Noi consideriamo il seguente insieme di appropriate soglie di probabilità $\Pi = \{0{,}05;\ 0{,}25;\ 0{,}75;\ 0{,}95\}$ e il corrispondente insieme di appropriati quantili destri di domanda $x(P^i, \tau) \in \mathcal{R}$, $P^i \in \Pi$.

Poichè noi supponiamo che l'utilizzatore è avverso al rischio, per ogni funzione obiettivo selezioniamo un appropriato sottoinsieme di Π tenendo conto delle situazioni più critiche, cioè le probabilità correlate ai peggiori risultati per la funzione obiettivo considerata. Conseguentemente, selezioniamo

- $\Pi_1 = \{0{,}05;\ 0{,}25\}$ per $N^{im}(P^i)$ e per $Sh(P^i)$;
- $\Pi_2 = \{0{,}75; 0{,}95\}$ per $N^{dis}(P^i)$ e per $So(P^i)$.

Analiticamente, il problema può essere espresso come segue:

$$min \quad N^{im}(0{,}05) = Max\left[\frac{x(0{,}05;90)}{Q^{im}}; 0\right];$$

$$min \quad N^{im}(0{,}25) = Max\left[\frac{x(0{,}25;90)}{Q^{im}}; 0\right];$$

$$min \quad N^{dis}(0{,}75) = Max\left[\frac{x(0{,}75;90)}{-Q^{dis}}; 0\right] = Max\left[\frac{x(0{,}75;90)}{Q^{im} + K^{Min} - K^{Max}}; 0\right];$$

$$min \quad N^{dis}(0{,}95) = \; Max\left[\frac{x(0{,}95;\,90)}{-Q^{dis}};0\right] = \; Max\left[\frac{x(0{,}95;\,90)}{Q^{im}+K^{Min}-K^{Max}};0\right];$$

$$min \quad Sh(0{,}05) = \; Max\left[x(0{,}05;\;2) - K^{Min};0\right];$$

$$min \quad Sh(0{,}25) = \; Max\left[x(0{,}25;\;2) - K^{Min};0\right];$$

$$min \quad So(0{,}75) = Max[K^{Max} - \; x(0{,}75;\;2);\,K^{Max}]\;;$$

$$min \quad So(0{,}95) = Max[K^{Max} - \; x(0{,}95;\;2);\,K^{Max}]\;;$$

soggetti ai vincoli sul range di variazione delle variabili decisionali.

Nella prima interazione, nell'ambito della fase computazionale, la procedura coinvolge il decisore nella definizione di un campione di strategie presentato nella Tavola 17. Per esempio, il decisore può scegliere in tale fase di minimizzare $N^{im}(0{,}25)$ (il quantile destro di ordini di immissione attesi con una probabilità dello 0,25) soggetto ai vincoli $N^{dis}(0{,}75) \leq 7{,}83$ (il quantile destro di ordini di dismissione con una probabilità dello 0,75 è non più elevato di 7,83), $Sh(0{,}25) \leq 0{,}00$ (lo shortage con una probabilità dello 0,25 è non più elevato di 0,00) e $So(0{,}95) \leq 30{,}87$ (l'over stock con probabilità dello 0,95 è non più elevato di $30{,}87$). La soluzione di questo problema di gestione mono obiettivo $\left(min \quad N^{im}(0{,}25)\right)$ con K^{Max} punto (soglia) di dismissione, con K^{Min} punto (soglia) di immissione, con Q^{im} unità di moneta relative a un ordine di immissione come variabili decisionali è mostrata come strategia $h1$ nella tavola 17. La stessa procedura, cambiando di volta in volta la funzione da minimizzare rispetto a differenti vincoli, è stata applicata in fase computazionale per ciascun alternativa di ogni interazione dell'ottimizzazione interattiva multi obiettivo proposta.

Questo insieme di strategie di gestione di un caveau è considerato rappresentativo di tutto l'insieme di strategie Pareto ottimali. Il manager valuta le strategie alternative della Tavola 17 e indica quelle che sono relativamente buone. Questa informazione è mostrata nella Tavola 18.

Tavola 17

Alternative	Q^{Im}	K^{Min}	K^{max}	N^{Im} (0.05)	N^{Im} (0.25)	N^{Dis} (0.95)	N^{Dis} (0.75)	*Sh* (0.05)	*Sh* (0.25)	*So* (0.95)	*So* (0.75)
h1	1.05	14.10	19.24	73.99	30.34	19.10	7.83	0.00	0.00	30.87	24.01
h2	1.10	1.03	3.83	70.65	28.97	46.21	18.95	10.60	3.74	15.46	8.60
h3	17.45	3.31	32.55	4.47	1.83	6.62	2.71	8.32	1.46	44.18	37.32
h4	6.40	14.45	31.18	12.18	5.00	7.55	3.10	0.00	0.00	42.81	35.95
h5	39.10	8.78	83.13	2.00	0.82	2.21	0.91	2.85	0.00	94.77	87.90
h6	7.62	0.00	70.80	10.24	4.20	1.24	0.51	11.63	4.76	82.43	75.56
h7	3.66	1.04	17.98	21.30	8.74	5.88	2.41	10.59	3.73	29.61	22.75
h8	1.20	0.22	11.82	65.09	26.69	7.50	3.08	11.41	4.55	23.45	16.59
h9	7.09	2.59	12.56	11.01	4.51	27.06	11.10	9.04	2.18	24.19	17.33
h10	1.29	0.40	3.22	60.45	24.79	50.99	20.91	11.24	4.37	14.85	7.99
h11	1.48	0.92	73.76	52.82	21.66	1.09	0.45	10.71	3.85	85.39	78.53
h12	14.01	23.51	55.44	5.57	2.28	4.35	1.78	0.00	0.00	67.07	60.21
h13	4.25	2.28	22.41	18.37	7.53	4.91	2.01	9.35	2.49	34.04	27.18
h14	18.75	22.06	44.82	4.16	1.71	19.47	7.98	0.00	0.00	56.45	49.59
h15	1.43	2.38	66.12	54.48	22.34	1.25	0.51	9.25	2.39	77.75	70.89
h16	21.78	2.26	67.86	3.58	1.47	1.78	0.73	9.37	2.51	79.49	72.63

Tavola 18

Alternative	Q^{Im}	K^{Min}	K^{max}	N^{Im} (0.05)	N^{Im} (0.25)	N^{Dis} (0.95)	N^{Dis} (0.75)	*Sh* (0.05)	*Sh* (0.25)	*So* (0.95)	*So* (0.75)	Valutazione complessiva
h1	1.05	14.10	19.24	73.99	30.34	19.10	7.83	0.00	0.00	30.87	24.01	
h2	1.10	1.03	3.83	70.65	28.97	46.21	18.95	10.60	3.74	15.46	8.60	
h3	17.45	3.31	32.55	4.47	1.83	6.62	2.71	8.32	1.46	44.18	37.32	**buona**
h4	6.40	14.45	31.18	12.18	5.00	7.55	3.10	0.00	0.00	42.81	35.95	**buona**
h5	39.10	8.78	83.13	2.00	0.82	2.21	0.91	2.85	0.00	94.77	87.90	**buona**
h6	7.62	0.00	70.80	10.24	4.20	1.24	0.51	11.63	4.76	82.43	75.56	
h7	3.66	1.04	17.98	21.30	8.74	5.88	2.41	10.59	3.73	29.61	22.75	
h8	1.20	0.22	11.82	65.09	26.69	7.50	3.08	11.41	4.55	23.45	16.59	
h9	7.09	2.59	12.56	11.01	4.51	27.06	11.10	9.04	2.18	24.19	17.33	**buona**
h10	1.29	0.40	3.22	60.45	24.79	50.99	20.91	11.24	4.37	14.85	7.99	
h11	1.48	0.92	73.76	52.82	21.66	1.09	0.45	10.71	3.85	85.39	78.53	
h12	14.01	23.51	55.44	5.57	2.28	4.35	1.78	0.00	0.00	67.07	60.21	**buona**
h13	4.25	2.28	22.41	18.37	7.53	4.91	2.01	9.35	2.49	34.04	27.18	**buona**
h14	18.75	22.06	44.82	4.16	1.71	19.47	7.98	0.00	0.00	56.45	49.59	**buona**
h15	1.43	2.38	66.12	54.48	22.34	1.25	0.51	9.25	2.39	77.75	70.89	**buona**
h16	21.78	2.26	67.86	3.58	1.47	1.78	0.73	9.37	2.51	79.49	72.63	**buona**

L'applicazione della DRSA all'informazione della Tavola 18 fornisce il seguente insieme minimo di regole che coprono tutte le strategie del primo campione con valutazione complessiva "buona" (tra parentesi le strategie della Tavola 18 supportanti la regola decisionale; le strategie base per le regole sono sottolineate).

- regola 1'.1) se $N^{im}(0{,}25) \leq\ 2{,}28$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,25 che il quantile destro di ordini di immissione è non più elevato di 2,28, allora la strategia è buona), $\{h3, h5, \underline{h12}, h14, h16\}$;
- regola 1'.2) se $Sh(0{,}25) \leq\ 2{,}39$ e $N^{dis}(0{,}75) \leq 0{,}51$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,25 che il quantile destro di shortage è non più elevato di 2,39 e se c'è la probabilità dello 0,75 che il quantile destro di ordini di dismissione è non più elevato di 0,51, allora la strategia è buona), $\underline{\{h15\}}$;
- regola 1'.3) se $So(0{,}75) \leq\ 35{,}95$ e $N^{im}(0{,}25) \leq\ 7{,}53$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,75 che il quantile destro di over stock è non più elevato di 35,95 e se c'è la probabilità dello 0,25 che il quantile destro di ordini di immissione è non più elevato di 7,53, allora la strategia è buona), $\{\underline{h4}, h9, \underline{h13}\}$.

Il manager seleziona la regola 1'.1 come la più importante nel corrente modello di preferenza.

In base a questa selezione, un vincolo è aggiunto all' originario problema multi obiettivo di gestione delle scorte, che ora diventa il seguente:

$$min \quad N^{im}(0{,}05) = \ Max\left[\frac{x(0{,}05;\,90)}{Q^{im}};0\right];$$

$$min \quad N^{dis}(0{,}75) = \ Max\left[\frac{x(0{,}75;\,90)}{-Q^{dis}};0\right] = \ Max\left[\frac{x(0{,}75;\,90)}{Q^{im}+K^{Min}-K^{Max}};0\right];$$

$$min \quad N^{dis}(0{,}95) = \ Max\left[\frac{x(0{,}95;\,90)}{-Q^{dis}};0\right] = \ Max\left[\frac{x(0{,}95;\,90)}{Q^{im}+K^{Min}-K^{Max}};0\right];$$

$$min \quad Sh(0{,}05) = \ Max\left[x(0{,}05;\ 2) - K^{Min};0\right];$$

$$min \quad Sh(0{,}25) = \ Max\left[x(0{,}25;\ 2) - K^{Min};0\right];$$

$$min \quad So(0{,}75) = Max[K^{Max} - \ x(0{,}75;\ 2);\ K^{Max}]\ ;$$

$$min \quad So(0{,}95) = Max[K^{Max} - \ x(0{,}95;\ 2);\ K^{Max}]\ ;$$

soggetti a

$Q^{im} \geq \frac{x(0{,}25;\ 90)}{2{,}28}$; (condizione $N^{im}(0{,}25) \leq \ 2{,}28$ nella regola 1'.1).

Considerando il problema multi obiettivo di gestione delle scorte con i nuovi vincoli, generiamo un secondo campione di strategie Pareto-ottimali presentate nella Tavola 19. Si noti che tutte le strategie altenative della Tavola 19 soddisfano anche la condizione imposta dalla regola decisionale 1'.1 selezionata dal manager. Il manager è invitato a dare una Valutazione Complessiva per le strategie del campione, classificandone alcune come "buona", come mostrato nell'ultima colonna della Tavola 19.

Tavola 19

Alternative	Q^{Im}	K^{Min}	K^{max}	N^{Im} (0.05)	N^{Im} (0.25)	N^{Dis} (0.95)	N^{Dis} (0.75)	*Sh* (0.05)	*Sh* (0.25)	*So* (0.95)	*So* (0.75)	Valutazione complessiva
h1'	20.12	0.76	27.77	3.88	1.59	11.33	4.65	10.87	4.01	39.40	32.54	**buona**
h2'	17.42	34.79	64.69	4.48	1.84	6.26	2.57	0.00	0.00	76.32	69.46	
h3'	14.72	1.92	19.46	5.30	2.17	27.61	11.32	9.71	2.85	31.09	24.23	**buona**
h4'	28.55	21.62	72.63	2.73	1.12	3.47	1.42	0.00	0.00	84.26	77.40	
h5'	40.80	38.55	80.79	1.91	0.78	54.21	22.23	0.00	0.00	92.43	85.56	
h6'	38.02	1.03	61.82	2.05	0.84	3.43	1.40	10.60	3.74	73.45	66.59	
h7'	32.80	33.73	68.43	2.38	0.98	41.01	16.82	0.00	0.00	80.06	73.20	
h8'	15.88	1.10	70.58	4.91	2.01	1.46	0.60	10.53	3.67	82.21	75.35	
h9'	34.66	13.34	75.18	2.25	0.92	2.87	1.18	0.00	0.00	86.81	79.94	
h10'	14.42	5.84	27.25	5.41	2.22	11.16	4.58	5.79	0.00	38.89	32.02	**buona**
h11'	14.61	17.21	34.48	5.34	2.19	29.46	12.08	0.00	0.00	46.11	39.25	**buona**
h12'	25.25	19.18	56.66	3.09	1.27	6.38	2.62	0.00	0.00	68.29	61.43	
h13'	15.19	2.01	33.62	5.14	2.11	4.75	1.95	9.62	2.76	45.25	38.39	**buona**
h14'	18.82	2.35	29.57	4.15	1.70	9.29	3.81	9.28	2.42	41.20	34.34	**buona**
h15'	21.34	0.36	23.69	3.66	1.50	39.22	16.08	11.27	4.41	35.32	28.45	
h16'	14.90	0.87	20.21	5.24	2.15	17.55	7.20	10.76	3.90	31.85	24.98	

Applicando la DRSA all'informazione sulle preferenze nella Tavola 19, si può ottenere il seguente insieme "minimal" di regole decisionali tali da coprire tutte le strategie del secondo campione con valutazione complessiva "buona":

- regola 2'.1) se $So(0{,}75) \leq \ 24{,}23$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,75 che il quantile destro di over stock è non più elevato di 24,23 , allora la strategia è buona), $\{\text{h3}'\}$;
- regola 2'.2) se $So(0{,}75) \leq \ 39{,}25$ e $Sh(0{,}25) \leq \ 2{,}76$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,75 che il quantile destro di over

stock è non più elevato di 39,25 e se c'è la probabilità dello 0,25 che il quantile destro di shortage è non più elevato di 2,76, allora la strategia è buona), {h10′,<u>h11′</u>,<u>h13′</u>,h14′};

- regola 2'.3) se $So(0{,}75) \leq\ 32{,}54$ e $N^{dis}(0{,}75) \leq\ 4{,}65$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,75 che il quantile destro di over stock è non più elevato di 32,54 e se c'è la probabilità dello 0,75 che il quantile destro di ordini di dismissione è non più elevato di 4,65, allora la strategia è buona), {<u>h1′</u>,h10′};

Il manager seleziona la regola 2'.2 come la più importante nel corrente modello di preferenza. Conseguentemente, il vincolo corrispondente alle condizioni di questa regola è aggiunto al problema multi obiettivo di gestione delle scorte, che ora diventa:

$$min \quad N^{im}(0{,}05) = \ Max\left[\frac{x(0{,}05;\,90)}{Q^{im}};0\right];$$

$$min \quad N^{dis}(0{,}75) = \ Max\left[\frac{x(0{,}75;\,90)}{-Q^{dis}};0\right] = \ Max\left[\frac{x(0{,}75;\,90)}{Q^{im}+K^{Min}-K^{Max}};0\right];$$

$$min \quad N^{dis}(0{,}95) = \ Max\left[\frac{x(0{,}95;\,90)}{-Q^{dis}};0\right] = \ Max\left[\frac{x(0{,}95;\,90)}{Q^{im}+K^{Min}-K^{Max}};0\right];$$

$$min \quad Sh(0{,}05) = \ Max\left[x(0{,}05;\ 2) - K^{Min};0\right];$$

$$min \quad Sh(0{,}25) = \ Max\left[x(0{,}25;\ 2) - K^{Min};0\right];$$

$$min \quad So(0{,}95) = Max[K^{Max} - \ x(0{,}95;\ 2);\ K^{Max}]\ ;$$

soggetti a

$Q^{im} \geq \frac{x(0{,}25;\,90)}{2{,}28}$; (condizione $N^{im}(0{,}25) \leq\ 2{,}28$ nella regola 1'.1);

$K^{Max} \leq\ x(0{,}75;\ 2) + 39{,}25$; (condizione $So(0{,}75) \leq\ 39{,}25$ nella regola 2'.2);

$K^{Min} \geq\ x(0{,}25;\ 2) - 2{,}76$; (condizione $Sh(0{,}25) \leq\ 2{,}76$ nella regola 2'.2).

Un nuovo insieme di strategie rappresentative è generato nella nuova regione ammissibile, come mostrato nella Tavola 20, e ciò è proposto al manager che indica le valutazione complessive mostrate nell'ultima colonna di questa tavola.

Tavola 20

Alternative	Q^{Im}	K^{Min}	K^{max}	N^{Im} (0.05)	N^{Im} (0.25)	N^{Dis} (0.95)	N^{Dis} (0.75)	Sh (0.05)	Sh (0.25)	So (0.95)	So (0.75)	Valutazione complessiva
h1''	14.80	3.57	26.72	5.27	2.16	9.34	3.83	8.06	1.20	38.35	31.49	
h2''	14.39	4.15	25.26	5.42	2.22	11.61	4.76	7.48	0.62	36.90	30.03	
h3''	18.82	6.55	30.33	4.15	1.70	15.72	6.45	5.08	0.00	41.96	35.10	buona
h4''	18.84	2.79	29.26	4.14	1.70	10.21	4.19	8.84	1.98	40.90	34.03	
h5''	17.11	11.30	31.86	4.56	1.87	22.57	9.25	0.33	0.00	43.49	36.63	buona
h6''	15.54	6.31	22.65	5.02	2.06	98.44	40.37	5.32	0.00	34.28	27.41	
h7''	14.22	2.26	21.32	5.49	2.25	16.11	6.60	9.37	2.51	32.95	26.09	
h8''	17.69	5.17	28.71	4.41	1.81	13.33	5.47	6.46	0.00	40.34	33.48	buona
h9''	16.82	5.32	27.90	4.64	1.90	13.56	5.56	6.31	0.00	39.53	32.67	buona
h10''	20.46	5.02	33.75	3.81	1.56	9.43	3.87	6.61	0.00	45.39	38.52	buona
h11''	14.95	5.59	32.15	5.22	2.14	6.72	2.75	6.04	0.00	43.79	36.92	buona
h12''	14.66	3.23	18.75	5.32	2.18	91.78	37.64	8.40	1.53	30.38	23.52	
h13''	15.26	3.06	22.00	5.11	2.10	21.25	8.71	8.57	1.71	33.63	26.76	
h14''	14.06	4.58	20.29	5.55	2.28	47.20	19.36	7.05	0.19	31.92	25.06	buona
h15''	14.90	3.56	26.63	5.24	2.15	9.55	3.92	8.07	1.20	38.26	31.40	buona
h16''	15.12	3.03	32.17	5.16	2.12	5.56	2.28	8.60	1.74	43.80	36.94	

Il terzo insieme di regole è il seguente:

- regola 3'.1) se $Sh(0{,}05) \leq 5{,}08$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,05 che il quantile destro di shortage è non più elevato di 5,08, allora la strategia è buona), {h3", h5"};
- regola 3'.2) se $N^{im}(0{,}25) \leq 1{,}56$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,25 che il numero di ordini di immissione è non più elevato di 1,56, allora la strategia è buona), {h10"};
- regola 3'.3) se $Sh(0{,}25) \leq 0{,}19$ e $So(0{,}75) \leq 25{,}06$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,25 che il quantile destro di shortage è non più elevato di 0,19, e se c'è la probabilità dello 0,75 che il

quantile destro di over stock è non più elevato di 25,06, allora la strategia è buona), {h14"};

- regola 3'.4) se $Sh(0{,}05) \leq 6{,}46$ e $N^{dis}(0{,}75) \leq 5{,}56$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,05 che il quantile destro di shortage è non più elevato di 6,46, e se c'è la probabilità dello 0,75 che il quantile destro di ordini di dismissione è non più elevato di 5,56, allora la strategia è buona { h8",h9", h11"};
- regola 3'.5) se $N^{dis}(0{,}75) \leq 3{,}92$ e se $So(0{,}75) \leq 31{,}40$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,75 che il quantile destro di ordini di dismissione è non più elevato di 3,92, e se c'è la probabilità dello 0,75 che il quantile destro di over stock è non più elevato di 31,40, allora la strategia è buona), {h15"}.

Il manager selezione la regola 3'.4. Conseguentemente, i corrispondenti vincoli sono aggiunti al problema multi obiettivo di gestione delle scorte, che ora diventa:

$$min \quad N^{im}(0{,}05) = Max\left[\frac{x(0{,}05;90)}{Q^{im}};0\right];$$

$$min \quad N^{dis}(0{,}75) = Max\left[\frac{x(0{,}75;90)}{-Q^{dis}};0\right] = Max\left[\frac{x(0{,}75;90)}{Q^{im}+K^{Min}-K^{Max}};0\right];$$

$$min \quad N^{dis}(0{,}95) = Max\left[\frac{x(0{,}95;90)}{-Q^{dis}};0\right] = Max\left[\frac{x(0{,}95;90)}{Q^{im}+K^{Min}-K^{Max}};0\right];$$

$$min \quad Sh(0{,}05) = Max\left[x(0{,}05;\,2) - K^{Min};0\right];$$

$$min \quad Sh(0{,}25) = Max\left[x(0{,}25;\,2) - K^{Min};0\right];$$

$$min \quad So(0{,}95) = Max[K^{Max} - x(0{,}95;\,2);\,K^{Max}]\,;$$

soggetti a

$Q^{im} \geq \frac{x(0{,}25;\,90)}{2{,}28}$; (condizione $N^{im}(0{,}25) \leq 2{,}28$ nella regola 1'.1);

$K^{Max} \leq x(0{,}75;\,2) + 39{,}25$; (condizione $So(0{,}75) \leq 39{,}25$ nella regola 2'.2);

$K^{Min} \geq x(0{,}25;\ 2) - 2{,}76$; (condizione $Sh(0{,}25) \leq\ 2{,}76$ nella regola 2'.2);

$K^{Min} \geq x(0{,}05;\ 2) - 6{,}46$; (condizione $Sh(0{,}05) \leq\ 6{,}46$ nella regola 3'.4);

$Q^{im} + K^{Min} - K^{Max} \geq \frac{x(0{,}95;\,90)}{5{,}56}$; (condizione $N^{dis}(0{,}75) \leq 5{,}56$ nella regola 3'.4).

Viene generato un nuovo campione di strategie rappresentative nella nuova regione ammissibile, come mostrato nella Tavola 21, e proposte al manager per la valutazione.

Tavola 21

Alternative	Q^{Im}	K^{Min}	K^{max}	N^{Im} (0.05)	N^{Im} (0.25)	N^{Dis}(0.95)	N^{Dis}(0.75)	*Sh* (0.05)	*Sh* (0.25)	*So* (0.95)	*So* (0.75)
h1'''	17.49	7.86	33.74	4.46	1.83	9.30	3.82	3.77	0.00	45.37	38.51
h2'''	14.12	5.26	27.47	5.52	2.27	9.65	3.96	6.37	0.00	39.10	32.24
h3'''	14.15	5.47	28.79	5.51	2.26	8.51	3.49	6.16	0.00	40.42	33.56
h4'''	18.48	7.32	33.19	4.22	1.73	10.55	4.33	4.31	0.00	44.83	37.96
h5'''	14.07	5.17	26.43	5.55	2.27	10.85	4.45	6.46	0.00	38.06	31.20
h6'''	14.04	5.30	26.13	5.56	2.28	11.48	4.71	6.33	0.00	37.76	30.90
h7'''	15.22	5.56	30.87	5.13	2.10	7.73	3.17	6.07	0.00	42.50	35.64
h8'''	15.23	5.30	27.81	5.12	2.10	10.72	4.39	6.34	0.00	39.44	32.58
h9'''	15.39	8.13	33.73	5.07	2.08	7.64	3.13	3.50	0.00	45.36	38.50
h10'''	14.32	5.62	25.72	5.45	2.23	13.50	5.54	6.01	0.00	37.35	30.48
h11'''	14.04	5.17	25.12	5.56	2.28	13.23	5.42	6.46	0.00	36.75	29.89
h12'''	14.77	5.49	26.29	5.28	2.17	12.93	5.30	6.14	0.00	37.92	31.06
h13'''	15.83	5.32	32.26	4.93	2.02	7.02	2.88	6.31	0.00	43.89	37.03
h14'''	14.73	6.20	33.80	5.30	2.17	6.06	2.49	5.43	0.00	45.43	38.56
h15'''	15.78	7.61	32.22	4.94	2.03	8.83	3.62	4.02	0.00	43.85	36.99
h16'''	20.23	5.47	33.92	3.86	1.58	9.50	3.89	6.16	0.00	45.55	38.69

Il manager seleziona la strategia h4''' presentata in Tavola 22 come la più soddisfacente, stoppando la procedura.

Tavola 22

Alternative	Q^{Im}	K^{Min}	K^{max}	N^{Im} (0.05)	N^{Im} (0.25)	N^{Dis}(0.95)	N^{Dis}(0.75)	*Sh* (0.05)	*Sh* (0.25)	*So* (0.95)	*So* (0.75)
h4'''	18.48	7.32	33.19	4.22	1.73	10.55	4.33	4.31	0.00	44.83	37.96

3. IMO-DRSA APPLICATA A UN PROBLEMA STOCASTICO MULTI PRODOTTO DI GESTIONE DELLE SCORTE.

3.1 MODELLO TEORICO

Noi consideriamo la politica di controllo delle scorte di un paniere di prodotti che hanno in comune lo stesso fornitore.

Rispetto al problema affrontato sopra, in questo caso ci troviamo a dover gestire le scorte di un paniere di *N* prodotti perfettamente divisibili ciascuno dei quali valutabile rispetto a *L* unità di misura.

Ciò equivale a dire che per ogni *j-esimo* prodotto è possibile sempre specificare la matrice $L x L$ dei rapporti di scambio fra le differenti unità di misura

$$\Gamma_j = \begin{bmatrix} \gamma_j^{1,1} & \cdots & \gamma_j^{1,L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_j^{L,1} & \cdots & \gamma_j^{L,L} \end{bmatrix}$$

dove $\gamma_j^{l,z} = \frac{G_j^l}{G_j^z}$ con G_j^s e G_j^z che rappresentano le valutazioni di una medesima entità del *j-esimo* prodotto rispetto alle unità di misura $l, z = 1,2 \dots, L$.

Segue che

$$\Gamma_j = \begin{bmatrix} \gamma_j^{1,1} & \cdots & \gamma_j^{1,L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_j^{L,1} & \cdots & \gamma_j^{L,L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_j^{1,2} & \cdots & \gamma_j^{1,L} \\ \gamma_j^{2,1} & 1 & \ddots & \gamma_j^{2,L} \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \gamma_j^{L,1} & \gamma_j^{L,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \gamma_j^{1,L} \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1/\gamma_j^{1,L} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ai fini della confrontabilità degli *N* beni in esame, è utile scegliere una delle *L* unità di misura come strumento di valutazione primario; definiamo tale unità di misura come numeraria.

Nella realtà operativa, infatti, e in particolare per beni perfettamente divisibili, è di norma scegliere un'unità di misura primaria come prima determinante comune di categorie omogene di bene; ad esempio è possibile parlare di un kilogrammo di farina come è possibile parlare allo stesso modo di un kilogrammo di zucchero o di caffè. A prima vista invece potrebbe essere meno intuitivo parlare di un kilogrammo di acqua o di un kilogrammo di aranciata come potrebbe essere meno intuitivo attribuire la qualità di numeraria a una valuta monetaria come l'Euro o il Dollaro. In realtà, sta alla discrezionalità del decisore la fissazione dell'unità di misura numeraria; ciò naturalmente in base al contesto di scelta di riferimento che è influenzato in primo luogo dalla natura (fisica prima ancora che merceologica) degli *N* bene in esame e dalla stabilità dell'unità di misura che si vuole adoperare.

Una volta aver posto con $l = 1$, l'unità di misura numeraria, è possibile definire la matrice LxN

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varpi_1^2 & \ddots & \cdots & \varpi_N^2 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \varpi_1^L & \varpi_2^L & \cdots & \varpi_N^L \end{bmatrix}$$

e le sue sottomatrici $\Omega_l = \{\varpi_1^l, \varpi_2^l, \dots \dots \varpi_N^l\}$, $l = 2,3, \dots . L$ dove $\varpi_j^l = \gamma_j^{l,1} \in \mathcal{R}^+$, cioè la valutazione di un'unità numeraria del j-esimo prodotto in termini di una delle atre $L - 1$ unità di misura considerate. Per comprendere a pieno questo concetto si pensi al fatto che 1 kilogrammo di paglia rispetto a 1 kilogrammo di oro ha un volume misurabile per esempio in m^3 di gran lunga superiore[1].

Definiamo la valutazione dell'entità dei prodotti in termini di unità di misura numeraria come valutazione numeraria. Inoltre, nel corso della trattazione, una volta scelta l'unità di misura numeraria, per semplicità espositiva si utilizzeranno indistintamente la notazione ”misura numeraria", "livello di scorte" o "stock in magazzino".

Si suppone che ognuno degli *N* articoli sia sottoposto a una domanda stocastica $d_t^{j,l} \in \mathcal{R}^+$ con valore atteso $v_t^{j,l} = \delta^{j,l} t$ nell'intervallo di tempo $[b; b + t]$, $j = 1, \dots N$, $l = 1, \dots L$, $b, t \in \mathcal{R}^+$, $\delta^j \in \mathcal{R}^+$ costante[2].Per semplicità espositiva poniamo $d_t^{j,1} = d_t^j, v_t^{j,1} = v_t^j, \delta^{j,1} = \delta^j$.

[1] Si rileva che il passaggio da un'unità di misura all'altra è possibile in maniera più o meno indolore a caratteristiche fisiche o di altro tipo inalterate; osservazioni e approfondimenti sull'instabilità della materia vengono considerati in questa sede trascurabili.

[2] La notazione utilizzata tende ad evidenziare come per ognuno degli *N* prodotti abbia senso parlare specie in questo contesto di domanda, di valore atteso o di qualsiasi altra quantità solo nei termini di una qualche unità di misura l.

Come nei due modelli proposti in precedenza, per tutti i differenti articoli si ha un unico pipeline period τ supposto essere anche qui costante; ciò verosimilmente in dipendenza dall'unicità del fornitore.

La combinazione di questi due fattori obbliga ad effettuare una precisa scelta di campo; proponiamo infatti, una gestione delle scorte per aggregato allo scopo di circoscrivere le complessità del caso e d'altronde, essendo obbligati in questo da motivazioni che appaiono senza perdita di generalità ragionevoli nel rapporto di relationship economico-commerciale fra impresa e fornitore.

Dall'altro lato, in un'ottica prettamente commerciale e orientata al controllo del rischio di shortage, l'approccio per aggregato alla gestione multi prodotto può specie in certi contesti risultare estremamente limitativo; vi risiede infatti, un più concreto rischio di perdere di vista gli effetti intangibili e di difficile immediata valutazione dello shortage anche di un solo degli N prodotti in esame. Non capita di rado infatti. che molte aziende mantengano scorte di uno o più prodotti non tanto per trarne profitto quanto invece allo scopo di complementarietà degli altri più profittevoli. Spesso quindi in certi ambiti commerciali pur in una logica di insieme non può essere trascurata la specificità dei singoli articoli.

Fatta questa dovuta precisazione, introduciamo $\boldsymbol{d}_t^l = \varpi_1^l d_t^1 + \varpi_2^l d_t^2 + \cdots + \varpi_N^l d_t^N$, che corrisponde alla domanda congiunta degli N prodotti aggregati con riferimento all' *l-esima* unità di misura $l = 2 \dots \dots L$ per mezzo delle componenti del vettore $\Omega_l = \{\varpi_1^l, \varpi_2^l, \dots \dots \varpi_N^l\}$.

Si noti la domanda aggregata valutata rispetto all'unità di misura numeraria è espressa da $\boldsymbol{d}_t = d_t^1 + d_t^2 + \cdots + d_t^N$; che corrisponde come era logico pensare alla sommatoria semplice delle d_t^j.

Matematicamente $\boldsymbol{d}_t^l$ è una funzione lineare o meglio una combinazione lineare delle d_t^j per mezzo delle ϖ_j^l; l'altra faccia della medaglia di questo aspetto è che a parità delle ϖ_j^l è possibile ottenere un medesimo valore di $\boldsymbol{d}_t^l$ al variare delle $\boldsymbol{d}_t^j$.

E' interessante sottolineare come ognuna delle $\boldsymbol{d}_t^l$ $l = 1 \dots \dots L$ può essere vista essa stessa come processo stocastico. Ipotizziamo che $\boldsymbol{d}_t^l \in \mathcal{R}^+$, $l = 1 \dots \dots L$ con valore atteso $v_t^l = \delta^l t$ nell'intervallo di tempo $[b;\ b+t]$, $b, t\ \in \mathcal{R}^+$, $\delta^l \in \mathcal{R}^+$ costante (indipendenza da fattori di trend).

Andando ancor più nel dettaglio approssimiamo ogni processo $\boldsymbol{d}_t^l$ usando un processo di Poisson.

Secondo tale processo, la probabilità che la domanda d_t^l sia non più grande che $x \in \mathcal{N}$ è data da

$$P\left(\boldsymbol{d}_t^l\ \leq \mathrm{x}\right) = \sum_{d_t^l=0}^{x} \frac{e^{-v_t^l}(v_t^l)^x}{\boldsymbol{d}_t^l!} \qquad (\mathrm{i}l) \qquad l = 1 \dots \dots L\,.$$

Di conseguenza la probabilità di una domanda più grande che $x \in \mathcal{N}$ è

$$P\left(\boldsymbol{d}_t^l\ \geq \mathrm{x}+1\right) = \sum_{d_t^l=x+1}^{+\infty} \frac{e^{-v_t^l}(v_t^l)^x}{\boldsymbol{d}_t^l!} = 1 - P\left(d_t^l\ \leq \mathrm{x}\right)$$
$$= 1 - \sum_{d_t^l=0}^{x} \frac{e^{-v_t^l}(v_t^l)^x}{\boldsymbol{d}_t^l!} \qquad (\mathrm{ii}l)$$

$l = 1 \dots \dots L\,.$

Sia $\Pi = \{\, P^i, i = 1,2, \dots, M\,\}$ un insieme di alcuni livelli di probabilità considerati appropriati.

Per ogni $P^i \in \Pi$, $i = 1,2, \dots M$, e per ogni $t\ \in\ \mathcal{R}^+$, $x^l\left(P^i, t\right)\ \in\ \mathcal{N}$ è il quantile destro della domanda aggregata con riferimento alla caratteristica l in un periodo di durata $t\ \in\ \mathcal{R}^+$, cioè $P\left(\boldsymbol{d}_t^l \geq\ x^l\left(P^i, t\right)\right) =\ P^i$. Questo significa che la domanda aggregata con riferimento alla caratteristica *l* in un periodo di durata t è almeno $x^l(P^i, t)$ con probabilità P^i.

L'orizzonte temporale su cui operiamo è $[a, a + T]$.

Date le ipotesi appena poste, introduciamo un vettore $\boldsymbol{S} = (s_1, s_2 \dots s_N)$ costituito dalle valutazioni numerarie degli *N* articoli in magazzino in un qualsiasi istante $b \in \mathcal{R}^+$. Fissiamo $\boldsymbol{S}$ come vettore estremo superiore degli stock dei differenti prodotti trattati.

Poiché ognuno degli *N* prodotti è sottoposto a una domanda d_t^j, il livello delle scorte dai valori in $\boldsymbol{S}$ passa a $\boldsymbol{H}^N = \boldsymbol{H}^N(s_1 - d_{t^{*+}}^1, s_2 - d_{t^{*+}}^2, \dots, s_N - d_{t^{*+}}^N)$ appartenente al cono di dominanza inferiore di $\boldsymbol{S} = (s_1, s_2 \dots s_N)$, trascorso un periodo di tempo espresso dalla funzione

$t^{*+} = t(t^*, t^-) = Min[t^*, t^-] \in \mathcal{R}^+$,

$t^* \in \mathcal{R}^+$,

$t^- = Min[t_1^-(s_1 = d_{t_1^-}^1), t_2^-(s_2 = d_{t_2^-}^2), \dots, t_N^-(s_N = d_{t_N^-}^N)] \in \mathcal{R}^+$.

E' importante sottolineare come, la valutazione numeraria complessiva del magazzino prima e dopo essere trascorso $t \in \mathcal{R}^+$ possa essere valutata come sommatoria semplice delle componenti del vettore $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{H}^N$, cioè

$\boldsymbol{S}_{St} = s_1 + s_2 + \dots + s_N$

e

$\boldsymbol{H}_{St}^N = s_1 - d_{t^{*+}}^1 + s_2 - d_{t^{*+}}^2 + \dots + s_N - d_{t^{*+}}^N$ con $s_j - d_{t^{*+}}^j \geq 0 \; j = 1, \dots, N$

E' corretto dire che trascorso $t \in \mathcal{R}^+$ la valutazione numeraria del magazzino abbia subito un decremento

$\Delta \boldsymbol{S}t = \boldsymbol{S}_{St} - \boldsymbol{H}_{St}^N$

$$= s_1 + s_2 + \cdots + s_N - \left(s_1 - d_{t^{*+}}^1 + s_2 - d_{t^{*+}}^2 + \cdots + s_N - d_{t^{*+}}^N\right) = d_{t^{*+}}^1 + d_{t^{*+}}^2 + \cdots + d_{t^{*+}}^N = \boldsymbol{d}_{t^{*+}}$$

con $s_j - d_{t^{*+}}^j \geq 0 \; j = 1, \ldots, N \quad (\psi 1)$

Allo stesso modo, rivalutando $\boldsymbol{S}$ in termini delle $L - 1$ unità di misura, si ha

$$\Delta \boldsymbol{St}^l = \boldsymbol{S_{St}}^l - \boldsymbol{H_{St}^N}^l$$

$$= \varpi_1^l s_1 + \varpi_2^l s_2 + \cdots + \varpi_N^l s_N - \varpi_1^l (s_1 - d_{t^{*+}}^1) - \varpi_2^l (s_2 - d_{t^{*+}}^2) - \cdots - \varpi_N^l (s_N - d_{t^{*+}}^N) = \varpi_1^l d_{t^{*+}}^1 + \varpi_2^l d_{t^{*+}}^2 + \cdots + \varpi_N^l d_{t^{*+}}^N = \boldsymbol{d}_{t^{*+}}^l$$

con $s_j - d_{t^{*+}}^j \geq 0 \; j = 1, \ldots, N,$

$l = 2, \ldots, L. \; (\psi l).$

E’ evidente che per $l = 1$ la (ψl) restituisce la $(\psi 1)$.

Quanto detto fino ad ora sulle caratteristiche delle domande aggregate in termini delle L unità di misura e le relazioni $(\psi l) \; l = 1, \ldots, L$ fanno evincere la correlazione positiva fra le $\boldsymbol{d}_t^l \; l = 1, \ldots, L$ facendo a meno di specificarne i diversi gradi di correlazione.

Il ragionamento alla base delle $(\psi l) \; l = 1, \ldots, L$ implica che il decisore, una volta fissato (o scelto) $\boldsymbol{S}$, possa a sua volta fissare (o scegliere di attendere) decrementi aggregati del magazzino $d^l = \boldsymbol{d}_\theta^l, \; l = 1, \ldots, L, \quad 0 < \theta < T$ scattati i quali effettuare ordini compensatori degli N prodotti allo scopo di ricostituire i livelli delle scorte in $\boldsymbol{S} = (s_1, s_2 \ldots s_N)$ a lordo della domanda di ciascun prodotto nel pipeline period τ.

Più precisamente, gli ordini compensatori $\boldsymbol{s}_j - k_j \; \forall \, j = 1, \ldots N$ espressi in termini di numerario scattano qualora una delle L valutazioni delle scorte in aggregato soddisfi la condizione

$$\boldsymbol{K_{St}^N}^1 = \varpi_1^l k_1 + \varpi_2^l k_2 + \cdots + \varpi_N^l k_N = \varpi_1^l \boldsymbol{s}_1 + \varpi_2^l \boldsymbol{s}_2 + \cdots + \varpi_N^l \boldsymbol{s}_N - \boldsymbol{d}^l$$

$l = 1,..,L$, con k_j $j = 1,...,N$ entità delle scorte valutata in termini di numerario al momento in cui si effettua l'ordine [3].

Necessariamente si impone per coerenza economica la seguente disequazione

$\varpi_j^l s_j \geq d^l, \forall j = 1,...N \;\; l = 1,..,L \;\; (1*)$.

Non valendo la $(1*)$, infatti, per effetto delle domande d_t^j a cui sono sottoposti gli $j = 1,...N$ articoli in esame, in taluni casi, la politica di ordine immediato successivo a un decremento $\boldsymbol{d^l}$ si potrebbe avere solo per $\varpi_j^l s_j < d^l$; il che è incompatibile con la natura economica del problema.

La $(1*)$ può essere allentata introducendo la seguente relazione di coerenza economica debole

$\varpi_1^l \boldsymbol{s_1} + \varpi_2^l \boldsymbol{s_2} + \cdots + \varpi_N^l \boldsymbol{s_N} \geq \boldsymbol{d^l} \;\; (2*)$

in base alla quale, gli ordini compensatori espressi in termini di numerario $\boldsymbol{s_j} - k_j \; \forall j = 1,...N$ scattano qualora le valutazioni delle scorte in aggregato tramite le L unità di misura soddisfino le condizioni

$$\boldsymbol{K_{St}^N}^{\,2} = \begin{cases} \varpi_1^l k_1 + \varpi_2^l k_2 + \cdots + \varpi_N^l k_N > \varpi_1^l \boldsymbol{s_1} + \varpi_2^l \boldsymbol{s_2} + \cdots + \varpi_N^l \boldsymbol{s_N} - \boldsymbol{d^l} & \text{per un } k_j = 0 \\ \varpi_1^l k_1 + \varpi_2^l k_2 + \cdots + \varpi_N^l k_N = \varpi_1^l \boldsymbol{s_1} + \varpi_2^l \boldsymbol{s_2} + \cdots + \varpi_N^l \boldsymbol{s_N} - \boldsymbol{d^l} & \forall k_j > 0 \end{cases}$$

$l = 1,..,L$ con k_j $j = 1,...,N$ entità delle scorte valutata in termini di numerario al momento in cui si effettua l'ordine.

Viene in evidenza come in linea di massima sia per la $\boldsymbol{K_{St}^N}^{\,1}$ sia per la $\boldsymbol{K_{St}^N}$ possa verificarsi la situazione limite di riordino con un $k_j = 0$, vale a dire che gli ordini compensatori possano scattare solo quando il livello delle scorte di uno dei prodotti sia ormai giunto a zero. In ottica commerciale una tale circostanza

[3] Ponendo in grassetto le $\boldsymbol{s_j}$ e le $\boldsymbol{d^l}$ si vuole evidenziare il fatto che una volta sceltone il valore, queste fanno si che i secondi membri della $\boldsymbol{K_{St}^N}$ siano in entrambi i casi delle costanti.

rappresenta il concretizzarsi dei limiti dalla gestione per aggregato anticipati all'inizio del paragrafo: si tratta di un limite la cui rilevanza dipende in primo luogo dal grado di sostituibilità dei prodotti in esame oltre che dall'ottica e dagli obiettivi con cui si conduce la politica di gestione delle scorte.

Nel problema di inventory management multi item posto, il vettore $\boldsymbol{\Sigma} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{d}^1, \boldsymbol{d}^2, .., \boldsymbol{d}^L) = (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \dots \boldsymbol{s}_N, \boldsymbol{d}^1, \boldsymbol{d}^2, .., \boldsymbol{d}^L)$ può essere quindi considerato come variabile decisionale da modulare a seconda dei rischi connessi; rischio di ordine, rischio di mantenimento e rischio di shortage. In tal caso, però, ognuna delle tre categorie di rischio sarà esaminata per aggregato alla luce delle differenti $l = 1 \dots \dots L$ unità di misura considerate.

Rischio di ordine, rischio di mantenimento e rischio di shortage possono, infatti, essere ancora tradotti nelle funzioni di un problema di ottimizzazione multiobiettivo simile ai due visti in precedenza.

Consideriamo le seguenti funzioni obiettivo da minimizzare:

- i quantili destri di ordini nell'intervallo di tempo $[a, a + T]$, che sono attesi con probabilità $P^i \in \Pi$ con riferimento all' unità di misura l:

$$N(P^i, l) = \frac{x^l(P^i, T)}{d^l} \qquad i = 1,2, \dots . M \quad l = 1 \dots \dots L \quad (1.i.l);$$

- i quantili destri del massimo livello di stock aggregato legati alle probabilità $P^i \in \Pi$ con riferimento all' unità di misura l:

$$St^{Max}(P^i, l) = max[S\Omega_l^T - x^l(P^i, \tau); 0] =$$

$$max[\boldsymbol{s}_1 \varpi_1^l + \boldsymbol{s}_2 \varpi_2^l + \cdots \boldsymbol{s}_N \varpi_N^l - x^l(P^i, \tau); 0]$$

$$\begin{matrix} i = 1,2, \dots . M \quad l = 1 \dots \dots L \\ j = 1 \dots \dots . N \end{matrix} \qquad (2.i.l);$$

- i quantili destri del minimo livello di stock aggregato legati alle probabilità $P^i \in \Pi$ con riferimento all' unità di misura l:

$$St^{Min}(P^i,l) = max\left[S\Omega_l^T - \boldsymbol{d^l} - x^l(P^i,\tau);0\right] =$$

$$max\left[\boldsymbol{s_1}\varpi_1^l + \boldsymbol{s_2}\varpi_2^l + \cdots \boldsymbol{s_N}\varpi_N^l - \boldsymbol{d^l} - x^l(P^i,\tau);0\right]$$

$$\begin{matrix} i = 1,2, \dots . M \quad l = 1 \dots \dots L \\ j = 1 \dots \dots . N \end{matrix} \qquad (3.i.l);$$

- i quantili destri di shortage aggregato legati alle probabilità $P^i \in \Pi$ con riferimento all' unità di misura l:

$$Sh(P^i,l) = max\left[x^l(P^i,\tau) - \left(S\Omega_l^T - \boldsymbol{d^l}\right);0\right] =$$

$$max\left[x^l(P^i,\tau) - \left(\boldsymbol{s_1}\varpi_1^l + \boldsymbol{s_2}\varpi_2^l + \cdots \boldsymbol{s_N}\varpi_N^l - \boldsymbol{d^l}\right);0\right]$$

$$\begin{matrix} i = 1,2, \dots . M \quad l = 1 \dots \dots L \\ j = 1 \dots \dots . N \end{matrix} \qquad (4.i.l);$$

Queste funzioni intercorrelate rappresentano misure dei differenti rischi che un inventory manager affronta e deve minimizzare allo stesso tempo; quindi, applicando l'IMO DRSA, le funzioni $(1.i.l)$, $(2.i.l)$, $(3.i.l)$ e $(4.i.l)$ corrispondono agli attributi condizionali.

Analiticamente l'inventory problem può essere espresso come segue:

$$min \qquad N(P^i,l) = \frac{x^l(P^i,\tau)}{d^l},$$

$$min \qquad St^{Max}(P^i,l) = max\left[\boldsymbol{S\Omega_l}^{\boldsymbol{T}} - x^l(P^i,\tau);0\right],$$

$$min \qquad St^{Min}(P^i,l) = max\left[\boldsymbol{S\Omega_l}^{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{d^l} - x^l(P^i,\tau);0\right],$$

$$min \qquad Sh(P^i,l) = max\left[x^l(P^i,\tau) - \left(\boldsymbol{S\Omega_l}^{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{d^l}\right);0\right],$$

$i = 1,2, \dots . M \quad l = 1 \dots \dots L$ soggette ai vincoli sul range di variazione delle variabili decisionali e in particolare ponendo come vincolo di coerenza $\boldsymbol{d^l} \leq \boldsymbol{s_j}\varpi_j^l$ per $j = 1, \dots \dots N$ $l = 1 \dots \dots L$.

L'applicazione dell' IMO DRSA al problema multi obiettivo visto sopra implica un'interazione con l'inventory manager. Nella fase computazionale, viene generato un insieme di strategie esemplificative e viene presentato al manager. Nella fase decisionale, il manager indica le strategie che all'interno dell' insieme di strategie esemplificative sono relativamente buone. Questa informazione sulle preferenze è sfruttata per indurre un insieme di regole decisionali tramite l'uso della DRSA. Le regole rappresentano le preferenze del manager espresse sottoforma di strategie.

Esse hanno la seguente sintassi

"$Se\ cond_1\ \ e/o\ cond_2 \ldots \ldots e/o\, cond_z$ *sono soddisfatte, allora la strategia è buona",*

dove $cond_i,\ \ i = 1, \ldots \ldots, Z$, può essere una o più delle seguenti condizioni $N(P^i, l) \leq N^*;\ St^{Max}(P^i, l) \leq St^{Max*};\ St^{Min}(P^i, l) \leq St^{Min*}; Sh(P^i, l) \leq Sh^*$.

In questa fase, il manager è invitato a selezionare fra queste regole quella che è la più importante per lui, definita regola r. Le condizioni nella regola *r* definiscono un nuovo insieme di vincoli che devono essere soddisfatti in ordine a prendere una buona decisione:

- le condizioni $N(P^i, l) \leq N^*$ definiscono vincoli del tipo $\boldsymbol{d^l} \geq \frac{x^l(P^i, T)}{N^*}$;
- le condizioni $St^{Max}(P^i, l) \leq St^{Max*}$ definiscono vincoli del tipo $s_1\varpi_1^l + s_2\varpi_2^l + \cdots s_N\varpi_N^l \leq St^{Max*} + x^l(P^i, \tau)$;
- le condizioni $St^{Min}(P^i, l) \leq St^{Min*}$ definiscono vincoli del tipo $s_1\varpi_1^l + s_2\varpi_2^l + \cdots s_N\varpi_N^l - \boldsymbol{d^l} \leq St^{Min*} + x^l(P^i, \tau)$;
- le condizioni $Sh(P^i, l) \leq Sh^*$ definiscono vincoli del tipo $s_1\varpi_1^l + s_2\varpi_2^l + \cdots s_N\varpi_N^l - \boldsymbol{d^l} \geq x^l(P^i, \tau) - Sh^*$

per $j = 1, \ldots \ldots N$, $l = 1 \ldots \ldots L$

Quindi le condizioni di una regola selezionata *r* sono convertite in corrispondenti vincoli da considerare nel successivo stadio computazionale allo scopo della generazione di un nuovo insieme di strategie.

Senza perdita di generalità si può imporre che in termini numerici si debba avere

$\boldsymbol{d^1} = \boldsymbol{d^2} =..= \boldsymbol{d^L} = \boldsymbol{d}$

Si ammette cioè che il decisore allo scopo di ridurre le variabili decisionali scelga che decrementi di diverso tipo abbiano lo stesso valore numerico; ciò può essere ritenuto ammissibile specie nel caso in cui la reciproca natura degli $\boldsymbol{N}$ beni in questione e gli ordini di grandezza fra L unità di misura non siano troppo differenti. In tal modo, la nostra variabile decisionale diviene $\boldsymbol{\Sigma} = (\boldsymbol{S}; \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2} \dots \boldsymbol{s_N}, \boldsymbol{d})$, trasformando l'inventory problem multi obiettivo appena sopra presentato nel seguente:

$$\min \quad N(P^i, l) = \frac{x^l(P^i, T)}{d},$$

$$\min \quad St^{Max}(P^i, l) = max\left[\boldsymbol{S\Omega_l}^{\boldsymbol{T}} - x^l(P^i, \tau); 0\right],$$

$$\min \quad St^{Min}(P^i, l) = max\left[\boldsymbol{S\Omega_l}^{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{d} - x^l(P^i, \tau); 0\right],$$

$$\min \quad Sh(P^i, l) = max\left[x^l(P^i, \tau) - (\boldsymbol{S\Omega_l}^{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{d}); 0\right],$$

$i = 1,2, \dots . M \quad l = 1 \dots \dots L$ soggette ai vincoli sul range di variazione delle variabili decisionali e in particolare ponendo come vincolo di coerenza $\boldsymbol{d} \leq \boldsymbol{s_j}\varpi_j^l$ per $j = 1, \dots \dots N$, $l = 1 \dots \dots L$.

Si noti che è sempre, possibile ricondurre il problema di gestione delle scorte di un prodotto (presentato nel paragrafo 1 di questo capitolo) a un caso particolare della gestione multi item.

Infatti, per $j = 1, \boldsymbol{S} = \{s_1\}$ e $\boldsymbol{\Omega_l} = \{\varpi_1^l\}$, $l = 1 \dots \dots L$ si ha

- i quantili destri di ordini nell'intervallo di tempo $[a, a+T]$, che sono attesi con probabilità $P^i \in \Pi$ con riferimento all'unità di misura l:

$$N(P^i, l) = \frac{x^l(P^i, T)}{\boldsymbol{d}^l} \qquad i = 1,2, \dots . M \quad l = 1 \dots \dots L \qquad (1.i.l);$$

- i quantili destri del massimo livello di stock aggregato legati alle probabilità $P^i \in \Pi$ con riferimento all'unità di misura l:

$$St^{Max}(P^i, l) = max[s_1 \varpi_1^l - x^l(P^i, \tau); 0]$$

$$i = 1,2, \dots . M \quad l = 1 \dots \dots L \qquad (2.i.l);$$

- i quantili destri del minimo livello di stock aggregato legati alle probabilità $P^i \in \Pi$ con riferimento all'unità di misura l:

$$St^{Min}(P^i, l) = max\left[s_1 \varpi_1^l - \boldsymbol{d}^l - x^l(P^i, \tau); 0\right]$$

$$i = 1,2, \dots . M \quad l = 1 \dots \dots L \qquad (3.i.l);$$

- i quantili destri di shortage aggregato legati alle probabilità $P^i \in \Pi$ con riferimento all'unità di misura l:

$$Sh(P^i, l) = max\left[x^l(P^i, \tau) - \left(s_1 \varpi_1^l - \boldsymbol{d}^l\right); 0\right]$$

$$i = 1,2, \dots . M \quad l = 1 \dots \dots L \qquad (4.i.l);$$

Per $l = 1$, ponendo $K + Q = \boldsymbol{s_1}$, $Q = \boldsymbol{d}^l$ $\boldsymbol{d}^l \leq s_1$, $K = s_1 - \boldsymbol{d}^l$ ritorniamo al problema mono prodotto presentato nel paragrafo sopra[4].

3.2 ESEMPIO DIDATTICO

In questo paragrafo, noi presentiamo un esempio didattico illustrante la nostra metodologia.

[4] La riconduzione appare incompleta solo perché nella parte sul multi item si è scelto volutamente di non inserire la funzione rischio di shortage presente nella parte relativa al mono prodotto allo scopo di non appesantire l'analisi con un ulteriore funzione obiettivo ritenibile ridondante rispetto alla funzione shortage.

Poniamo $N = 3$ e $L = 4$. In particolar modo, scegliamo di considerare come unità di misura numeraria il costo di acquisto espresso in euro e come restanti unità di misura, il metro cubo per il volume, il kilogrammo per il peso, l' euro per il prezzo di vendita[5]. Denotiamo le quattro unità di misura con $€^c$ per il costo di acquisto, m^3 per il metro cubo, kg per kilogrammo, $€^p$ per il prezzo di vendita.

Si pone inoltre

$\boldsymbol{\Omega}_{l=1=€^c} = \{\varpi_1^{€^c}, \varpi_2^{€^c}, \varpi_3^{€^c}\} = \{1, 1, 1\}$

$\boldsymbol{\Omega}_{l=2=m^3} = \{\varpi_1^{m^3}, \varpi_2^{m^3}, \varpi_3^{m^3}\} = \{2, 1, 3\}$,

$\boldsymbol{\Omega}_{l=3=kg} = \{\varpi_1^{kg}, \varpi_2^{kg}, \varpi_3^{kg}\} = \{1, 3, 2\}$

$\boldsymbol{\Omega}_{l=4=€^p} = \{\varpi_1^{€^p}, \varpi_2^{€^p}, \varpi_3^{€^p}\} = \{1, 2, 3\}$.

Per scelta apertamente discrezionale, l'unità di misura numeraria non verrà considerata ai fini del problema di gestione delle scorte; questa quindi è stata introdotta sopra solo come punto di riferimento valutativo[6].

I tre prodotti sono hanno lo stesso fornitore, e resi disponibili per l'azienda in un pipeline period τ di 15 giorni. Consideriamo inoltre, un orizzonte temporale T di scelta per il decisore di 90 giorni. In tale orizzonte, supponiamo che l'azienda fronteggi una domanda attesa aggregata di 900 m^3, di 1080 kg e di 1350 $€^p$. Conseguentemente, in linea con le assunzioni di regolarità e di non soggezione a trend fatte nel precedente paragrafo, si suppone che le domande attese aggregate in τ rispetto al volume, al peso e al prezzo siano rispettivamente di 150 m^3, 180 kg e 225$€^p$.

Scegliamo per comodità, in base a quanto detto alla fine del precedente paragrafo di imporre

[5] Si suppone che l'azienda operi in un mercato concorrenziale in assenza di inflazione; in tal modo il prezzo e il costo di acquisto espressi in euro possono essere ritenute un unità di misura stabili.
[6] Nulla osta che si sarebbe invece potuto farla entrare fra le variabili in gioco.

$$d^{m^3} = d^{€^p} = d^{kg} = d.$$

Ammettendo quindi, un unico valore numerico per le tre tipologie di decremento e imponendo che debba valere la (1*) poniamo il decisore nella condizione di effettuare l'ordine in base alla condizione $K_{St}^{N\ l}$.

Consideriamo il seguente insieme di appropriate misure di probabilità $\Pi = \{0{,}05;\ 0{,}25;\ 0{,}75;\ 0{,}95\}$ e i corrispondenti insieme di appropriati quantili destri di domanda $x^{m^3}(P^i,\tau)$ e $x^{m^3}(P^i,T)$, $x^{€^p}(P^i,\tau)$ e $x^{€^p}(P^i,T)$, $x^{kg}(P^i,\tau)$ e $x^{kg}(P^i,T)$ con $x^l(P^i,t) \in \mathcal{N}$, $P^i \in \Pi$.

Poichè supponiamo che l'utilizzatore sia avverso al rischio, per ogni funzione obiettivo selezioniamo un appropriato sottoinsieme di Π tenendo conto delle situazioni più critiche, cioè le probabilità correlate ai peggiori risultati per la funzione obiettivo considerata. Conseguentemente, selezioniamo

- $\Pi_1 = \{\ 0{,}05\}$ per $N(P^i;l)$,
- $\Pi_2 = \{\ 0{,}75;\ 0{,}95\}$ per $St^{Max}(P^i;l)$ e per $St^{Min}(P^i;l)$,
- $\Pi_3\ = \{\ 0{,}05;\ 0{,}25\ \}$ per $Sh(P^i;l)$.

In una maniera analoga, facciamo con riferimento alle tre unità di misura in gioco; le selezioniamo cioè, per ogni funzione obiettivo tenendo conto delle situazioni più critiche (o almeno dal punto di vista di un ipotetico decisore). Conseguentemente, scegliamo di evidenziare come fattori preponderanti di rischio

- il volume, il prezzo di vendita e il peso per $N(P^i;l)$,
- il volume e il peso per $St^{Max}(P^i;l)$ e per $St^{Min}(P^i;l)$,
- il prezzo di vendita per $Sh(P^i;l)$.

Analiticamente, il problema può essere espresso come segue:

$min\ N(0{,}05;m^3) = \frac{x^{m^3}(0{,}05;\,90)}{\boldsymbol{d}}$;

$min\ N(0{,}05;€^p) = \frac{x^{€^p}(0{,}05;\,90)}{\boldsymbol{d}}$;

$min\ \ N(0{,}05;kg) = \frac{x^{kg}(0{,}05;\,90)}{\boldsymbol{d}}$;

$min\ St^{Max}(0{,}75;kg) = max[1\boldsymbol{s_1} + 2\boldsymbol{s_2} + 3\boldsymbol{s_3} - x^{kg}(0{,}75;15);0]$;

$min\ St^{Max}(0{,}95;m^3) = max[2\boldsymbol{s_1} + 1\boldsymbol{s_2} + 3\boldsymbol{s_3} - x^{m^3}(0{,}95;15);0]$;

$min\ St^{Min}(0{,}75;kg) = max[1\boldsymbol{s_1} + 2\boldsymbol{s_2} + 3\boldsymbol{s_3} - \boldsymbol{d} - x^{kg}(0{,}75;15);0]$;

$min\ St^{Min}(0{,}95;m^3) = max[2\boldsymbol{s_1} + 1\boldsymbol{s_2} + 3\boldsymbol{s_3} - \boldsymbol{d} - x^{m^3}(0{,}95;15);0]$;

$min\ Sh(0{,}05;€^p) = max[x^{€^p}(0{,}05;15) - (1\boldsymbol{s_1} + 3\boldsymbol{s_2} + 2\boldsymbol{s_3} - \boldsymbol{d});0]$;

$min\ Sh(0{,}25;€^p) = max[x^{€^p}(0{,}25;15) - (1\boldsymbol{s_1} + 3\boldsymbol{s_2} + 2\boldsymbol{s_3} - \boldsymbol{d});0]$;

$\boldsymbol{d} \leq\ \boldsymbol{s}_j\varpi_j^l$ per $j = 1{,}2{,}3\ l = 1 \dots \dots L$ e soggette ai vincoli sul range di variazione delle variabili decisionali.

Nella prima interazione, nell'ambito della fase computazionale, la procedura coinvolge il decisore nella definizione di un campione di strategie presentato nella Tavola 23. Per esempio, il decisore può scegliere in tale fase di minimizzare $N(0{,}05;m^3)$ (il numero di ordini in termini volumetrici con una probabilità dello 0,05) soggetto ai vincoli $St^{Max}(0{,}75;kg) \leq 500{,}00$ (scorta massima valutata in termini di peso con una probabilità dello 0,75 è non più elevata di 500,00), $St^{Max}(0{,}95;m^3) \leq 600{,}00$ (scorta massima volumetrica con una probabilità dello 0,95 è non più elevata di 600,00) e $Sh(0{,}05;€^p) \leq 0{,}00$ (shortage commerciale con probabilità dello 0,05 è non più elevato di $0{,}00$). La soluzione di questo problema di gestione mono obiettivo $(min\ \ N(0{,}05;m^3))$ avente come variabili decisionali $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{s_1},\boldsymbol{s_2},\boldsymbol{s_3})$ vettore estremo superiore degli stock valutati in termini di numerario e $\boldsymbol{d}$ decremento aggregato ammesso in termini di volume, valore commerciale e peso è mostrata come strategia $c1$ nella tavola 23. La stessa procedura, cambiando di volta in volta la funzione da minimizzare rispetto a differenti vincoli, è stata applicata in fase computazionale per ciascun alternativa di ogni interazione dell’ottimizzazione interattiva multi obiettivo proposta.

Nella prima interazione, al termine della fase computazionale, noi proponiamo quindi il campione di strategie presentato nella Tavola 23. Tale campione è da considerare rappresentativo dell' insieme di strategie Pareto ottimali. Il manager valuta le strategie alternative della Tavola 23 e indica quelle che sono relativamente buone. Questa informazione è mostrata nella Tavola 24.

Tavola 23

alternative	*s1*	*s2*	*s3*	*d*	$N(0,05;m^3)$	$N(0,05;kg)$	$N(0,05;€^P)$	$St^{max}(0,75;kg)$	$St^{max}(0,95;m^3)$	$St^{min}(0,75;kg)$	$St^{min}(0,95;m^3)$	$Sh(0,05;€^P)$	$Sh(0,25;€^P)$
c1	113.12	111.30	111.26	111.26	8.54	10.19	12.68	498.49	541.32	387.23	430.06	0.00	0.00
c2	112.63	111.63	111.64	111.58	8.51	10.16	12.65	499.80	541.81	388.22	430.23	0.00	0.00
c3	112.62	111.63	111.63	111.60	8.51	10.16	12.64	499.75	541.74	388.15	430.14	0.00	0.00
c4	21.55	21.58	21.27	20.59	46.14	55.08	68.54	0.00	0.00	0.00	0.00	141.76	126.76
c5	63.23	21.41	21.36	17.07	55.66	66.44	82.67	0.00	81.93	0.00	64.86	96.91	81.91
c6	21.02	31.15	18.52	17.43	54.52	65.08	80.98	0.00	0.00	0.00	0.00	115.91	100.91
c7	104.49	107.10	104.44	104.40	9.10	10.86	13.52	461.03	499.42	356.62	395.01	0.00	0.00
c8	104.79	105.43	104.81	104.76	9.07	10.83	13.47	459.09	499.45	354.34	394.69	0.00	0.00
c9	104.96	105.05	104.88	104.79	9.07	10.82	13.47	458.70	499.62	353.91	394.83	0.00	0.00
c10	18.57	50.07	18.68	17.27	54.99	65.65	81.68	3.75	13.25	0.00	0.00	61.13	46.13
c11	22.62	29.84	26.28	21.96	43.26	51.64	64.26	0.00	23.92	0.00	1.96	107.26	92.26
c12	102.24	76.54	84.31	66.32	14.32	17.10	21.28	337.24	403.94	270.92	337.62	0.00	0.00
c13	97.40	84.63	98.94	64.72	14.68	17.52	21.80	392.50	446.27	327.78	381.55	0.00	0.00
c14	103.12	112.75	103.12	103.11	9.21	11.00	13.68	466.98	498.35	363.87	395.24	0.00	0.00
c15	41.40	36.61	24.95	20.21	47.01	56.11	69.82	18.48	64.26	0.00	44.05	69.07	54.07

Tavola 24

alternative	*s1*	*s2*	*s3*	*d*	$N(0,05;m^3)$	$N(0,05;kg)$	$N(0,05;€^P)$	$St^{max}(0,75;kg)$	$St^{max}(0,95;m^3)$	$St^{min}(0,75;kg)$	$St^{min}(0,95;m^3)$	$Sh(0,05;€^P)$	$Sh(0,25;€^P)$	Valutazione complessiva
c1	113.12	111.30	111.26	111.26	8.54	10.19	12.68	498.49	541.32	387.23	430.06	0.00	0.00	
c2	112.63	111.63	111.64	111.58	8.51	10.16	12.65	499.80	541.81	388.22	430.23	0.00	0.00	
c3	112.62	111.63	111.63	111.60	8.51	10.16	12.64	499.75	541.74	388.15	430.14	0.00	0.00	buona
c4	21.55	21.58	21.27	20.59	46.14	55.08	68.54	0.00	0.00	0.00	0.00	141.76	126.76	
c5	63.23	21.41	21.36	17.07	55.66	66.44	82.67	0.00	81.93	0.00	64.86	96.91	81.91	buona
c6	21.02	31.15	18.52	17.43	54.52	65.08	80.98	0.00	0.00	0.00	0.00	115.91	100.91	
c7	104.49	107.10	104.44	104.40	9.10	10.86	13.52	461.03	499.42	356.62	395.01	0.00	0.00	buona
c8	104.79	105.43	104.81	104.76	9.07	10.83	13.47	459.09	499.45	354.34	394.69	0.00	0.00	
c9	104.96	105.05	104.88	104.79	9.07	10.82	13.47	458.70	499.62	353.91	394.83	0.00	0.00	buona
c10	18.57	50.07	18.68	17.27	54.99	65.65	81.68	3.75	13.25	0.00	0.00	61.13	46.13	buona
c11	22.62	29.84	26.28	21.96	43.26	51.64	64.26	0.00	23.92	0.00	1.96	107.26	92.26	
c12	102.24	76.54	84.31	66.32	14.32	17.10	21.28	337.24	403.94	270.92	337.62	0.00	0.00	buona
c13	97.40	84.63	98.94	64.72	14.68	17.52	21.80	392.50	446.27	327.78	381.55	0.00	0.00	buona
c14	103.12	112.75	103.12	103.11	9.21	11.00	13.68	466.98	498.35	363.87	395.24	0.00	0.00	
c15	41.40	36.61	24.95	20.21	47.01	56.11	69.82	18.48	64.26	0.00	44.05	69.07	54.07	buona

L'applicazione della DRSA all'informazione della Tavola 24 fornisce il seguente insieme minimo di regole che coprono tutte le strategie del primo campione con valutazione complessiva “buona” (tra parentesi le strategie della Tavola 24 supportanti la regola decisionale; la strategie base per le regole sono sottolineate).

- regola 1.1) se $N(0{,}05; €^p) \leq 12{,}64$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,05 che su scala commerciale il numero di ordini è non più elevato di 12,64 , allora la strategia è buona), $\{\underline{c3}\}$;
- regola 1.2) se $St^{Min}(0{,}75; kg) \leq 353{,}91$ e $Sh(0{,}05; €^p) \leq 96{,}91$ allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,75 che la scorta minima valutata in termini di peso è non più elevata di 353,91 e se c'è la probabilità dello 0,05 che lo shortage commerciale è non più elevata di 96,91 allora la strategia è buona), $\{\underline{c5}, c9, \underline{c10}, c12, c13, c15\}$;
- regola 1.3) se $N(0{,}05; kg) \leq 10{,}86$ e $St^{Max}(0{,}95; m^3) \leq 499{,}42$ allora la strategia è almeno buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,05 che in termini di peso il numero di ordini è non più elevato di $10{,}86$ e se c'è la probabilità dello 0,95 che la scorta massima volumetrica è meno elevata di 499,42, allora la strategia è buona), $\{\underline{c7}\}$;

Il manager seleziona la regola 1.2 come la più importante nel corrente modello di preferenza.

In base a questa selezione, due vincoli vengono aggiunti all' originario problema multi obiettivo di gestione delle scorte, che ora diventa il seguente:

$$min \quad N(0{,}05; m^3) = \frac{x^{m^3}(0{,}05; 90)}{d};$$

$$min \quad N(0{,}05; €^p) = \frac{x^{€^p}(0{,}05; 90)}{d};$$

$$min \quad N(0{,}05; kg) = \frac{x^{kg}(0{,}05; 90)}{d};$$

$$min \ St^{Max}(0{,}75; kg) = max[1s_1 + 2s_2 + 3s_3 - x^{kg}(0{,}75; 15); 0];$$

$$min \ St^{Max}(0{,}95; m^3) = max[2s_1 + 1s_2 + 3s_3 - x^{m^3}(0{,}95; 15); 0];$$

$$min \ St^{Min}(0{,}95; m^3) = max[2s_1 + 1s_2 + 3s_3 - d - x^{m^3}(0{,}95; 15); 0];$$

$min\ Sh(0{,}25;€^p) = max\left[x^{€^p}(0{,}25;15) - (1\boldsymbol{s_1} + 3\boldsymbol{s_2} + 2\boldsymbol{s_3} - \boldsymbol{d});0\right]$;

$\boldsymbol{d} \leq\ \boldsymbol{s_j}\varpi_j^l$ per $j = 1{,}2{,}3\ l = 1 \dots \dots L$, soggette a

$1\boldsymbol{s_1} + 2\boldsymbol{s_2} + 3\boldsymbol{s_3} -\ \mathrm{d} \leq x^{kg}(0{,}75;\ 15) + 353{,}91$

(condizione $St^{Min}(0{,}75;kg) \leq 353{,}91$ nella regola 1.2);

$1\boldsymbol{s_1} + 3\boldsymbol{s_2} + 2\boldsymbol{s_3} -\ \boldsymbol{d} \geq x^{€^p}(0{,}05;\ 15) - 96{,}91$

(condizione $Sh(0{,}05;€^p) \leq 96{,}91$ nella regola 1.2)

e soggette ai vincoli sul range di variazione delle variabili decisionali

Considerando il problema multi obiettivo di gestione delle scorte con i nuovi vincoli, generiamo in una nuova fase computazionale un secondo campione di strategie Pareto-ottimali presentate nella Tavola 25. Si noti che tutte le strategie alternative della Tavola 25 soddisfano anche la condizione imposta dalla regola decisionale 1.2 selezionata dal manager. Il manager è invitato a dare una valutazione complessiva per le strategie del campione, classificandone alcune come “buona”, come mostrato nell'ultima colonna della Tavola 25.

Tavola 25

alternative	s1	s2	s3	d	$N(0{,}05;m^3)$	$N(0{,}05;kg)$	$N(0{,}05;€^P)$	$St^{max}(0{,}75;kg)$	$St^{max}(0{,}95;m^3)$	$St^{min}(0{,}75;kg)$	$St^{min}(0{,}95;m^3)$	$Sh(0{,}05;€^P)$	$Sh(0{,}25;€^P)$	Valutazione complessiva
c1'	104.88	104.58	104.28	104.21	9.12	10.88	13.54	455.88	497.18	351.67	392.97	0.00	0.00	
c2'	106.92	103.23	103.67	103.15	9.21	10.99	13.68	453.38	498.07	350.23	394.92	0.00	0.00	
c3'	108.56	100.18	100.32	100.06	9.49	11.33	14.10	438.89	488.27	338.83	388.21	0.00	0.00	
c4'	103.31	106.22	103.78	102.61	9.26	11.05	13.75	456.10	494.19	353.49	391.58	0.00	0.00	buona
c5'	20.00	39.77	16.03	15.98	59.46	70.98	88.32	0.00	0.00	0.00	0.00	94.61	79.61	
c6'	28.58	35.46	21.41	20.51	46.32	55.29	68.80	0.00	26.87	0.00	6.36	92.71	77.71	buona
c7'	19.70	44.60	21.10	19.15	49.61	59.22	73.69	1.20	17.30	0.00	0.00	73.45	58.45	
c8'	104.05	121.46	64.26	39.26	24.20	28.89	35.94	368.76	392.36	329.50	353.10	0.00	0.00	buona
c9'	37.05	33.30	28.42	22.23	42.74	51.02	63.48	17.90	62.66	0.00	40.43	78.44	63.44	buona
c10'	67.27	56.81	56.81	27.37	34.72	41.44	51.56	180.33	231.79	152.97	204.43	0.00	0.00	buona
c11'	17.38	39.44	18.45	17.12	55.51	66.26	82.44	0.00	0.00	0.00	0.00	94.50	79.50	
c12'	104.96	104.68	104.40	104.33	9.11	10.87	13.52	456.51	497.79	352.18	393.46	0.00	0.00	buona
c13'	48.93	29.00	20.27	16.35	58.10	69.35	86.29	0.00	57.67	0.00	41.32	89.88	74.88	
c14'	104.99	104.71	104.46	104.46	9.09	10.86	13.51	456.79	498.08	352.33	393.62	0.00	0.00	
c15'	32.32	31.06	34.31	28.25	33.63	40.14	49.95	26.35	68.61	0.00	40.36	84.14	69.14	buona

Applicando la DRSA alle informazioni sulle preferenze della Tavola 25, si ottiene il seguente insieme minimal di regole decisionali capace di coprire tutte le strategie in essa con valutazione “buona”:

- regola 2.1) se $N(0{,}05;kg) \leq\ 55{,}29$ e $St^{Min}(0{,}75;kg) \leq 329{,}50$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,05 che in termini di peso il numero di ordini è non più elevato di $55{,}29$ e se c'è la probabilità dello 0,75 che la scorta minima valutata in termini di peso è non più elevata di 329,50, allora la strategia è buona), $\{\underline{c6'}, \underline{c8'}, c9', c10', c15'\}$;

- regola 2.2) se $N(0{,}05; kg) \leq 10{,}87$ e $St^{Min}(0{,}75; kg) \leq 352{,}18$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,05 che in termini di peso il numero di ordini è non più elevato di $10{,}87$ e se c'è la probabilità dello 0,75 che la scorta minima in termini di capacità è non più elevata di 352,18, allora la strategia è buona), $\{\underline{c12'}\}$;
- regola 2.3) se $N(0{,}05; kg) \leq 11{,}05$ e $St^{Min}(0{,}95; m^3) \leq 391{,}58$, allora la strategia è buona; (cioè se c'è la probabilità dello 0,05 che in termini di peso il numero di ordini è non più elevato di $11{,}05$ e se c'è la probabilità dello 0,95 che il valore volumetrico della scorta minima è non più elevato di 391,58, allora la strategia è buona), $\{\underline{c4'}\}$;

Il manager seleziona la regola 2.1 come la più importante nel corrente modello di preferenza. Conseguentemente, i vincoli corrispondenti alle condizioni di questa regola vengono aggiunti al problema multi obiettivo di gestione delle scorte, che ora diventa:

$min \quad N(0{,}05; m^3) = \frac{x^{m^3}(0{,}05; 90)}{d}$;

$min \quad N(0{,}05; €^p) = \frac{x^{€^p}(0{,}05; 90)}{d}$;

$min\ St^{Max}(0{,}75; kg) = max[1s_1 + 2s_2 + 3s_3 - x^{kg}(0{,}75; 15); 0]$;

$min\ St^{Max}(0{,}95; m^3) = max[2s_1 + 1s_2 + 3s_3 - x^{m^3}(0{,}95; 15); 0]$;

$min\ St^{Min}(0{,}95; m^3) = max[2s_1 + 1s_2 + 3s_3 - d - x^{m^3}(0{,}95; 15); 0]$;

$min\ Sh(0{,}25; €^p) = max[x^{€^p}(0{,}25; 15) - (1s_1 + 3s_2 + 2s_3 - d); 0]$;

$\boldsymbol{d} \leq \boldsymbol{s}_j \varpi_j^l$ per $j = 1, \dots \dots N$ $l = 1 \dots \dots L$, soggette a

$$1\boldsymbol{s}_1 + 3\boldsymbol{s}_2 + 2\boldsymbol{s}_3 - \boldsymbol{d} \geq x^{€^p}(0{,}05;15) - 96{,}91$$

(condizione $Sh(0{,}05;€^p) \leq 96{,}91$ nella regola 1.2);

$$1\boldsymbol{s}_1 + 2\boldsymbol{s}_2 + 3\boldsymbol{s}_3 - \boldsymbol{d} \leq x^{kg}(0{,}75;15) + 329{,}50$$

(condizione $\mathrm{St}^{Min}(0{,}75;kg) \leq 329{,}50$ nella regola 2.1);

$\boldsymbol{d} \geq \frac{x^{kg}(0{,}05;\,90)}{55{,}29}$ (condizione $N(0{,}05;kg) \leq 55{,}29$ nella regola 2.1)

e soggette ai vincoli sul range di variazione delle variabili decisionali

Viene generato nuovo campione di strategie rappresentative nella nuova regione ammissibile, come mostrato nella Tavola 26, e proposte al manager per la valutazione.

Tavola 26

alternative	*s1*	*s2*	*s3*	*d*	$N(0{,}05;m^3)$	$N(0{,}05;kg)$	$N(0{,}05;€^P)$	$St^{max}(0{,}75;kg)$	$St^{max}(0{,}95;m^3)$	$St^{min}(0{,}75;kg)$	$St^{min}(0{,}95;m^3)$	$Sh(0{,}05;€^P)$	$Sh(0{,}25;€^P)$
c1''	37.08	33.96	21.38	20.96	45.32	54.10	67.32	0.00	42.27	0.00	21.31	89.24	74.24
c2''	88.13	51.64	48.73	36.46	26.05	31.10	38.70	166.59	244.07	130.13	207.61	0.00	0.00
c3''	20.51	37.35	20.51	20.51	46.31	55.28	68.79	0.00	9.92	0.00	0.00	96.91	81.91
c4''	53.40	53.15	32.44	28.13	33.77	40.31	50.15	86.03	127.28	57.90	99.15	0.39	0.00
c5''	100.61	99.64	99.71	99.55	9.54	11.39	14.17	428.03	470.00	328.49	370.45	0.00	0.00
c6''	20.51	37.36	20.51	20.51	46.32	55.29	68.79	0.00	9.91	0.00	0.00	96.91	81.91
c7''	100.78	99.61	99.62	99.49	9.55	11.40	14.18	427.84	470.01	328.35	370.52	0.00	0.00
c8''	24.30	35.76	24.19	22.82	41.63	49.69	61.83	0.00	26.94	0.00	4.12	92.86	77.86
c9''	99.95	99.56	100.11	99.36	9.56	11.41	14.20	428.38	469.78	329.02	370.42	0.00	0.00
c10''	33.17	32.34	24.09	22.79	41.68	49.76	61.91	0.00	40.95	0.00	18.16	94.42	79.42
c11''	50.69	72.88	42.48	34.80	27.30	32.59	40.55	152.91	171.72	118.12	136.92	0.00	0.00
c12''	54.04	61.80	54.03	53.90	17.63	21.04	26.18	168.72	201.96	114.82	148.06	0.00	0.00
c13''	30.54	47.46	21.97	21.74	43.70	52.17	64.91	20.35	44.43	0.00	22.69	54.90	39.90
c14''	26.64	62.43	23.86	22.43	42.35	50.55	62.90	52.09	57.30	29.66	34.87	10.78	0.00
c15''	29.33	50.82	29.27	29.22	32.51	38.81	48.29	47.79	67.30	18.57	38.08	38.89	23.89

Il manager seleziona la strategia $c4''$ come la più soddisfacente, stoppando la procedura.

Tavola 27

alternative	*s1*	*s2*	*s3*	*d*	$N(0{,}05;m^3)$	$N(0{,}05;kg)$	$N(0{,}05;€^P)$	$St^{max}(0{,}75;kg)$	$St^{max}(0{,}95;m^3)$	$St^{min}(0{,}75;kg)$	$St^{min}(0{,}95;m^3)$	$Sh(0{,}05;€^P)$	$Sh(0{,}25;€^P)$
c4''	53.40	53.15	32.44	28.13	33.77	40.31	50.15	86.03	127.28	57.90	99.15	0.39	0.00

Aver imposto che di volta in volta, per ogni interazione del problema di ottimizzazione multi obiettivo, fosse soddisfatta la condizione $\boldsymbol{d} \leq \boldsymbol{s}_j \varpi_j^l, j = 1{,}2{,}3$ comporta che nell' orizzonte temporale di 90 giorni il decisore decida di effettuare ordini compensatori di $\boldsymbol{S}$ del tipo $s_j - \boldsymbol{k}_j \; j = 1,2,3$ ogni qualvolta venga soddisfatta la condizione

$$\boldsymbol{K}_{St}^{N\,1} = \varpi_1^l \boldsymbol{k}_1 + \varpi_2^l \boldsymbol{k}_2 + \varpi_3^l \boldsymbol{k}_3 = \varpi_1^l 53.40 + \varpi_2^l 53.15 + 32.44 - 28.13$$

$l = 2,3,4$ con $k_j \; j = 1,2,3$ entità delle scorte valutata in termini di numerario al momento in cui si effettua l'ordine.

CONCLUSIONI

Noi abbiamo proposto una nuova metodologia per aiutare il decisore a fissare l'inventory strategy più adatta per un item in un contesto di decisioni in condizioni di rischio. Sebbene si è considerata una Poisson demand, può essere usata una qualche altra distribuzione. Più precisamente, noi abbiamo riformulato il modello classico di Whitin (1952) in termini di problema di ottimizzazione multi obiettivo guidata attraverso regole decisionali ottenute per mezzo del Dominance-based Rough Set Approach (IMO-DRSA) (Greco et al., 2008).

La stessa estensione alla gestione multi prodotto non abbondona il processo di Poisson come strumento di utile approssimazione della domanda. L'ulteriore passo rappresentato da questa parte del lavoro non solo rappresenta il conseguimento di un ottimo risultato in termini di applicabilità, ma rende ancor più evidente il divario presente nel cambiamento da una prospettiva mono obiettivo non interattiva a una multi obiettivo interattiva.

L'intermezzo fra la parte relativa alla gestione mono prodotto e quella multi prodotto è stato il frutto di un' intuizione che allo stesso tempo appare essere una banale costatazione della contiguità fra semplice gestione delle scorte e gestione del caveau. Infatti, la metodologia che si è proposta, atta alla gestione del caveau di una banca con processo di Wiener come domanda-offerta; da un lato, alla luce della metodologia risolutiva usata, assume il carattere di goal programming, dall'altro, può essere considerata come una particolare forma di inventory management.

Qualche altro metodo interattivo come quelli presentati nel terzo capitolo può essere ovviamente applicato ai problemi operativi affrontati. Tuttavia, l' IMO-DRSA presenta alcune desiderabili proprietà. Ciò si basa sul Dominance-based

Rough Set Approach che è una ben fondata metodologia per ragionare sui dati ordinati in base alle preferenze.

Inoltre, a causa della trasparenza e dell'intellegibilità della trasformazione dell' input preference information nel modello delle preferenze, la procedura proposta può essere qualificata come "glass box", contrariamente alla "black box" caratteristica di molte procedure che danno una soluzione finale senza una chiara argomentazione.

In ordine, a gestire le preferenze del decisore relativamente al rischio, la procedura tiene in considerazione come funzioni obiettivo pochi quantili di distribuzioni di probabilità, ritenuti adatti dal decisore.

Inoltre, è puramente ordinale perché non si compie alcuna operazione invasiva sui dati, come il calcolo di valori medi, o di qualche distanza, o l'ottenimento di valori scalarizzabili.

Le strategie alle quali si può pervenire nei due casi trattati o in situazioni d'affari simili vengono nella realtà operativa poste in essere giornalmente o settimanalmente, tuttavia, ciò non implica che la procedura interattiva da non ripetere per ogni ordine effettuato, non sia praticamente fruibile per le decisioni operative.

Lo stesso di fatto accade per i classici modelli di inventory management, come per esempio, il Within model, per il quale il reorder point K e il reorder lot Q non sono ricalcolati in ogni decisione di riordino; essi al contrario sono calcolati solo una volta quando viene fissata l'inventory strategy per un prodotto.

Dopo essere fissata, la strategia selezionata può essere ripetuta e anche implementata in un routine software program che automaticamente applica ciò.

La nostra proposta consiste in una prima e originale applicazione di una metodologia basata sulle regole (DRSA), a tematiche come quelle viste in precedenza, che possono essere viste come rappresentative di un' ampia classe di problemi di ricerca operativa.

In effetti, molti problemi che riguardano time, risk, preferenze e multiobjective optimization possono essere gestiti tramite la metodologia proposta in particolare, portfolio management, queueing, stochastic scheduling, ecc,ecc.

La rule methodology, ha anche alcuni meriti pratici, che si possono ricondurre al fatto, che l' user è sempre capace di capire da quale regola decisionale i vincoli provengano e che la preference information fornita dall' user conduca alle regole decisionali considerate.

La sfida futura che ci aspetta consiste in un ampliamento del campo di applicazione dell'approccio presentato in questo lavoro; in particolare, come accennato nell'introduzione le ipotesi che nell'ambito dell' inventory management possono essere inserite sono molteplici e correlate ad altrettante differenti problematiche di tipo operativo.

BIBLIOGRAFIA

Abbas M., Pirlot M., Vincke P. (1996), Preference structures and comparability graphs, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, **2**, 81-98.

Abbas M., Vincke P. (1993), Preference structures and threshold models, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, **2**, 171-178.

Agrell, P. J. (1995). A muticriteria framework for inventory control. International Journal of Production Economics, **41**, 59-70.

Baccarin, S., Optimal impulse control for cash management P with quadratic holding-penalty costs, Decisions in Economics and Finance, **25,** (1), 19-32, 2002, Springer.

Bar-Ilan, A., Perry, D. and Stadje, W., A generalized impulse control model of cash management, Journal of Economic Dynamics and Control, **28,** (6), 1013-1033, 2004, Elsevier.

Blaszczynski, J., Slowinski, R., Szelag M. (2011). Sequential covering rule induction algorithm for variable consistency rough set approaches. Information Sciences, **181**, 987-1002.

Bouyssou D. (1990), Building criteria: A prerequisite for MCDA, in C.A. Bana e Costa (ed.), Readings in Multiple Criteria Decision Aid, Springer-Verlag, 58-80.

Branke, J., Deb, K., Miettinen, K., and Slowiński, R. (2008)(eds.). Multiobjective optimization: Interactive and evolutionary approaches.State-of-the-Art Survey series of the LNCS, vol. 52, Springer, Berlin.

Burchanam J. T., A *naïve* approach for solving MCDM problems: The GUESS method. Journal of the Operational Research Society, 48:202-206, 1997.

Chankong V., Haimes Y.Y., The interactive surrogate worth trade-off (ISWT) method for multiobjective decision.making. In S.Zionts, editor, Multiple Criteria Problem Solving, pages 42-67. Springer-Verlag. Berlin, New York, 1978.

Chankong V., Haimes Y.Y., Multiobjective Decision Making Theory and Methodology. Elsevier Science Publishing Co., New York, 1983.

Dixit, A., A simplified treatment of the theory of optimal regulation of Brownian motion, Journal of Economic Dynamics and Control, **15,** 4, 657-673, 1991, Elsevier.

Doignon J. P. (1987), Threshold representation of multiple semiorders, SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods, **8**, 77-84.

Ehrgott M., Gandibleux X., Multiple criteria optimization: state of the art annotaded bibliographic surveys, Kluwer Acasemic Publishers, Boston, Dordrecht, London 227-256.

Finch, P. (1961). Some probability theorems in inventory control. Publ. Math.Debrecen, **8**, 241-261.

Fodor J., Roubens M. (1996), Parameterized Preference Structures and Some Geometrical Interpretation, Institut de Mathématique Université de Liège, 96.008.

Fortemps, P., Greco, S., and Slowiński, R. (2008). Multicriteria decision support using rules that represent rough-graded preference relations. European Journal of Operational Research, **188**(1), 206-223.

Hariga M., The Inventory Lot-Sizing Problem with Continuous Time-Varying Demand Shortages, The Journal of the Operational Research Society, Vol. 45, No. 7 (Jul., 1994), pp. 827-837, Palgrave Macmillan Journals on behalf of the Operational Research Society.

Harrison, J. M., Sellke, T.M. and Taylor, A.J., Impulse control of Brownian motion, Mathematics of Operations Research, **8,** (3), 454-466, 1983, INFORMS.

Harrison, J. M., Taksar, M.I., Instantaneous control of Brownian motion, Mathematics of Operations research, **8**, (3), 439-453, 1983, INFORMS.

Harrison, J. M., Taylor, A.J., Optimal control of a Brownian storage system, Stochastic Processes and Their Applications, **6**, (2), 179-194, 1978, Elsevier.

Geoffrion A. M., Dyer J. S., Feinberg A., An interactive approach for multi-criterion optimization, with an application to the operation of an academic department., Management Science, **19**:357-368, 1972.

Giove, S., Greco, S., Matarazzo, B., and Slowiński, R. (2002). Variable consistency monotonic decision trees. In W. Ziarko, Y.Yao (eds.): Rough Sets and Current Trends in Computing, LNAI 2005, Springer,Berlin, 86.

Greco S., Matarazzo B., Slowinski R. (1996), Rough Approximation of Preference Relation by Dominance Relations, ics research report 16/96, Warsaw University of Tecnology and European Journal of Operational Research, 117:63-83.

Greco S., Matarazzo B., Slowinski R. (1998), A new rough set approach to evaluation of bankruptcy risk", in Zopounidis C.,"Operational tools in the management of financial risk" Kluwer A.P., Dordrecht.

Greco S., Matarazzo B., Slowinski R. (1999), The use of rough sets and fuzzy sets in MCDM, Chapter 14 in "Advances in Multiple Criteria Decision Making", T.Gal, T.Stewart, T.Hanne (eds.),. Kluwer Academic Publishers, Boston, pp. 14.1-14.59.

Greco S., Matarazzo B., Slowinski R. (2001), Rough sets methodology for multi-criteria decision analysis, European Journal of Operational Research, vol. 129, pp. 1–47.

Greco S., Matarazzo B., Slowinski R. (2005), Decision rule approach. Chapter 13 [in]: J.Figueira, S.Greco and M.Ehrgott (eds.), "Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys", Springer-Verlag, New York, pp. 507-562.

Greco, S., Matarazzo, B., and Słowiński, R. (1999a). Rough approximation of a preference relation by dominance relations. European Journal of Operational Research, **117**(1), 63-83.

Greco, S., Matarazzo, B., and Słowiński, R. (1999b). The use of rough sets and fuzzy sets in MCDM. In T. Gal, T. Steward and T. Hanne (eds.): Multicriteria decision making: advances in MCDM models, algorithms, theory, and applications, Springer,New York, pages 14.114.59.

Greco, S., Matarazzo, B., and Słowiński, R. (2001b). Rough sets theory for multi-criteria decision analysis. European journal of operational research, 129(1), 147.

Greco, S., Matarazzo, B., and Slowinski, R. (2008). Dominance-Based Rough, Set Approach to Interactive Multiobjective Optimization. In J. Branke, K. Deb,

Greco, S., Matarazzo, B., and Słowiński, R. (2010). Dominance-based rough set approach to decision under uncertainty and time preference. Annals of Operations Research, **176**, 41-75.

Greco, S., Matarazzo, B., Słowiński, R., and Stefanowski, J. (2001a). An algorithm for induction of decision rules consistent with the dominance principle.In W. Ziarko, Y.Yao (eds.): Rough Sets and Current Trends in Computing, LNAI 2005,Springer,Berlin, pages 304-313.

Greco, S., Pawlak, Z., and Słowiński, R. (2004). Can Bayesian confirmation measures be useful for rough set decision rules. Engineering Applications of Artificial Intelligence, **17**(4), 345-361.

Harris, F. (1990). How many parts to make at once. Operations Research, **38**(6), 947-950.

Karlin S., Optimal Policy for Dynamic Inventory Process with Stochastic Demands Subject to Seasonal Variations, Journal of the Society for Industrial and

Applied Mathematics, Vol. 8, No. 4 (Dec., 1960), pp. 611-629, Society for Industrial and Applied Mathematics.

Karlin, S. and Scarf, H. (1958). Inventory models and related stochastic processes. Studies in the mathematical theory of inventory and production, pages 319-336.

Keeney R. L., Raiffa H. (1976), Decision with Multiple Objectives - Preferences and value Tradeoffs, Wiley, New York.

Korhonen P., Reference direction approach to multiple objectiv linear programming: Historical overview. In M. H. Karwan, J.Spronk, and J. Wallenius, editors, Essays in Decision Making: A Volume in Honour of Stanley Zionts, pages 74-92. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.

Korhonen P., Laakso J., A visual interactive method for solving the multiple criteria problem. European Journal of Operational Research, 24:277-287,1986.

Lenard, J. and Roy, B. (1995). Multi-item inventory control: a multicriteria view. European Journal of Operational Research, **87**(3), 685-692.

Luce R.D. (1956), Semi-orders and a theory of utility discrimination, Econometrica, **24**, 178-191.

Mahapatra, N. and Maiti, M. (2005). Decision process for multiobjective, multi-item production-inventory system via interactive fuzzy satisficing technique. Computers & Mathematics with Applications, **49**(5-6), 805-821.

Maity, K. and Maiti, M. (2008). A numerical approach to a multi-objective optimal inventory control problem for deteriorating multi-items under fuzzy inflation and discounting. Computers & Mathematics with Applications, **55**(8), 1794-1807.

Mandal, N., Roy, T., and Maiti, M. (2005). Multi-objective fuzzy inventory model with three constraints: a geometric programming approach. Fuzzy Sets and Systems, **150**(1), 87-106.

Miettinen K., Nonlinear Multiobjective Optimization. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.

Miettinen K., Slowinski R. (eds.) Multiobjective Optimization: Interactive and Evolutionary Approaches, State-of-the-Art Survey series of the LNCS, vol. 5252, Springer, Berlin, pages 121-155.

Pawlak Z. (1982), Rough sets, International Journal of information & Computer Sciences 11:341-356.

Nakayama H., Aspiration level approach to interactive multi-objctive programming and its applications. In P. M. Pardalos, Y. Siskos, and C. Zopounidis, editors, Advances in Multicriteria Analysis, pages 147-174. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995

Nakayama H., Sawaragi Y., Satisficing trade-off method for multiobjective programming. In M. Grauer and A. P. Wierzbicki, editors, Interactive Decision Analysis, pages 113-122. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

Narula S. C., Kirilov L., Vassilev V., An interactive algorithm for solving multiple objective nonlinear programming problems. In G. H. Tzeng, H.F. Wand, U. P. Wen, and P.L. Yu, editors, Multiple Criteria Decision Making- Procedings of the Tehth International Conference: Expand and Enrich the Domains of Thinking and Application, pages 119-127. Spriger-Verlag, New York, 1994.

Narula S. C., Kirilov L., Vassilev V., Reference direction approach for solving multiple objective nonlinear programming problems. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 24:804-806, 1994.

Ormeci, M.. Dai, JG and Vate, J.V., Impulse control of Brownian motion: The constrained average cost case, Operations Research, **56,** (3), 618-629, 2008, INFORMS.

Pawlak Z. (1991), Rough sets. Theoretical Aspects of Reasoning about data, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

R.E. Steuer, Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Applications. John Wiley & Sons, New York, 1986.

Roberts F. S. (1971), Homogeneous families of semiorders and the theory of probabilistic consistency, Journal of Mathematical Psychology, **8**, 248- 263.

Roubens M., Vincke P. (1985), Preference Modelling, Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, 250, Springer.

Roy B. (1985), Méthodologie Multicritère d'aide à la Décision, Economica, Paris.

Roy B. (1993), Decision science or decision aid science?, European Journal of Operational Research, Special Issue on Model Validation in Operations Research, **66**, 184-203.

Roy B.(1990), Decision-aid and decision-making, European Journal of Operational Research, **45**, 324-331.

Roy B., Bouyssou D. (1993), Aide Multicritère à la Décision: Méthodes et Cas, Economica, Paris.

Roy B., Vincke P. (1984), Relational systems of preference with one or more pseudo-criteria: some new concepts and results, Management Science, **30** (11), 1323-1335.

Roy B., Vincke P. (1987), Pseudo-orders: definition, properties and numerical representation, Mathematical Social Sciences, **14** (2), 263-274.

Roy, T. and Maiti, M. (1998). Multi-objective inventory models of deteriorating items with some constraints in a fuzzy environment. Computers and Operations Research, **25**(12), 1085-1095.

Sahin I., On the Objective Function Behavior in (s, S) Inventory Models, Operations Research, Vol. 30, No. 4 (Jul. - Aug., 1982), pp. 709-724, INFORMS.

Sahin I., On the Stationary Analysis of Continuous Review (s, S) Inventory Systems with Constant Lead Times, Operations Research, Vol. 27, No. 4 (Jul. - Aug., 1979), pp. 717-729, INFORMS.

Scarf, H. (1958). Stationary operating characteristics of an inventory model with time lag. Studies in the mathematical theory of inventory and production.

Slowinski R., Vanderpooten. D. (1997), Similarity relation as a basis for rough approximations. In P.P. Wang, editor, Advances in Machine Intelligence and Soft-Computing, vol.IV, pages 17--33. Duke University Press, Durham, NC.

Słowiński, R., Greco, S., and Matarazzo, B. (2005). Rough set based decision support. In E.K. Burke and G. Kendall (eds.), Search Methodologies: Introductory

Słowiński, R., Greco, S., and Matarazzo, B.(2009). Rough Sets in Decision Making. In R.A.Meyers (ed.): Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer, New York, 2009, pp. 7753-7786.

Song J.S., Zipkin P. H., Inventory Control with Information about Supply Conditions, Management Science, Vol. 42, No. 10 (Oct., 1996), pp. 1409-1419, INFORMS.

Song J.S., Zipkin P. H., Inventory Control in a Fluctuating Demand Environment, Operations Research, Vol. 41, No. 2 (Mar. - Apr., 1993), pp. 351-370, INFORMS.

Sounderpandian J. (1991), Funzione a valori realis when decision criteria are not totally substitutable, Operations Research, 39, 4, 592-600.

Stefanowski, J. (1998). On rough set based approaches to induction of decision rules. Rough sets in knowledge discovery, 1, 500-529.

Tsoukias A., Vincke P. (1995), A new axiomatic foundation of partial comparability, Theory and Decision, 39, 79-114.

Tsoukias A., Vincke P. (1998), Double Threshold orders: A new axiomatization, Journal of Multi-criteria Decision Analysis, 7, 285-301.

Tutorials in Optimization and Decision Support Techniques, Springer, New York, 475-527.

Vincke P. (1980), Vrais, quasi, pseudo et précritères dans un ensemble fini: propriétés et algorithmes, Cahiers du Lamsade, 27, Université Paris-Dauphine.

Vincke P. (1988), (P,Q,I)-preference structures, in J. Kacpryk e M. Roubens (eds), Nonconventional preference relations in decision making, Springer-Verlag, 301, 72-81.

Wagner H.M., Whitin T.M., Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, Management Science, Vol. 50, No. 12, Ten Most Influential Titles of "Management Science's" First Fifty Years (Dec., 2004), pp. 1770-1774, INFORMS.

Wierzbicki A. P., Wierzbicki In G. Fandel and T. Gal, editors, Multiple Criteria Decision Making Theory and Applications, pags 468-486. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1980.

Wierzbicki A. P., A methodological approach to comparing parametric characterizations of efficient solutions. In G. Fandel, M. Grauer, A. Kurzhanski, and A. P. Wierzbicki, editors, Large-Scale Modelling and Interactive Decision Analysis, pages 27-45. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

Wierzbicki A. P., On the completeness and constructiveness of parametric characterizations to vector optimization problems. OR Spektrum, 8: 73-87, 1986

Whitin, T. (1952). Inventory Control in Theory and Practice. The Quarterly Journal of Economics, **66**(4), 502-521.