UNIVERSITA DEGLI STUDI DI CATANIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA

Scuola di Dottorato in Matematica e Scienze Computazionali

XXXIII ciclo

Tesi di Dottorato in Matematica

LICEI MATEMATICI E MOTIVAZIONE PER L'APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA

Settore disciplinare MAT/04

TESI DI

DONATELLA MARIA COLLURA

COORDINATORE DEL DOTTORATO

PROF. GIOVANNI RUSSO

TUTOR

PROF.SSA CINZIA CERRONI

CO-TUTOR

PROF. BENEDETTO DI PAOLA

ANNO ACCADEMICO 2020/2021

DOTTORATO

INDICE

INTRODUZIONE

La ricerca in Didattica della Matematica ha visto una rapida evoluzione nell'ultimo trentennio nell'area del dominio affettivo (Schuck & Grootenboer, 2000) anche in virtù del contemporaneo sviluppo di altre scienze quali la Pedagogia, la Psicologia Cognitiva e le Neuroscienze. Parlare di insegnamento della matematica è infatti imprescindibile dai processi di apprendimento messi in atto dagli studenti. Ma con quali obiettivi si insegna oggi la matematica? È la stessa domanda che alcuni ricercatori italiani (e non solo) hanno rivolto ad un campione di docenti in servizio, impegnati in percorsi di formazione a diversi livelli scolari, a partire dalla scuola dell'infanzia fino alla scuola secondaria (Di Martino, 2017). E quali risposte (ossia, quali obiettivi) sono sovente indicati? Risultano significative le parole che si leggono nello studio da essi condotto:

> *E quali sono le risposte più frequenti? Emergono sistematicamente: la volontà di appassionare i ragazzi alla disciplina (c'è chi si accontenta di "non farla odiare"); quella di fornire strumenti per affrontare problemi: strumenti sia in termini di conoscenze specifiche, che di processi di pensiero ("insegnare a ragionare"). Oltre alla condivisione di conoscenze specifiche, il focus è su obiettivi affettivi (appassionare) e obiettivi legati allo sviluppo di un tipo di ragionamento, di una forma mentis riconosciuti come specifici della disciplina, e significativi per sviluppare nell'individuo la capacità di affrontare problemi di natura diversa.*
>
> *(Di Martino, 2017, p.23)*

La domanda posta ha fatto sì che emergessero più aspetti legati all'insegnamento e apprendimento della matematica; si tratta di aspetti differenti, per certi versi complementari, ma sicuramente non contraddittori. Gli aspetti *affettivi* e *motivazionali* da una parte, gli aspetti *cognitivi* dall'altra. Intorno ad entrambi ruota l'intero progetto di ricerca che qui è discusso. L'attenzione maggiore è riservata agli aspetti motivazionali, ovvero a tutta la sfera che afferisce alla regolazione del comportamento dell'individuo a partire da stimoli o pressioni esterne ed interne. Il contesto sperimentale che si è scelto di indagare è quello del Liceo Matematico, un progetto sperimentale nato nel 2014 da una proposta dell'Università di Salerno che si è rapidamente diffuso sul tutto il territorio nazionale raggiungendo oggi altri diciannove atenei italiani. Il progetto coinvolge innanzitutto il Dipartimento di Matematica di ciascun ateneo e una o più Scuole secondarie della stessa provincia o di territori limitrofi. Esso nasce da motivazioni di natura sociale e culturale, come meglio discusso nel corpo della tesi. I princìpi generali su cui si fondano le varie sperimentazioni sono essenzialmente tre: la forte collaborazione scuola-università, l'interdisciplinarità delle tematiche trattate e la metodologia laboratoriale (Carullo et al., 2019; Capone et al., 2017). Ciascuna sperimentazione si concretizza in due momenti. Nel primo momento si svolgono incontri periodici di formazione (a cadenza mensile o quindicinale), a cura di docenti universitari degli atenei di riferimento, durante i quali vengono proposte ed eventualmente sperimentate attività di carattere interdisciplinare o che approfondiscono argomenti di matematica. Tale formazione è un momento essenziale dello sviluppo professionale dei docenti, in quanto permette di riflettere sui differenti modi in cui gli alunni apprendono e sulle difficoltà riscontrabili nell'apprendimento, dovute a carenze formative o possibilmente ad un "atteggiamento negativo" nei confronti della disciplina. Le attività sono pensate in relazione alla ricerca nazionale ed internazionale in Didattica della Matematica e in funzione della rete sociale ed economica in cui è inserita ciascuna scuola. Il gruppo di lavoro, costituito da docenti universitari e di scuola, si impegna poi a co-progettare le attività da portare in classe in un secondo momento, nell'anno scolastico successivo a quello in cui viene erogata la formazione. La formazione dei docenti che aderiscono al progetto si configura pertanto come un'opportunità nella quale i docenti di scuola sono supportati dai ricercatori universitari nella scelta dei contenuti da proporre e dei modi in cui tali contenuti possono essere resi più comprensibili e accessibili agli studenti. Da parte del corpo docente è, difatti, molto sentita l'esigenza di stabilire una proficua collaborazione con i ricercatori, in quanto punto di riferimento accademico e istituzionale, ai fini di un miglioramento della didattica (Carullo et al., 2019). Con l'intenzione di approfondire gli aspetti teorici sottesi all'idea del Liceo Matematico, si affronta pertanto il costrutto del *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) dei docenti (Shulman, 1986) come framework teorico per inquadrare la tipica implementazione del Liceo Matematico nel contesto nazionale. Alcune derivazioni del PCK sono state precedentemente indagate proprio in riferimento al Liceo Matematico da (Branchetti et al., 2019).

La didattica attuata nei Licei Matematici è frutto di una proficua collaborazione tra il mondo della scuola e quello accademico; spesso, è realizzata nelle forme di una didattica collaborativa. Questo aspetto viene discusso nella tesi attraverso un riferimento esplicito al *collaborative teaching*. Sul tema della collaborazione tra docenti all'interno di comunità o in contesti professionali è presente una vasta letteratura di riferimento (Lamanauskas, 2014; Egodawatte et al., 2011; Muijs et al., 2010; DuFour, 2004; Lieberman, 1990). Interessanti spunti di riflessione si possono rintracciare in un lavoro di Lamanauskas (2014). Partendo da alcune considerazioni sulla collaborazione tra docenti di matematica e docenti di scienze (che è possibile estendere alla didattica collaborativa più in generale), egli sottolinea come questa possa incoraggiare lo scambio di buone pratiche didattiche, rafforzare la fiducia tra i docenti e favorire lo sviluppo professionale dei docenti in termini di creazione di progetti educativi comuni sulla base di obiettivi di insegnamento e apprendimento comuni e di idee innovative. Oltre a far riferimento alle competenze professionali sviluppate negli insegnanti, egli indica anche la capacità di collaborazione quale competenza importante per migliorare la qualità dell'apprendimento degli studenti nel settore scientifico e tecnologico (di cui –afferma Lamanauskas- la matematica costituisce uno «strumento» fondamentale). Tra gli obiettivi perseguiti dal Liceo Matematico nei confronti dei discenti rientra senza dubbio lo sviluppo della competenza matematica intesa come quella capacità di utilizzare, rappresentare e interpretare la matematica in svariati contesti, nonché «di ragionare in modo matematico», aiutando «gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica ha nel mondo» (OECD, 2019a, p.75). La competenza matematica è in effetti una delle competenze chiave indicate dal Consiglio dell'Unione Europea (Consiglio dell'Unione Europea, 2018), considerata estremamente importante per la formazione di cittadini responsabili, attivi, consapevoli e costruttivi. Per sviluppare tale competenza e contribuire alla formazione culturale in senso più ampio, le attività proposte hanno uno sfondo perlopiù interdisciplinare. Esse sono progettate grazie alla collaborazione di più dipartimenti disciplinari e consentono di approfondire le conoscenze in matematica degli studenti e di svilupparne le competenze disciplinari ad ampio raggio: l'intento è quello di aiutare gli alunni a scoprire, indagare i collegamenti tra la matematica ed altri ambiti del sapere (l'arte, la biologia, la fisica, la storia, il cinema, la logica, la letteratura, ecc.). L'approccio didattico adottato è interdisciplinare (Wiliams et al, 2016), centrato sulle reciproche relazioni tra aree diverse del sapere. Nel promuovere il dialogo tra le discipline un ruolo chiave è svolto dalla Storia della Matematica, a cui volgono lo sguardo eminenti matematici già all'inizio del secondo secolo scorso, quando si iniziava a chiedersi come migliorare l'insegnamento e apprendimento della matematica.

Altra caratteristica principale consiste nella metodologia laboratoriale. Il laboratorio di matematica (Vailati, 1906; Anichini et al., 2004; Bolondi, 2006; Baccaglini-Frank et al., 2018) ha una tradizione relativamente breve, se si pensa che per molti secoli il modello formativo predominante è stato quello «trasmissivo», in cui il docente spiega un contenuto disciplinare e l'alunno impara ascoltando il docente e ripetendo ciò che egli fa. Il laboratorio di matematica vede invece lo studente nei panni di un ricercatore che mette in gioco tutte le proprie risorse interne per risolvere una situazione problematica di cui non ha a disposizione un metodo risolutivo. Esso ha un tempo ed un luogo (non necessariamente fisico) del tutto propri, ben distinti dalle ore scolastiche. Nel laboratorio di matematica lo studente può sentirsi libero dagli schemi tradizionali e può conoscere la matematica "facendo" la matematica, partendo da un problema "pratico", concreto per poi formulare ipotesi, verificare, applicare e dimostrare, giungendo all'elaborazione di una teoria formale (Bolondi, 2006). In questo ambiente lo studente può sperimentare le molteplici applicazioni della matematica e costruire una conoscenza matematica insieme ai compagni (i pari) e al docente (esperto), eventualmente facendo ricorso all'uso di *artefatti* (o parti di essi) che possano mediare l'apprendimento di un determinato contenuto (il sapere matematico) (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009). In questa dimensione, l'apprendimento conquista la sua propria dimensione sociale. Su quest'ultima si basa la Teoria della Mediazione Semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009) e le altre teorie -nate negli anni Novanta- che raccolgono l'eredità dell'approccio costruttivista e del pensiero di Vygotskij (Baccaglini-Frank et al., 2018). Il loro contributo al superamento del modello di insegnamento «trasmissivo» delle teorie comportamentiste è stato fondamentale ed ha veicolato l'affermazione di un modello di insegnamento «transitivo» (Egodawatte et al., 2011) il cui perno è costituito dalla relazione instaurata tra docente e discente.

In quest’ottica, un laboratorio di matematica che non sia un’esperienza di poche ore ma che accompagni i fanciulli nella delicata fase dell’adolescenza può anche contribuire a soddisfare quei bisogni fondamentali della persona che sono il bisogno di autonomia, di competenza e di relazione (Ryan & Deci, 2000). Soddisfare tali bisogni psicologici, è importante, secondo la *Self-Determination Theory* (SDT) (Deci & Ryan, 1985; Ryan & Deci, 2000), in quanto conduce ad un comportamento autoregolato o autodeterminato, nel quale l’individuo sfrutta le risorse che ha dentro di sé per lo sviluppo ed il benessere personali. In altre parole, gli autori della teoria indicano un comportamento autoregolato quale comportamento mosso da una motivazione *intrinseca*, che identifica le ragioni delle azioni compiute (es. la partecipazione ad un’attività proposta in classe, lo svolgimento di un compito assegnato) dentro di sé (es. per il piacere che si prova o la soddisfazione personale di comprendere il perché delle cose) piuttosto che al di fuori (es. per pressioni esterne provenienti dagli adulti di riferimento o perché si sente di “doverlo fare”). La motivazione intrinseca, nella SDT non è altro che, l’evidente manifestazione della naturale tendenza dell’uomo verso l’apprendimento e la creatività (Ryan & Deci, 2000).

È importante sottolineare come, nel corso dei decenni, l’insegnamento e apprendimento della matematica in Italia risentono inevitabilmente degli orientamenti pedagogici e didattici dei periodi storici di riferimento e, sia pur in misura minore, degli orientamenti politici dei tanti ministri che si susseguono al governo dopo l’Unità d’Italia (Ciarrapico & Berni, 2017). L’elaborazione di nuovi programmi è stata suscitata dalla necessità di rinnovare l’insegnamento della matematica e di adattare i programmi ai cambiamenti economici, sociali e culturali in atto sul finire dell’Ottocento. Più volte è stato chiesto l’intervento di commissioni di esperti (docenti, ricercatori, ispettori) appositamente istituite dal Ministero dell’Istruzione. Importante è stato anche il contribuito proveniente da associazioni disciplinari (“UMI-CIIM”, “Mathesis” e altre) ma anche da docenti di scuola e universitari impegnati nella ricerca e nella sperimentazione didattica (Ciarrapico & Berni, 2017). Il periodo tra il dopoguerra e gli anni Ottanta vede susseguirsi varie commissioni e convegni tematici per riformare l’insegnamento, un’esigenza sentita da più parti in virtù dei progressi in campo scientifico, economico e tecnologico che segnano questo periodo. Per una vera e propria Riforma dell’insegnamento si dovrà aspettare il Riordino dei cicli del 2000 ed infine la pubblicazione delle Indicazioni Nazionali e Linee Guida nel 2010 (MIUR, 2010a, 2010b, 2010c, 2010d). È solo in queste ultime che appare più che mai evidente «il riferimento al valore culturale della matematica, come prodotto umano che si è sviluppato nel tempo» (Baccaglini-Frank et al., 2018, p.162). Dal punto di vista normativo, vi sono dunque alcuni aspetti rimasti invariati per un lungo lasso di tempo; ancora oggi si parla di riorganizzare, «svecchiare i contenuti di matematica insegnati nella scuola di base, adattandoli anche all'evoluzione moderna della matematica» (Baccaglini-Frank et al., 2018, p.144).

Le Indicazioni Nazionali sono il frutto di un lavoro di ripensamento dell'insegnamento-apprendimento basato sul collegamento tra le discipline; ciò è particolarmente evidente per la matematica che deve garantire una formazione culturale quanto più ampia possibile e preparare i giovani ad affrontare le sfide di un mondo sempre più complesso. Già anni prima, il noto filosofo Edgar Morin nel suo saggio "La testa ben fatta" (Morin, 2000) lamenta la forte disgregazione della cultura nei due grandi blocchi umanistico e scientifico. Per superare questa dicotomia egli suggerisce di attuare una riforma del pensiero e dell'insegnamento, che parta dagli insegnanti che, fra tutti gli educatori, hanno una vera e propria missione sociale da compiere: quella di formare delle "teste ben fatte" (Morin, 2000). Si ha l'impressione che si tratti piuttosto di una sfida indirizzata alle istituzioni scolastiche, oltre che ai singoli. Questa sfida è stata raccolta da alcune università che anni dopo hanno dato seguito alle idee di Morin ed hanno visto nel Liceo Matematico un'opportunità di cambiamento, di progresso e di successo. Nel Liceo Matematico si concretizza, pertanto, la tradizione del laboratorio di matematica, sia pur adattandolo alle sfide del mondo attuale. Lo scopo è quello di promuovere nei cittadini di domani una formazione culturale di ampio respiro, perseguendo al contempo obiettivi di natura motivazionale.

La ricerca condotta si colloca in una terra di mezzo, tra gli studi precedenti sulla motivazione per l'apprendimento della matematica (seguendo la SDT) e l'innovazione didattica costituita dal Liceo Matematico. I quadri teorici menzionati costituiscono le fondamenta teoriche del progetto sperimentale con il quale si è voluto indagare gli aspetti motivazionali legati agli studenti di grado 9 frequentanti il Liceo Matematico. Di quest'ultimo sono stati finora condotti studi perlopiù empirici e, data la sua giovane età, sono molti gli aspetti ancora da studiare. In questo lavoro si è scelto di indagare: se e in che misura le lezioni interdisciplinari dei Licei Matematici hanno contribuito allo sviluppo di una motivazione intrinseca negli studenti; in che modo è possibile che la motivazione degli studenti sia cambiata in relazione alla Storia della Matematica e alla didattica collaborativa attuata; quali sono le possibili ricadute del collaborative teaching sullo sviluppo professionale e personale dei docenti. Il campione di studenti ai quali rivolgere la ricerca è stato scelto seguendo secondo alcuni specifici parametri, legati strettamente alla formulazione delle domande di ricerca. Esso include un campione sperimentale costituito dagli studenti di grado 9, frequentanti un Liceo Matematico nell'anno scolastico 2018/19, ed un campione di controllo costituito dai loro coetanei. Ad entrambi è stato somministrato per via telematica, in due momenti distinti dell'anno scolastico, un test strutturato nel quale si chiedeva: "Perché trascorri del tempo a studiare matematica?". L'analisi quantitativa dei dati raccolti sembra rilevare una differenza significativa nella motivazione verso l'apprendimento della matematica nei due gruppi di studenti. Un ulteriore questionario con domande aperte e chiuse, è stato poi rivolto al solo campione sperimentale. L'analisi qualitativa delle risposte registrate dagli studenti di tutta Italia ha permesso di spiegare questa differenza alla luce dei quadri teorici della SDT, del collaborative teaching e dell'interdisciplinarità. Gli studenti hanno apprezzato le metodologie di lavoro adottate e saputo cogliere l'essenza delle attività loro proposte. Guardando infine alle ricadute del collaborative teaching sui docenti che hanno preso parte alla sperimentazione qui descritta, i dati rilevati appaiono complessivamente soddisfacenti e incoraggianti.

La suddivisione dei capitoli segue, pertanto, un ordine più semantico che cronologico. Nel primo capitolo si introduce il concetto di motivazione, intorno al quale ruota l'intero progetto di ricerca, e la dimensione in cui si colloca, ossia la dimensione affettiva, legata alla matematica. Nel capitolo successivo, vengono studiati alcuni specifici contesti didattici e formativi che supportano, secondo precedenti ricerche, il ruolo dei fattori affettivi e motivazionali nell'apprendimento dei contenuti matematici (il PCK, il collaborative teaching, la Teoria della Mediazione Semiotica, il laboratorio di matematica, l'interdisciplinarità). Tali contesti hanno fatto da cornice alla sperimentazione qui descritta che ha coinvolto diversi Licei Matematici d'Italia, una proposta didattica innovativa in fatto di insegnamento e apprendimento della matematica. Per comprendere la genesi delle idee su cui poggia il Liceo Matematico, è doveroso indagare le ragioni storiche, sociali, politiche e culturali che stanno dietro alle varie riforme dell'insegnamento matematico susseguitesi in Italia dopo l'Unità d'Italia. Il terzo capitolo è dedicato a questa delicata fase della storia italiana e in esso si ha una ricostruzione della storia dell'educazione matematica dall'Unità d'Italia fino ad oggi, con particolare riferimento alle principali riforme istituzionali dell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie italiane. Nel quarto capitolo si descrivono la nascita ed i primi sviluppi del Liceo Matematico; si chiariscono i princìpi fondamentali, le finalità educative, sociali e formative del progetto, con un *focus* sul ruolo giocato dal Liceo Matematico nello sviluppo della competenza matematica, una delle competenze chiave dei futuri cittadini (Consiglio dell'Unione Europea, 2018). Nel quinto capitolo vengono descritto il disegno di ricerca: qui si specificano le domande di ricerca alle quali si è cercato di dare una risposta, il contesto in cui si inserisce la ricerca sperimentale, la metodologia adottata e gli strumenti utilizzati. Nel sesto capitolo si presentano i risultati emersi dall'analisi quantitativa e qualitativa dei dati raccolti. Gli esiti della ricerca sono discussi con opportuni riferimenti storici e con le lenti teoriche costituite dalle teorie di riferimento introdotte nei primi due capitoli. È alla luce dei quadri scelti che è stato possibile analizzare la varietà di dati registrati e rispondere alle domande di ricerca, offrendo così un modesto contributo alla ricerca sulla motivazione per l'apprendimento della matematica e sulla sperimentazione dei Licei Matematici in Italia. I risultati emersi sono incoraggianti e aprono la strada ad ulteriori ricerche che possano indagare differenti costrutti o usare differenti strumenti di indagine.

CAPITOLO I

L'importanza dei fattori affettivi e motivazionali nell'educazione matematica

1.1 Introduzione

In questo capitolo si cerca di risalire alle origini dei concetti di *affect* e di *motivazione*[1], costrutti intorno ai quali ruota l'intero progetto di ricerca e che sono stati al centro dell'attenzione nella ricerca in Didattica della Matematica negli ultimi decenni. L'ambito a cui si fa riferimento è quello dell'*affective domain* o più semplicemente al quadro affettivo in Didattica della Matematica, secondo la definizione fornita da McLeod (1992): «the affective domain refers to a wide range of beliefs, feelings, and moods that are beyond the domain of cognition» (McLeod, 1992, p. 576). Con il termine *beliefs* ("convinzioni") l'autore si riferisce al vasto campo dell'educazione matematica che riguarda le *convinzioni* di docenti e di studenti a partire dalle loro stesse esperienze; nello specifico, guardando all'oggetto delle convinzioni, egli distingue tra convinzioni sulla matematica, convinzioni su sé stessi, convinzioni sull'insegnamento della matematica e convinzioni sui contesti nei quali ricorrere alla Didattica della Matematica (McLeod, 1992). Nella sua visione, le convinzioni si trovano nel terreno comune tra il dominio cognitivo e il dominio affettivo, in quanto la loro natura potrebbe considerarsi cognitiva ma giocano comunque un ruolo molto importante nel dominio affettivo (Schuck, & Grootenboer, 2000). Altri autori, come si mette in evidenza in un importante studio (Zan et al., 2006) hanno ampliato il concetto a quello di '*self-efficacy beliefs*', ovvero di convinzioni sull'autoefficacia[2], e a quello di autoregolazione[3] degli studenti. Sentimenti e

---

1 Dal latino *movere*, che significa "muovere", "mettere in moto".

2 Si considera qui la definizione di autoefficacia fornita da Bandura (1994) secondo il quale essa è la percezione di un individuo di essere capace di fare accadere o realizzare qualcosa, di intervenire sulla realtà e di saper esercitare il controllo sugli eventi che influenzano la sua vita. Le convinzioni sull'efficacia personale influenzano le scelte di vita e anche il livello di motivazione (negli obiettivi da perseguire, negli sforzi da compiere, nella perseveranza ad affrontare le avversità).

stati d'animo quali l'ansia[4], la frustrazione o la soddisfazione sono stati inizialmente descritti nella letteratura matematica con il termine *attitudes*[5] ed usati per descrivere la risposta emotiva della persona ad un compito matematico (McLeod, 1992). La risposta del soggetto ad una certa situazione era così valutata come positiva o, rispettivamente, negativa.

Pur nella consapevolezza che termini nati in Psicologia (convinzioni, sentimenti, ansia, ecc…) assumono differenti significati in ambito matematico, come pure in altri ambiti di studio, McLeod opera una prima concettualizzazione del campo affettivo nell'educazione matematica e identifica tre importanti concetti: *beliefs*, *attitudes* e *emotions* (McLeod, 1992). Egli li ha concepiti all'interno di una dimensione di crescente intensità e decrescente stabilità: i primi (*beliefs*) sono i più stabili/meno intensi, le ultime (*emotions*) sono le meno stabili/più intense, gli atteggiamenti stanno al centro (Zan et al., 2006). All'interno del quadro affettivo si possono annoverare ulteriori aspetti accanto alle convinzioni (*beliefs*) quali i valori assegnati (*values*), gli atteggiamenti che si hanno (*attitudes*) e le emozioni provate (*emotions*); procedendo dal primo verso l'ultimo, si manifesta una crescente risposta emotiva della persona alla situazione o al compito che le

---

3 Con il termine 'autoregolazione' degli studenti si intende qui una regolazione del proprio comportamento finalizzata ad un'azione di apprendimento; più sono positive le emozioni provate (ad esempio, i sentimenti di competenza), più piacere si prova nell'apprendimento e, quindi, più il discente è portato ad autoregolare il proprio comportamento. Per approfondimenti, si veda il testo Malmivuori, ML. (2007). Affect and self-regulation, *Educational Studies in Mathematics 63*(2), pp. 149-164.

4 Il concetto è stato considerato spesso in forte nesso con i test per misurare l'ansia, riguardo alla matematica, ovvero per misurare la risposta dell'individuo in termini di paura, forte emozione o antipatia (McLeod, 1992), dunque per indicare una reazione negativa alla matematica. È stato indagato successivamente da altri e più punti di vista (ad esempio, per studiarne le implicazioni per le differenze di genere). Si rimanda ad altri studi più approfonditi sul tema: Caviola, S., Carey, E., Mammarella, I. C., & Szucs, D. (2017). Stress, time pressure, strategy selection and math anxiety in mathematics: A review of the literature. Frontiers in psychology, 8, 1488; Ramirez, G., Shaw, S. T., & Maloney, E. A. (2018). Math anxiety: Past research, promising interventions, and a new interpretation framework. Educational Psychologist, 53(3), 145-164; Orbach, L., Herzog, M., & Fritz, A. (2019). Relation of state-and trait-math anxiety to intelligence, math achievement and learning motivation. Journal of Numerical Cognition, 5(3), 371-399; Haase, V. G., Guimarães, A. P. L., & Wood, G. (2019). Mathematics and emotions: The case of math anxiety. In International handbook of mathematical learning difficulties (pp. 469-503). Springer, Cham)

5 Così sostiene Hannula in (Hannula, M., Evans, J., Philippou, G., & Zan, R. (2004). Affect in Mathematics Education--Exploring Theoretical Frameworks. Research Forum. International Group for the Psychology of Mathematics Education.).

si pone innanzi (Schuck & Grootenboer, 2000). Illustri matematici scomparsi nel secolo scorso quali Jaques Hadamard (1865-1963), Henri Poicarè (1854-1912) e Godfrey Harold Hardy (19877-1947) avevano già scorto una forte interazione tra gli aspetti cognitivi, metacognitivi, emotivi ed affettivi legati all'apprendimento (Zan et al., 2006). Per poter comprendere appieno il ruolo giocato dai fattori affettivi (intorno ai quali si muove la presente ricerca) nell'educazione matematica e come questi ultimi possano interagire con i fattori cognitivi nei processi di apprendimento della matematica negli studenti, viene prima fatto un breve *excursus* del percorso storico che ha portato all'affermarsi del ruolo dell'*affect* (ovvero, del dominio affettivo) nell'educazione matematica (pur considerando le varie declinazioni del concetto). Viene fatto così un focus sul concetto di motivazione per l'apprendimento della matematica nella letteratura. Si tratta di uno studio necessario al fine di circoscrivere il progetto di ricerca ad uno specifico settore della ricerca e per introdurre il framework teorico dal quale prende avvio l'indagine sperimentale. Nel capitolo successivo, vengono indagati alcuni specifici contesti didattici e formativi nei quali è messo in evidenza il ruolo svolto dai fattori affettivi nell'apprendimento dei contenuti matematici. Tali contesti hanno fatto da cornice alla sperimentazione condotta, sin dalle sue prima battute, come meglio descritto nei capitoli terzo e seguenti.

1.2 L'*affect* in matematica

Una delle fiorenti direzioni di ricerca in Didattica della Matematica riguarda il tema dell'*affect*, interpretato in modi diversi all'interno dei quadri teorici che ad esso si riferiscono. Le prime ricerche su tale tema risalgono al periodo tra gli anni Sessanta e gli anni Settanta; queste erano perlopiù centrate sull'*attitude towards mathematics* (ATM) e sulla *math anxiety*, due facce della stessa medaglia con la quale si esprimevano le sensazioni (positive o negative) provate verso la matematica (Zan et al., 2006). Entrambi sono stati presi in prestito dalla Psicologia sociale[6]. I primi studi sull'*attitude* si focalizzano non tanto su una definizione teorica del costrutto, quanto piuttosto sullo sviluppo di

[6] Psicologia Sociale: «Disciplina che ha per oggetto lo studio dei processi di socializzazione e d'interazione sociale.» (definizione tratta da www.treccani.it)

strumenti per misurarlo (Leder, 2019). I primi lavori su tale tema, infatti, si basano principalmente sulla convinzione che tale costrutto sia legato ai risultati conseguiti e che gli esiti emotivi (ad esempio, la simpatia verso la matematica) siano di per sé significativi. La maggioranza dei primi studi sull'ansia per la matematica partono dal presupposto che l'ansia provata nello svolgere un test sia legata, in senso negativo, alle prestazioni dell'individuo; alcuni ritengono possa inibire i processi cognitivi e, quindi, inficiare le prestazioni dell'individuo; altri ritengono sia dovuta a precedenti esperienze caratterizzate da scarse prestazioni (Zan, 2006). La ricerca sull'*affect* ha visto impressa una nuova direzione in seguito alla "scoperta" del nesso esistente tra *affect* e i processi cognitivi (coinvolti nell'attività di apprendimento) attivati durante la risoluzione di problemi, in riferimento alle ricerche di matrice cognitivista[7]. Questa rivalutazione della dimensione affettiva nell'apprendimento della matematica è stata discussa ampiamente nel testo *Affect and mathematical problem solving* di McLeod e Adams (1989) e poi ancora nel testo *Research on affect in mathematical education: a reconceptualization* di McLeod (1992). Il primo testo sottolinea come i fattori emotivi entrano in gioco per interpretare il comportamento degli studenti impegnati in situazioni di *problem solving*[8] matematico. Il testo è coerente con la teoria delle emozioni di Mandler (1989), il primo ad aver applicato la sua teoria cognitivista sulle emozioni all'educazione matematica. Per maggior chiarezza, viene fatto un cenno a tale teoria.

---

[7] Cognitivismo: «indirizzo psicologico che si occupa dei processi cognitivi (intuizione, pensiero, memoria, attenzione, conoscenza, abilità, comprensione) mediante i quali un organismo acquisisce informazioni dall'ambiente, le elabora ed esercita su di esse un controllo. Secondo il cognitivismo, essendo la conoscenza sempre mediata, è fondamentale il concetto di esperienza: infatti, da un lato lo sviluppo cognitivo risulta dall'elaborazione della conoscenza percettivo-concettuale del mondo e dall'altro quest'ultima si realizza nelle attività esecutive. La psicologia genetica si propone dunque di studiare la genesi e lo sviluppo dei processi cognitivi, nonché l'influenza che l'inculturazione esercita sull'organizzazione mentale.» (definizione tratta da www.treccani.it)

[8] Con l'espressione *problem solving* si intende qui un processo cognitivo messo in atto quando si vuole risolvere un dato problema di cui non si ha a disposizione un metodo di risoluzione evidente (definizione data da Mayer, 1992). La promozione del *problem solving* nell'educazione matematica di base è enfatizzata non solo da numerosi studi, ma anche nelle attuali Indicazioni Nazionali e Linee Guida per il curricolo di matematica e costituisce nel sistema di istruzione italiano un elemento di continuità tra il primo e il secondo ciclo scolare (Baccaglini Frank et al., 2018).

Nella visione di Mandler, i fattori affettivi emergono principalmente come risposte emotive all'interruzione di un dato comportamento pianificato. Per comprendere ciò occorre tenere presente questo accade quando si attiva uno schema di comportamento: la sequenza di azioni a cui si dà il via presuppone che il soggetto conosca di volta in volta l'azione successiva da compiere, attendendo qualcosa che in realtà ci si aspetta già. Quando invece questa sequenza di azioni viene bloccata perché si è verificato un evento inaspettato, si attiva subito una risposta fisiologica nell'individuo: i battiti aumentano, i muscoli si mettono in tensione. Si attiva, cioè, il sistema autonomo e, quasi per istinto di sopravvivenza, l'individuo cerca di interpretare l'evento accaduto inaspettatamente nel contesto in cui si è verificato per valutare i significati associati alle nuove informazioni. Questa valutazione dipende necessariamente dalla cultura a cui egli appartiene e dalle convinzioni ad essa ancorate; inoltre, è accompagnata da un'emozione di breve durata che può essere positiva o negativa, a seconda se l'evento inaspettato può essere assimilato o meno al vecchio schema di comportamento senza ostacolare gli obiettivi prefissati. Potrebbe così risultarne piacevolmente sorpreso o al contrario infastidito, irritato. Questo non è affatto distante dalle esperienze emotive vissute da uno studente: è inevitabile, secondo Mandler, che nell'apprendere la matematica si verifichino delle simili interruzioni di comportamenti pianificati (è ciò che accade, ad esempio, quando uno studente fallisce nella ricerca della soluzione di un dato problema). Tali interruzioni innescano nell'alunno delle emozioni che presentano tre aspetti distintivi: primo, dipendono dalle convinzioni sulla matematica e su se stesso, di cui lo studente si fa portatore; secondo, possono essere negative (frustrazione) oppure positive (qualora, invece, sia in grado di superare il blocco verificatosi e trovare la soluzione cercata); terzo, lo studente svilupperà un atteggiamento negativa o positiva verso la matematica a seconda delle situazioni simili che si ripeteranno nella sua esperienza individuale (McLeod, 1992). Questi tre aspetti corrispondono rispettivamente a tre differenti settori di ricerca in didattica della matematica: le convinzioni (*beliefs*), le emozioni (*emotion*) e l'atteggiamento (*attitudes*) nell'insegnamento e apprendimento della matematica. Si tratta di un cambiamento radicale che sottolinea l'importanza dell'*affect* nella formazione matematica in generale, dovuto all'importante contributo teorico alla ricerca offerto qualche anno più tardi da McLeod

(1992). Ciò ha aperto la strada a nuove direzioni di ricerca, quali ad esempio il confronto tra le varie definizioni di *attitude*, l'integrazione tra metodi di ricerca qualitativi e metodi quantitativi, le molteplici sfaccettature del concetto di *beliefs* la relazione tra *affect* e *motivazione* (McLeod, 1992; Turner et al. 1998; Hannula, 2006). Studi successivi hanno, difatti, posto l'attenzione su altri costrutti quali, ad esempio, la *motivazione*, l'*umore*, l'*interesse* e le *convinzioni individuali*.

L'aspetto affettivo nell'educazione matematica - o l'*affect*, in generale – occupa attualmente una vasta area di ricerca ed è caratterizzato da una notevole varietà di approcci teorici (Leder, 2019; Schuck & Grootenboer, 2000), come meglio discusso in una recente revisione (Hannula et al., 2019) sullo stato dell'arte nella ricerca sull'*affect* e la didattica della matematica. Inoltre, la ricerca in questo settore è in gran parte limitata agli atteggiamenti, convinzioni, sentimenti che i partecipanti sono in grado di esprimere, in forma scritta o verbale (Schuck & Grooenboer, 2000). Nel tentativo di classificare i quadri teorici nella ricerca sull'*affect* legato alla matematica, Hannula (2012) suggerisce di usare tre dimensioni o categorie. La prima si basa sull'aspetto cognitivo (es. *beliefs* di studenti e insegnanti), l'aspetto motivazionale (es. *values*), e quello emotivo (es. *emotions*) dell'*affect*. La seconda dimensione distingue le teorie che si concentrano sugli aspetti dinamicamente mutevoli dell'affetto (gli *stati* affettivi che cambiano rapidamente) dalle teorie che si concentrato su aspetti relativamente stabili dell'affetto (cioè i *tratti*). La terza dimensione consiste nel concettualizzare l'*affect* per la sua natura fisiologica, psicologica e sociale; essa nasce dalla consapevolezza che la ricerca sulla mente umana abbraccia la natura biologica, psicologica e sociale di quest'ultima.

L'interazione tra la dimensione affettiva dell'allievo (che include i costrutti della *motivazione*, dell'*interesse*, delle *convinzioni*, dell'*atteggiamento*) e la dimensione cognitiva rimane ancora oggi un problema aperto. Secondo Schuck e Grootenboer, la distinzione tra cognizione e affetto in genere non è affatto chiara e sarebbe proficuo fare ricerca in Didattica della Matematica coniugando e integrando le due prospettive (Schuck e Grootenboer, 2000). Diversi approcci all'*affect* sono stati proposti dai ricercatori per spiegare la natura dell'interazione tra la dimensione affettiva e la dimensione cognitiva dell'allievo (Zan et al., 2006). Tra essi, qui ne sono riportati tre, in quanto correlati agli obiettivi della ricerca. Il primo approccio, adottato da Hannula (2006), considera i sopracitati *beliefs, attitudes, emotions* e *values* quali elementi distinti dell'*affect*. Tra essi, Hannula non annovera anche la motivazione, ritenendo quest'ultima un "potenziale" che offre nuove prospettive di analisi del costrutto *affect* (Hannula, 2006, p.175). Pur se non approfondisce le interrelazioni tra la motivazione e gli elementi dell'*affect* (in quanto si tratta di un problema che richiede ulteriori approfondimenti), sostiene che la motivazione di un individuo non sia direttamente osservabile né del tutto accessibile alla persona stessa, ma trovi manifestazione nella dimensione affettiva, nel comportamento e nella cognizione (Hannula, 2006). Secondo Leder (Leder, 2019), infatti, è comunemente accettato il fatto che gli aspetti del dominio affettivo (indipendentemente dall'approccio adottato nello studio di questi ultimi) non possono essere né osservati facilmente, né tantomeno misurati direttamente. Possono, tuttavia, essere dedotti dal comportamento, dal discorso o dalle risposte di un individuo a stimoli o strumenti specificamente progettati (Leder, 2019). Secondo una prospettiva sociocostruttivista dell'apprendimento e delle emozioni, invece, l'*affect* è considerato come emozione e, in quanto tale, deriva dall'interazione tra processi fisiologici, cognitivi e motivazionali in un contesto specifico. Ambedue gli approcci all'*affect* risentono di una chiara impronta Vygotskijana: in altre parole, l'apprendimento è possibile laddove vi è una continua interazione dell'individuo con il mondo (Ligorio & Cacciamani, 2013). A tal proposito, secondo alcuni studi (es. Turner et al., 1998; Malmivuori, 2007), l'interazione tra la dimensione affettiva e quella cognitiva è veicolata dalle emozioni che prova lo studente: le emozioni innescano delle reazioni psicologiche e influenzano in vari modi i processi cognitivi, oltre che la motivazione e l'autoregolazione che viene adottata in situazioni di apprendimento matematico. Ad esempio, Zan e altri (Zan et al., 2006) affermano che le emozioni condizionano l'attenzione e la memoria. Nell'intento di comprendere in che modo le emozioni possano influenzare i processi cognitivi, le ricerche in Didattica della Matematica hanno sentito inevitabilmente l'influenza degli studi sui processi di apprendimento in Psicologia ma indagare tali studi esula dagli obiettivi di questo lavoro.

1.3 La motivazione all'apprendimento della matematica

Riguardo alla *motivazione*, il costrutto è stato declinato nella ricerca sul dominio dell'*affect* in matematica in differenti modi e, nel tentativo di definirlo con maggiore chiarezza, sono state fatte diverse analisi di tipo qualitativo e quantitativo su di esso. Secondo Hannula (2006), ad esempio, la motivazione consiste nella capacità di regolare il proprio comportamento attraverso i meccanismi che controllano le emozioni. Questa capacità è «strutturata secondo bisogni e obiettivi[9]» ed è collegata in modo diretto con le emozioni che si provano (Hannula, 2006, p.175, trad.). Esse, infatti, sono osservabili solo parzialmente, nel linguaggio del corpo e nella minima facciale; si manifestano in emozioni positive (es. gioia, soddisfazione, interesse) qualora una situazione sia "in linea" con la motivazione della persona, in emozioni negative (tristezza, rabbia, frustrazione) in caso contrario (Hannula, 2006). Ad ogni modo, il comportamento è una manifestazione attendibile della motivazione della persona. Middleton e Spanias (Middleton & Spanias, 1999) ritengono che la motivazione coinvolga due dimensioni: una intrinseca e l'altra estrinseca. La prima riguarda gli aspetti legati ai desideri degli studenti (attitudine, convinzioni, *forma mentis*, orientamento al risultato, autoefficacia). La seconda riguarda l'influenza delle azioni del docente sulla motivazione degli studenti e sul loro comportamento. Un primo modello processuale che collega le due dimensioni della motivazione, la dimensione intrinseca e quella estrinseca, è il modello processuale proposto da Skinner e altri collaboratori (Skinner et al., 2009) e discusso in un recente contributo alla ricerca sul tema della motivazione (Wilkie & Sullivan, 2018). In tale modello, dai fattori esterni alla persona (ai quali è legata una *motivazione estrinseca*) è possibile giungere ai risultati motivazionali (cui è invece legata una *motivazione intrinseca*) (Wilkie & Sullivan, 2018, p.238):

---

[9] I bisogni di autonomia, competenza e di interazione sociale sono i più significativi nella scelta degli obiettivi da perseguire (Hannula, 2006) e, dunque, i principali bisogni da cui prende forma la motivazione della persona.

CONTEXT → SELF SYSTEMS → ACTION → MOTIVATIONAL OUTCOMES

Gli autori del modello individuano diversi contesti sociali in cui la motivazione inizia a prendere forma da fattori esterni alla persona: fattori come le ricompense, la natura dei compiti accademici, le strutture degli obiettivi, il clima organizzativo (ad esempio, la scuola, la famiglia, il clima di quartiere), la chiarezza delle aspettative, le premure, gli stili relazionali (ad esempio, autoritario) e il coinvolgimento degli adulti di riferimento (ad esempio, genitori, insegnanti, allenatori) e dei pari (ad esempio, compagni di classe, amici). (Skinner et al., 2009). Tali fattori risultano collegati tra loro e si mediano a vicenda nel predire il successo accademico della persona; essi caratterizzano i contesti sociali (famiglia, scuola, quartiere, le interazioni con i pari e gli adulti di riferimento) che afferiscono alla dimensione estrinseca. Gli auto-sistemi si riferiscono a fattori intrinseci quali le aspettative di successo, la competenza percepita, l'autoefficacia, i valori, gli obiettivi, l'orientamento agli obiettivi, l'interesse, l'impegno, l'attaccamento e i sentimenti di appartenenza. Le azioni si riferiscono ai meccanismi di autoregolazione del comportamento, con cui vengono selezionate le attività (compiti ritenuti stimolanti, coinvolgenti) da compiere. Sono intenzionali, generate da una spinta motivazionale e orientati verso qualche obiettivo; non si tratta dunque di ciò che nel linguaggio comune si indica come "comportamento", piuttosto sono il riflesso della motivazione umana e fanno parte del comportamento di una persona (Skinner et al., 2009). Esse preannunciano la risposta dell'individuo (*engagement*[10] o *disaffection*[11]) agli stimoli esterni: i *risultati motivazionali*, ossia le

[10] Per *engagement* si intende qui il pieno coinvolgimento nello svolgimento di un'attività di apprendimento nell'ambiente di classe su più livelli: comportamentale (sforzo profuso, attenzione, persistenza), cognitivo (senso di competenza, orientamento al risultato, ricerca di strategie) ed emotivo (entusiasmo, interesse, divertimento). Per ulteriori approfondimenti, si rimanda ai testi seguenti: Durksen, T. L., Way, J., Bobis, J., Anderson, J., Skilling, K., & Martin, A. J. (2017). Motivation and engagement in mathematics: a qualitative framework for teacher-student interactions. *Mathematics Education Research Journal, 29*(2), 163-181; Skinner, E., Furrer, C., Marchand, G., & Kindermann, T. (2008). Engagement and disaffection in the classroom: Part of a larger motivational dynamic? *Journal of educational psychology, 100*(4), 765.

[11] Per *disaffection* si intende un motivo di scontento, una disaffezione nei confronti di attività proposte da altri; essa si può manifestare a livello comportamentale (disattenzione, passività, rinuncia a svolgere un compito) ed emotivo (disinteresse, noia, frustrazione, ansia, vergogna). Per ulteriori approfondimenti si rimanda al seguente lavoro: Skinner, E., Furrer, C., Marchand, G., & Kindermann, T. (2008).

manifestazioni esterne della propria motivazione. Secondo i teorici della motivazione, si parla di *engagement* per indicare sia l'intraprendere un'azione motivata, diretta verso un certo obiettivo, sia il perdurare di quell'azione di fronte agli ostacoli o alle difficoltà (Skinner et al., 2009). L'engagement è un indicatore della presenza di fattori affettivi positivi (Schuck & Grootenboer, 2004). La sua controparte è definita *disaffection*: uno stato di disimpegno o disaffezione che passa attraverso i movimenti (passività, mancanza di sforzo, distrazione) che rivelano disattenzione, riluttanza e mancanza di concentrazione, e le emozioni (tristezza, preoccupazione, autocommiserazione, noia) (Skinner et al., 2009). Nel processo indicato sopra, l'influenza positiva (rispettivamente, negativa) sulla *motivazione* dello studente parte da un contesto *di supporto* (rispettivamente, *non di supporto*): il contesto può facilitare (rispettivamente, ostacolare) gli *auto-sistemi* (fattori intrinseci quali le autopercezioni, l'orientamento al risultato e l'impegno) e aiutare lo studente a sviluppare i meccanismi di autoregolazione (con cui vengono selezionate *azioni* da compiere e attività da svolgere). L'idea che vi è alla base è che gli obiettivi e le emozioni stimolano e dirigono l'interesse della persona e le azioni che compie intenzionalmente; in tal senso le azioni sono un riflesso della motivazione di un individuo (Skinner et al., 2009). I *risultati motivazionali* afferiscono al piano sociale, cognitivo e della personalità dell'allievo e, pertanto, ad una dimensione propriamente intrinseca; l'atteggiamento di *engagement* piuttosto che di *disaffection* gioca un ruolo importante in questo senso, dal momento che influenza in modo diretto l'apprendimento e la performance della persona (Skinner et al., 2009). Il modello sopra descritto è alla base di un'indagine sperimentale (Wilkie & Sullivan, 2018) nella quale ad un dato campione è stata posta la seguente domanda, espressa in forma libera: «*Se tu avessi un desiderio per il tuo apprendimento della matematica, quale sarebbe?*». Dai risultati emersi dallo studio, i desideri positivi espressi dal campione degli studenti sembrano essere legati ad un interesse *situazionale* (Wilkie & Sullivan, 2018, p.250): gli studenti desiderano essere coinvolti dall'ambiente esterno, desiderano acquisire una conoscenza approfondita degli argomenti

---

Engagement and disaffection in the classroom: Part of a larger motivational dynamic? *Journal of educational psychology, 100*(4), 765.

di matematica ed essere impegnati in attività di apprendimento che non siano né troppo facili, così da non annoiarsi, né troppo difficili, in modo che gli sforzi degli studenti vengano premiati con un risultato di successo.

1.4 Metodologie per "misurare" il costrutto della motivazione

L'esigenza di dover "misurare" l'atteggiamento degli studenti verso la matematica nasce inizialmente nei problemi di genere, per confrontare i risultati di apprendimento in matematica tra uomini e donne. Leder (2019) offre una panoramica degli strumenti comunemente usati nella ricerca sull'educazione matematica per misurare l'*affect* e il suo ruolo nell'apprendimento e nell'insegnamento della matematica. Nello specifico, egli indica: il test di auto-valutazione, con o senza risposte aperte; l'intervista, e in particolare l'intervista "strutturata" (che prevede una lista predeterminata di domande specifiche da porre); l'intervista non strutturata, grazie alla quale è possibile scoprire punti di vista non previsti in anticipo; l'intervista semi-strutturata, una combinazione dei precedenti due strumenti indicati. Ad esempio, si riporta brevemente quanto discusso nel contributo di Middleton, Mangu e Lee (2019) sugli effetti dei fattori motivazionali sull'intenzione di intraprendere una carriera nelle discipline STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*). Lo studio è stato condotto su 24.000 studenti americani di grado 9 nel 2009 e sugli stessi nel 2011; è stato loro somministrato un questionario con 18 item a risposta chiusa e aperta. Dall'analisi quantitativa dei dati raccolti è emerso un legame tra i fattori motivazionali indagati (*identity, interest, utility, self-efficacy, effort*) e l'intento di lavorare in futuro nell'ambito STEM. I ricercatori hanno rilevato una motivazione legata alle esperienze in matematica e scienze ma fortemente instabile nel tempo: quanti erano orientati verso una carriera nelle discipline STEM nel 2009, hanno perlopiù cambiato idea appena due anni dopo. Usufruendo degli studi di Psicologia Sociale, sin dalle prime scale di misurazione elaborate si usano le scale di Likert[12] come item di risposta. Uno degli

[12] Il formato che si ritrova nelle singole domande della scala di Likert presenta una serie di affermazioni per ciascuna delle quali l'intervistato/a deve dire se e in che misura è d'accordo. In genere, si hanno cinque alternative di risposta che spaziano da "completamente in disaccordo" a "molto d'accordo". (definizione

strumenti più popolari per misurare l'atteggiamento nei confronti della matematica, ampiamente discusso in letteratura, è costituito dalle *Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales* (FSMAS) di Fennema e Scherman (Fennema & Scherman, 1976). Le scale si compongono di 108 item in totale, raggruppati in nove parti corrispondenti ciascuna ad una sottoscala. Le sottoscale possono essere usate singolarmente o combinate fra loro. Nello specifico, esse sono:

1) *The Attitude toward Success in Mathematics (AS)*: con essa si intende misurare quanto gli studenti anticipano conseguenze positive o negative come risultato di un successo conseguito in matematica;

2) *The Mathematics as a Male Domain Scale (MD)*: con essa si intende misurare quanto la matematica è vista dagli studenti come un ambito maschile / femminile;

3), 4) *The Mother (M)/Father (F) Scale*: ha lo scopo di misurare la percezione degli studenti sulla fiducia in sé stessi e sull'incoraggiamento da parte del padre/ della madre e di misurare quanto i genitori siano interessati e consapevoli dell'importanza della matematica;

5) *The Teacher Scale (T)*: per misurare come gli studenti percepiscono l'atteggiamento del docente nei loro confronti (incoraggiamento, interesse, fiducia nelle capacità dello studente);

6) *The Confidence in Learning Mathematics Scale (C)*: per misurare la fiducia nelle proprie capacità di apprendimento e nelle proprie capacità di portare a termine i compiti di matematica;

7) *The Mathematics Anxiety Scale (A)*: per misurare emozioni quali ansia, nervosismo, paura e relative sensazioni corporee legate al fare matematica;

8) *The Effectance Motivation Scale in Mathematics (E)*: con essa non si intende misurare il piacere di fare matematica, quanto l'effetto risultante delle modalità in cui è

---

tratta da https://www.sordelli.net/finanziamenti-progettazione-mainmenu-89/strumenti/glossario/775-scala_di_likert in data 27/01/2021).

applicata la matematica (o meglio, la disposizione del singolo verso la risoluzione attiva di problemi matematici);

9) *The Mathematics Usefulness Scale (U)*: per misurare le convinzioni degli studenti sull'utilità della matematica, sia nel momento attuale sia in prospettiva futura (Fennema & Sherman, 1976, pp325,326).

Lo studio punta ad acquisire maggiori informazioni sull'apprendimento in matematica da parte delle alunne. A tal fine, ogni sottoscala valuta un atteggiamento che è stato ipotizzato in relazione con l'apprendimento della matematica in tutti gli studenti o, in particolar modo, che fosse importante per le sole femmine (Fennema & Sherman, 1976). Nel complesso, la presenza delle sottoscale rafforza la convinzione che vi sia una pluralità di atteggiamenti che influenzano l'apprendimento della matematica (Leder, 2019). La scala appena descritta è stata adottata e, a seconda degli scopi perseguiti, adattata, più e più volte dalla sua introduzione. Molti anni più tardi, quando l'attenzione si era già spostata sull'atteggiamento nei confronti della matematica, viene sviluppato un nuovo strumento di misurazione: *l'Attitudes Towards Mathematics Inventory*, o semplicemente ATMI (Tapia & Marsh, 2004). Esso è stato elaborato per valutare i fattori che influenzano le aspettative e il rendimento degli studenti in matematica: l'auto-consapevolezza o *self-confidence* (es. "*I am able to solve mathematics problems without too much difficulty."*), il *valore* assegnato alla matematica (es. "*Mathematics is important in everyday life."*), il *piacere* verso l'argomento di studio (es. "*I have ussually enjoyed sutdying mathematics in school."*) e la *motivazione* ad avere successo in matematica (es. "*I am willing to take more than the required amount of mathematics."*). Si differenzia dalla scala precedente per la sua brevità e semplicità di struttura. Infatti, l'ATMI risulta composto da 40 item inerenti al campo dell'*attitude*. Lo studente esprime, in una scala da 1 a 5, quanto è in accordo/disaccordo con ciascuna affermazione (scala di Likert). Una versione breve dell'ATMI, denominata appunto *Short ATMI*, è stata elaborata da Lim e Chapman (Lim & Chapman, 2013a). La *Confirmatory Factor Analysis* (CFA) ne ha confermato la validità della struttura a 4 fattori: *piacere*, *motivazione*, *fiducia in sé stessi*, *valore* assegnato alla matematica. Gli stessi autori si propongono di fornire una versione rivista (FSMAS-R) della sottoscala di FSMAS sull'ansia verso la matematica (Lim & Chapman, 2013b). Contemporaneamente al loro studio, si prefiggono di valutare le proprietà psicometriche delle scale di valutazione usate come strumenti per misurare la motivazione negli studenti. Il risultato è un modello a due fattori per la FSMAS-R, che si compone infatti di due sottoscale per misurare l'ansia verso la matematica (FS-ANX) e la predisposizione verso la matematica (FS-EASE).

Uno dei più popolari strumenti di misurazione della motivazione degli studenti è sicuramente l'*Academic Motivation Scale* (Vallerand et al., 1992), in breve AMS. Il test si compone di 28 items riferiti alle possibili risposte alla domanda: *Perché studi all'università?* Le risposte previste sono espresse nella scala di Likert, come per l'ATMI (Tapia&Marsh, 2004). Il test fa riferimento al quadro teorico della teoria dell'autodeterminazione (Deci & Ryan, 1985), in cui dalla *amotivation* vi è un *continuum* che procede lungo un crescente livello di autodeterminazione dello studente, verso la *intrinsic motivation*, come indicato nella figura seguente (Deci & Ryan, 1985, p.72):

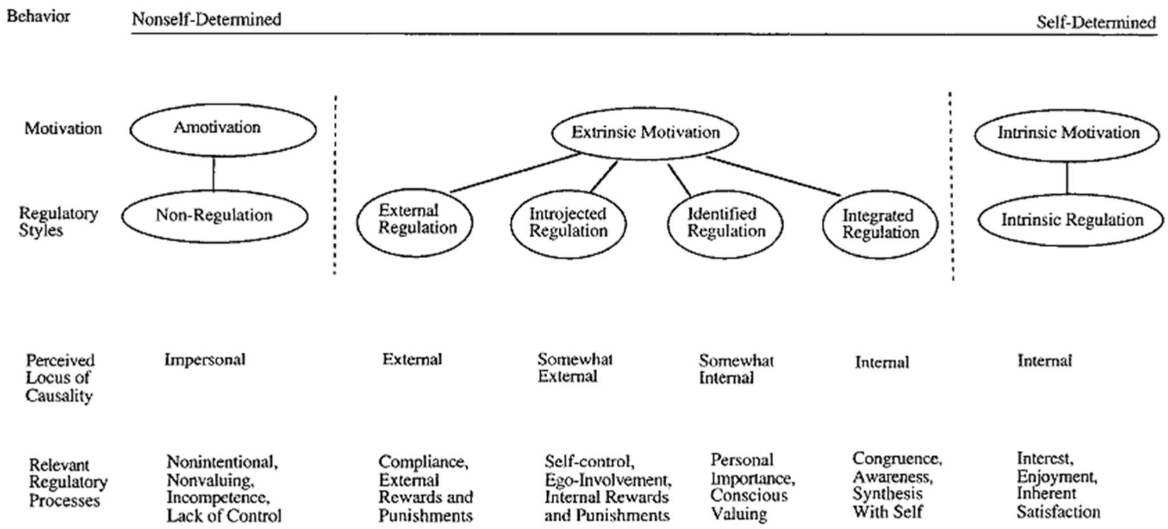

Figura 1. The Self-Determination Continuum Showing Types of Motivation With Their Regulatory Styles, Loci of Causality, and Corresponding Processes (tratta da Deci & Ryan, 1985, 9.72).

In accordo con la SDT[13] (*Self-Determination Theory*) di Deci e Ryan (1985, 2000), questi differenti tipi di *motivazione* corrispondono a diversi valori percepiti per il proprio comportamento e diversi gradi di regolazione del comportamento che è stato interiorizzato. In altre parole, «human behavior is driven by motivations that one wants to satisfy». (trad. «il comportamento è guidato dalle emozioni che si vuole soddisfare») (Tóth-Király et al., 2017, p.130). Scopo del test è quello di indagare i tre principali sottocampi della *motivazione* (Vallerand et al., 1992, pp-1004-1009):

- *Intrinsic motivation to know*[14]*, toward accomplishments*[15] *and to experience stimulate*[16] (es. "vado a scuola perché mi piace imparare cose nuove");

- *Extrinsic motivation*, che si riferisce al fatto che lo studente assume un certo comportamento (es. approfondisce lo studio di un argomento a casa) per le conseguenze – premi o punizioni - che ne derivano[17] (es. per prendere buoni voti in Matematica), perché spinti da pressioni interne[18] (ad esempio, l'ansia) o perché l'attività si ritiene importante per la propria persona[19] (ad esempio, per acquisire delle competenze spendibili nel lavoro che si intende svolgere al termine degli studi);

- *Amotivation*, che si attua negli studenti che non sono mossi da *motivazione intrinseca* né da *motivazione estrinseca*, non percepiscono alcun legame tra le proprie azioni e i propri

---

[13] Per approfondimenti, si suggerisce di visitare il sito dedicato https://selfdeterminationtheory.org/ nel quale si ritrovano le linee generali della teoria e i riferimenti alle molte ricerche basate sulla Self-Determination Theory.

[14] Si riferisce alla motivazione ad acquisire nuove conoscenze su un dato argomento (Tóth-Király et al., 2017).

[15] È legata allo scopo di raggiungere degli obiettivi prefissati o di superare sé stessi, le proprie aspettative (Tóth-Király et al., 2017).

[16] La stimolazione dell'esperienza consiste nel sentirsi ricompensati dalle sensazioni provate (come gioia, eccitazione) mentre si è coinvolti in un'attività. (Tóth-Király et al., 2017).

[17] Si parla in questo caso di External Regulation.

[18] Si parla in questo caso di Introjected Regulation.

[19] Si parla in questo caso di Identified Regulation.

risultati, non vogliono compiere alcun tipo di azione e, di conseguenza, smettono talvolta di frequentare la scuola.

Una versione adattata dell'AMS (Lim & Chapman, 2015a), indicata brevemente con AMTMS (= "Academic Motivation Toward Mathematics Scale"), intende misurare la motivazione verso la matematica a partire dalla SDT di Deci e Ryan (1985, 2000) e dal test elaborato da Vallerand e dai suoi collaboratori (Vallerand et al., 1992). Il modello usato è un modello a cinque fattori (che, a seguito di un'attenta validazione, ha riportato una buona consistenza interna e un buon indice di affidabilità test-retest), che include *amotivation, external regulation, introjection, identification e intrinsic motivation*. L'analisi fattoriale e di correlazione tra gli items del test lo rendono un valido strumento per misurare la motivazione degli studenti (Lim & Chapman, 2015a). Lo strumento è stato adottato (a seguito di opportuna analisi fattoriale) in contesti culturali diversi da quello esaminato dagli autori (come già è stato fatto in Turchia, Messico, Spagna, Portogallo, Argentina, Canada, Russia e molti altri Paesi).

Alla luce delle premesse fatte, si potrebbe dire, dunque, che tra motivazione ed emozione intercorre un duplice legame di causa – effetto quando si pensa all'insegnamento-apprendimento: il comportamento è guidato dalle emozioni che ciascuno è naturalmente portato a soddisfare (Tóth-Király et al., 2017) e, quando le emozioni (piacere, gioia, divertimento) trovano espressione, l'individuo è motivato a dirigere in proprio comportamento nella direzione dell'autodeterminazione. Il perno attorno al quale ruotano motivazione ed emozioni è costituito dal bisogno di soddisfare le proprie emozioni. È opportuno precisare che accanto ai bisogni emotivi (in altre parole, al bisogno di soddisfare le proprie emozioni), vi sono dei bisogni definiti da alcuni ricercatori 'primordiali', in quanto innati nell'uomo: il bisogno di autonomia, il bisogno di competenza e il bisogno di interazione sociale (Baumeister & Leary, 1995; Hannula, 2006; Ryan & Deci, 2000). La sensazione di autonomia si sperimenta nel sentirsi liberi da pressioni esterne (provenienti, ad esempio, dai genitori che esercitano il controllo sui figli e li spingono a svolgere i compiti per casa), liberi di scegliere, o meglio, di agire secondo ciò che si ritiene importante per sé; contesti sociali che supportano il senso di autonomia degli studenti stimolano una grande curiosità, un desiderio di scoperta che è possibile ricondurre ad una motivazione intrinseca (Ryan & Deci, 2000). Accanto al bisogno di autonomia, la *Cognitive Evaluation Theory*[20] (CET) di Deci e Ryan (Deci & Ryan, 1985) attribuisce al bisogno di competenza un ruolo fondamentale nell'incrementare la motivazione intrinseca. Secondo tale teoria, le sfide ottimali, la libertà dalle valutazioni (specie se scoraggianti), i riscontri positivi sulle prestazioni conseguite e che rilevano l'efficacia di un'azione possono contribuire all'aumento della motivazione intrinseca a compiere quella stessa azione. Ciò che media l'effetto di aumento della motivazione intrinseca è la percezione della propria competenza: di quest'ultima fa esperienza l'allievo/a che, ad esempio, raggiunge l'obiettivo di comprendere un dato compito o problema e di risolverlo e sente di aver imparato qualcosa dall'averlo risolto (Hannula, 2006). Raggiungere i propri obiettivi di apprendimento permette di soddisfare il bisogno di competenza. Si tratta di una percezione che non può tuttavia intervenire sulla componente della motivazione intrinseca a meno che non accompagnata dal senso di autonomia dell'individuo o, in altre parole, dal fatto che rintracci dentro di sé il *luogo di causalità percepito*[21]. Sentire la pressione di una valutazione e perseguire degli obiettivi imposti da qualcun altro sono solo alcuni esempi di quelle condizioni che portano alla percezione di un *locus of causality* esterno alla persona e, di conseguenza, inibiscono la sua motivazione intrinseca. Al contrario, le occasioni in cui si può scegliere, senza scadenze o pressioni di alcun genere, e si può agire in modo indipendente oltre che determinato portano alla percezione di un *locus of causality* interno alla persona, favoriscono una forte sensazione di autonomia e, dunque, una motivazione intrinseca (Ryan & Deci, 2000). Accanto ai bisogni psicologici di autonomia e di competenza, la ricerca nel campo dell'educazione guarda sempre più al concetto di

---

[20] La *Cognitive Evaluation Theory* (CET) è stata presentata da Deci e Ryan (1985) come una sottoteoria della SDT nella quale sono inquadrati i fattori sociali e ambientali che favoriscono un comportamento intrinsecamente motivato, a partire dal presupposto che la motivazione intrinseca può germogliare solamente in un terreno fertile, che le consenta di mettere radici e crei nella persona le condizioni per garantirne la piena espressione (Ryan & Deci, 2000).

[21] L'espressione è una parziale traduzione dell'autrice dell'espressione *perceived locus of causality* (PLOC). Essa indica un concetto introdotto da Heider (1958) riguardante il dedurre le motivazioni ed intenzioni di una persona. Egli era solito distinguere cause personali (nella quale rientra l'intenzionalità) da cause impersonali (come gli ambienti, che producono determinati effetti indipendenti dalle intenzioni della persona che ne fa parte). Per maggiori approfondimenti, si rimanda ad altri testi: Ryan & Connell, 1989, Heider, 1958.

relazionalità – «quel bisogno psicologico di sentirsi connessi all'interno di relazioni di sostegno» (Durksen, 2017, 177, trad.) – specialmente in quegli studi inquadrati dalla teoria dell'autodeterminazione. Spostando il focus sulla matematica, il bisogno di relazionalità può essere soddisfatto attraverso le interazioni tra insegnante e studente in classe, in particolare quando l'insegnante si fa carico di una richiesta di aiuto da parte dello studente e risponde ad essa, adattando la sua azione formativa e supportando in tal modo il processo di insegnamento-apprendimento (Durksen, 2017). Un importante studio di qualche anno fa richiama diverse ricerche che hanno documentato un legame tra il senso di appartenenza a scuola e molteplici indicatori di motivazione accademica, in particolare l'impegno emotivo (Skinner et al., 2009). Da una più ampia prospettiva motivazionale, alcuni studi (Baumeister & Leary, 1995) partono dal presupposto che «gli individui nascono con un innato desiderio di connettersi agli altri» (Skinner et al., 2009, p. 768, trad.) e la qualità del loro impegno in una particolare attività è legato alla misura in cui sentono di appartenere al contesto in cui si svolge quell'attività (Skinner et al., 2009). Le parole di Hannula (Hannula, 2006) indicano brevemente le condizioni nelle quali è possibile incontrare, soddisfare o meno tali bisogni quando il contesto considerato è quello didattico, quello della classe:

> *The basic needs of autonomy, competence and social belonging can all be met in a classroom that emphasises exploration, understanding and communication instead of rules, routines and rote learning.*
>
> *(Hannula, 2006, p.176)*

L'autore si riferisce a quelle situazioni didattiche incentrate sullo studente, dove si dà molto spazio al «lavoro di squadra» e si riscontrano diverse opportunità di soddisfare il bisogno di autonomia e di interazioni sociale che alberga in ciascun membro della classe (Hannula, 2006). Contesti che supportano il soddisfacimento di tali bisogni favoriscono comportamenti intrinsecamente motivati nei quali il *perceived locus of causality* è situato all'interno del soggetto (Ryan & Deci, 2000); come diretta conseguenza, essi favoriscono dunque la motivazione (intrinseca) dello studente (Wilkie & Sullivan, 2018). Questo aspetto conferma, dunque, quanto già emerso in precedenti ricerche nelle quali l'apprendimento è veicolato dall'ambiente sociale e culturale di riferimento (Vygotskij, 1978) all'interno del quale si integrano valori sociali e responsabilità (Ryan & Deci, 2000).

Molti sono i lavori che hanno preso avvio o si sono ispirati alla SDT, non solo in Psicologia ma anche, come visto, in Didattica della Matematica. La presente ricerca si colloca su questa scia e persegue l'intento di proporre una versione italiana dell'AMTMS ad un vasto campione di studenti al fine di indagare in che misura i percorsi didattici attivati all'interno del *Liceo Matematico* possano favorire un "incremento" della motivazione, intendendo con tale espressione lo sviluppo di una motivazione diretta verso l'autodeterminazione dello studente. Il *Liceo Matematico*, che sarà meglio descritto nei capitoli successivi, rappresenta una recente sperimentazione didattica nella Scuola Secondaria di II grado in Italia, dal carattere fortemente interdisciplinare e laboratoriale: una proposta finalizzata ad ampliare la formazione culturale degli studenti ad ampio spettro, a svilupparne le capacità critiche e l'attitudine alla ricerca nella direzione tracciata da Morin nel secolo scorso (Morin, 1993). Sulla base delle premesse fatte, l'attività di ricerca condotta ha visto quindi i temi dell'*affect* e della *motivazione* per l'apprendimento della matematica come temi centrali del progetto di ricerca (aspetti intrinseci ed estrinseci della motivazione; legame tra le emozioni e la motivazione ad apprendere la matematica), tenendo presente la SDT (Deci e Ryan, 1985; Ryan & Deci, 2000) come principale quadro teorico di riferimento.

CAPITOLO II

Costrutti teorici di supporto “oltre” i fattori affettivi e motivazionali

2.1 Introduzione

La ricerca condotta getta le fondamenta in alcuni importanti quadri teorici sottesi alla teoria della motivazione intrinseca di Deci e Ryan (Ryan & Deci, 1986; Deci & Ryan, 2000) presentata nel primo capitolo. Essi vengono brevemente descritti in questo capitolo e costituiscono l’incipit per la descrizione della metodologia di ricerca e degli esiti di quest’ultima. Nel secondo paragrafo viene presentato il concetto di *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), nato da una proposta di Shulman nel 1986 secondo il quale la conoscenza del contenuto di una materia di insegnamento e la conoscenza degli aspetti pedagogici legati al contenuto insegnato sono indissolubilmente legati; il PCK è ciò che interviene nell’intento di comprendere come determinati argomenti di studio vengono organizzati, adattati e rappresentati, affinché risultino comprensibili agli altri. Un lavoro sperimentale condotto qualche anno addietro (Egodawatte et al., 2011) racconta, ad esempio, come è stato possibile contribuire allo sviluppo del PCK di una comunità professionale di docenti mediante tecniche di *collaborative planning* e *collaborative teaching*: esse hanno notevolmente incrementato le conoscenze pedagogiche dei docenti coinvolti, contribuito allo sviluppo professionale degli stessi e, al contempo, hanno permesso il raggiungimento degli obiettivi curriculari fissati, migliorando complessivamente la qualità del processo di insegnamento/apprendimento. Altri riferimenti alla vasta letteratura esistente sul tema del *Collaborative Teaching* sono richiamati nel terzo paragrafo. La ricerca condotta richiama tali contributi sul tema per puntare l’attenzione sulle opportunità di sviluppo professionale (e del PCK) degli insegnanti vissute in una dimensione sociale. L’attenzione viene così rivolta alla dimensione sociale dell’apprendimento: su di essa si basano le teorie che negli anni Novanta raccolgono l’eredità dell’approccio costruttivista e del pensiero di Vygotskij (Baccaglini-Frank et al., 2018). Esse hanno contribuito al superamento del modello di insegnamento «trasmissivo» delle teorie comportamentiste in favore di un modello «transitivo» (Egodawatte et al.,

2011) nel quale un ruolo fondamentale è svolto dalla relazione instaurata tra docente e alunno/a. Tra queste teorie, è qui citata la «Teoria della Mediazione Semiotica», sviluppata in Italia dalle ricercatrici Bartolini Bussi e Mariotti (2009). Secondo tale teoria, discussa nel paragrafo quarto, il docente si fa *mediatore* di un contenuto (il sapere matematico) e il discente, coinvolto in un'attività che richieda l'uso di un *artefatto* o parti di esso, costruisce la conoscenza nella comunità di apprendimento in cui si trova. I quadri teorici presentati rappresentano delle lenti attraverso cui leggere gli esiti della ricerca condotta e costituiscono la base teorica del percorso di formazione dei docenti coinvolti nel progetto sperimentale del "Liceo Matematico", descritto dettagliatamente nel quarto capitolo. Il progetto si colloca in un particolare *luogo* che non è tanto fisico, quanto piuttosto mentale: è il *laboratorio di matematica,* concetto presentato nel penultimo paragrafo ove se ne rintraccia la nascita e il successivo sviluppo, a partire da un'idea germinale di Giovanni Vailati (1863-1909). Si tratta di una metodologia basata sul *problem solving*, sul dialogo e sulle verifiche sperimentali, per mezzo dei quali collegare gli aspetti pratici e teorici della matematica e costruire una conoscenza matematica mediata da strumenti e artefatti. Nei materiali UMI-CIIM del 2003, si fa riferimento all'ambiente del laboratorio di matematica in analogia alla «bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti» (UMI-CIIM, 2003, p.26). Nell'ultimo secolo le ricerche sull'insegnamento e apprendimento della matematica hanno rivolto un'attenzione crescente verso una *didattica interdisciplinare della matematica* e, più in generale, verso un *approccio di apprendimento integrativo* che punta verso esperienze di apprendimento che siano più ricche e più autentiche per gli studenti. Nell'ultimo paragrafo si è cercato di chiarire proprio i concetti di interdisciplinarità e di disciplina, a partire da una recente revisione della letteratura (Williams & Roth, 2019) e da studi centrati sul tema dell'interdisciplinarità in ambito accademico (es. Suazo-Flores et al., 2019), nella formazione degli insegnanti (An, 2017) o nella pratica didattica della matematica insieme ad altre discipline. Dalla letteratura esistente emergono alcuni risultati positivi legati al contestualizzare l'insegnamento della matematica in attività didattiche che esplorano la matematica in relazione ad altri rami della conoscenza (in particolare, insieme alle altre "scienze dure"): un apprendimento più stimolante e più efficace, la capacità di guardare e affrontare i problemi del mondo reale con conoscenze integrate e non frammentate (cioè, legate a questa o quell'altra disciplina), una conoscenza più profonda e autentica della natura della matematica e del suo ruolo in altre discipline, la capacità di mettere in interconnessione più conoscenze e più abilità e, dunque, di essere più preparati alle sfide del mondo contemporaneo.

Più specificamente, i quadri teorici del PCK e della TMS sono stati utili nella progettazione e realizzazione delle attività didattiche che hanno interessato i destinatari della ricerca condotta. I quadri del collaborative teaching, del laboratorio di matematica e dell'interdisciplinarità costituiscono invece le lenti grazie alle quali è stato possibile analizzare la varietà di dati registrati e rispondere alle domande di ricerca.

2.2 Il *pedagogical content knowledge*

Il concetto di Pedagogical Content Knowledge (PCK) nella ricerca nasce da una proposta di Lee Shulman (1986), secondo cui la conoscenza di base di un insegnante dovrebbe includere tre categorie di conoscenza di contenuti: la conoscenza del contenuto della disciplina di insegnamento, la conoscenza del contenuto pedagogico e la conoscenza curricolare. Con la prima definizione egli si riferisce ai differenti modi di organizzare la materia d'insegnamento nella propria mente, a prescindere dalle considerazioni sull'insegnamento della materia stessa: il docente deve comprendere non solo ciò che è, ma anche perché è così, perché un dato argomento è centrale in una disciplina mentre un altro non lo è, scegliendo accuratamente tra le varie forme di organizzazione del contenuto quella più appropriata ad una data circostanza, attingendo a ragioni pedagogiche. Il secondo tipo di conoscenza del contenuto si riferisce agli aspetti pedagogici che vanno al di là della conoscenza della materia vera e propria. Esso supera la tradizionale distinzione tra la pedagogia ed il contenuto (di una materia *di insegnamento*) per introdurre il concetto di conoscenza pedagogica del contenuto, ovvero conoscenza della disciplina *per l'insegnamento*. Il PCK rappresenta proprio un miscuglio dei primi due aspetti della conoscenza, quella pedagogica e quella del contenuto, nell'intento di comprendere come particolari argomenti di studio vengono adattati, organizzati e rappresentati, affinché risultino comprensibili ad altri (Shulman, 1986). Questo include le molteplici forme di rappresentazione di un concetto, gli esempi, le analogie e le dimostrazioni più efficaci nell'insegnare gli argomenti più comuni. L'insegnante dovrebbe, pertanto, poter attingere ad un'ampia "riserva" di forme di rappresentazione, derivanti sia da ricerche personali sia dalla pratica didattica. In altri termini, il PCK entra in gioco quando un insegnante, nel trasformare un contenuto della propria disciplina d'insegnamento, trova differenti modi di rappresentare quel contenuto e di renderlo accessibile ad uno studente (Mishra & Koehler, 2006). All'interno del PCK, Shulman identifica una componente essenziale che consiste nella conoscenza di ciò che rende facile o difficile l'apprendimento di un argomento: i concetti (le convinzioni) e i preconcetti di cui gli studenti sono portatori nell'apprendere gli argomenti insegnati più spesso. Se tali preconcetti sono anche dei *misconcetti*[22], allora l'insegnante ha bisogno di usare strategie didattiche più efficaci nel riorganizzare la comprensione degli studenti. In ultimo, lo strumento che il docente usa per presentare un certo tema, semplificarlo e valutare i progressi ed i successi dei suoi studenti è il *curriculum*, ovvero l'insieme di tutti quei programmi di insegnamento relativi ad una disciplina per vari gradi di istruzione, i materiali didattici da usare per attuare quei programmi e le indicazioni su come usarli, a seconda delle circostanze che si presentano. In aggiunta, vi sono due aspetti ulteriori della conoscenza curricolare: uno *orizzontale* e uno *verticale*. Conoscere il *curriculum orizzontale* implica che il docente abbia una certa familiarità con i programmi e i materiali di altre discipline di studio per i suoi studenti, in uno specifico grado di istruzione. Conoscere il *curriculum verticale* implica invece che il docente abbia una certa familiarità con ciò che gli studenti devono avere imparato o dovranno ancora studiare per la stessa area disciplinare.   Un anno dopo la pubblicazione del lavoro di Shulman, lo stesso autore riesamina le suddette categorie in un altro studio (Shulman, 1987) per aggiungerne altre quattro: la conoscenza degli studenti e delle loro caratteristiche, la conoscenza dei contesti educativi, la conoscenza dei fini didattici, dei propositi, dei valori e i loro sfondi storici e filosofici. Altri autori si sono occupati di indagare il PCK, misurarla, confrontarla tra docenti pre-servizio e docenti in servizio, o

[22] Si tratta dei concetti appresi in modo errato,

semplicemente di concettualizzarla. Da una prima revisione sistematica di come il PCK dei docenti è concettualizzata e indagata sperimentalmente in letteratura (Depaepe F. et al., 2013) sono emerse due principali prospettive in cui collocare il PCK. Una prima prospettiva, detta "cognitiva", vede il PCK come una categoria delle conoscenze di base di un insegnante, distinta dalla *conoscenza del contenuto* e dalla conoscenza della pedagogia in generale (le teorie di apprendimento, i metodi di valutazione, i modi in cui gli studenti apprendono); in quanto tale, essa non dipenderebbe dal contesto classe ma dalla formazione dei docenti. La CK, in base alla prospettiva cognitiva, è la base della conoscenza pratica, utile al docente per la traduzione pedagogica di uno specifico argomento. Nel considerare il PCK indipendente dal contesto classe, sarebbe possibile misurarla (molto spesso attraverso un test). In questa prima revisione sistematica, la prospettiva cognitiva ha contribuito alla ricerca in didattica dimostrando empiricamente da un lato l'esistenza di un legame positivo tra il PCK del docente e i risultati di apprendimento dello studente, dall'altro un miglioramento del PCK mediante la formazione dei docenti. Tale prospettiva presenta comunque dei punti deboli, quali il considerare il PCK indipendente dal contesto storico e culturale in cui è applicato e dagli aspetti affettivi (ad esempio, la cura per la propria materia di insegnamento e per i propri studenti). La seconda prospettiva emersa, detta "inquadrata", abbraccia una visione più dinamica del PCK quale «conoscenza in azione», che ha senso solo all'interno della classe e che punta sul legame interattivo con altre conoscenze utili ai fini dell'insegnamento. Gli studi empirici che assumono questa prospettiva si basano su osservazioni in aula (talvolta supportate da diari di bordo, interviste o piani di lezione) e mirano in genere a svelare la natura del PCK in qualche particolare contesto, lo sviluppo del PCK per mezzo della pratica didattica o della partecipazione ad attività formative in comunità professionali (discussioni di gruppo, workshop, mentoring). Ciononostante, bisogna tenere presente che le semplici osservazioni di azioni didattiche non possono svelare appieno il PCK di un docente, in quanto eludono le ragioni che stanno dietro le scelte compiute dall'insegnante nel mezzo di un'azione didattica in classe. La collaborazione messa in atto in comunità professionali costituite da docenti impegnati in forme di didattica collaborativa può incrementare il PCK dei docenti, ma non solo. È questo il focus del paragrafo successivo, dove molti sono i richiami alla vasta letteratura presente sul tema della didattica collaborativa.

2.3 Il *collaborative teaching*

Il termine *collaborazione* è spesso usato in Psicologia Sociale, in politica e in molteplici altri settori, con una propria definizione in ciascun ambito. Anche parlando di didattica si sente spesso parlare di collaborazione tra alunni come anche tra docenti, riferendosi ad un modo attraverso il quale almeno due persone lavorano insieme per poter raggiungere un obiettivo comune. Quando i soggetti coinvolti sono i docenti di una stessa scuola o di scuole differenti, il contesto di lavoro diventa una «comunità di apprendimento professionale» (DuFour, 2004) o una «comunità di apprendimento cooperativo»[23] oppure ancora una «comunità di pratica» (Wenger, 1998). All'interno della comunità di pratica, ad esempio, i soggetti coinvolti hanno interessi comuni e collaborano per il comune obiettivo di supportare l'apprendimento di ciascun membro del gruppo e del gruppo stesso (Wenger, 1998). Ognuno dei contesti teorici indicati si costituisce anzitutto quale comunità di insegnanti: una comunità nella quale il singolo docente agisce non più "in isolamento" ma in un gruppo di lavoro, costituito da altri educatori. L'attività di collaborazione tra docenti, in qualunque forma di realizzi, contribuisce in modo significativo ad affermare il senso di comunità che sta alla base di una cultura della collaborazione (Grossman et al., 2001). Ciò accade quando nel gruppo di lavoro prevale una volontà di condividere il proprio pensiero, la propria esperienza e professionalità con gli altri, in modo tale che il contributo di ogni persona risulti integrato con quello degli altri. Ci sono molteplici fattori che intervengono in modo rilevante affinché la collaborazione risulti efficace. Uno di essi consiste nel sentimento di fiducia tra i membri del gruppo e nel senso di comunità (Dunne et al., 2000). Avere fiducia anzitutto negli altri membri del gruppo è un prerequisito essenziale per lavorare con un approccio collaborativo. Tale fiducia potrà gradualmente sfociare nella confidenza, nella stima e nel rispetto reciproci e aprirà la strada ad un dialogo collaborativo

---

[23] Si veda Cooper, C., Boyd, J. (1997). Schools as collaborative learning communities. Retrieved March 12, 2011 from http://www.vision.net.au/~globallearning/pages/lfs/clc_artcle.html

utile sia per raggiungere gli obiettivi del gruppo, sia per raggiungere gli obiettivi di apprendimento. Alcuni studi (Muijs et al., 2006) hanno dimostrato, a tal proposito, che la didattica collaborativa è più proficua se la fiducia all'interno del gruppo di lavoro è supportata da rapporti instaurati in precedenza. Raccogliendo i risultati di più contributi al tema del collaborative teaching, emerge che altri importanti fattori consistono nel condividere lo stesso contesto d'insegnamento (Jao & McDougall, 2016) ed una esplicita struttura di gestione (Muijs, 2006; Muijs et al., 2010), nel mettere a disposizione risorse e pratiche didattiche (Harris et al., 2006; Muijs et al., 2010) come anche nel perseguire obiettivi condivisi da tutti i componenti del gruppo (Lamanauskas, 2014; Sydow, 2000). Un esempio consiste nel perseguire i medesimi obiettivi educativi verso un ben determinato contesto di classe, come è accaduto per i docenti coinvolti nel presente progetto di ricerca. Tutti i fattori citati contribuiscono, pertanto, a far sì che la didattica collaborativa sia un approccio di fatto efficace per raggiungere dei precisi obiettivi educativi. La didattica collaborativa costituisce inoltre una opportunità di sviluppo professionale quando, ad esempio, essa si realizza nelle forme del co-planning (o cooperative planning, qui inteso come una forma di collaborazione attuata nella pianificazione di una o più lezioni per un dato corso) e del co-teaching (o cooperative teaching, qui inteso come una forma di insegnamento in cui due docenti insegnano insieme in un qualche corso formativo) (Egodawatte et al., 2011). Lamanauskas (2014), ad esempio, ritiene importante la collaborazione tra docenti di matematica e scienze sia in quanto occasione di sviluppo professionale, sia per superare l'idea diffusa che la matematica sia solamente un importante strumento scientifico e tecnologico.

> *La collaborazione degli insegnanti di scienze e matematica nel processo educativo rafforzerebbe non solo la competenza professionale degli insegnanti, ma svilupperebbe le capacità di collaborazione, che sono molto importanti nella ricerca di un'educazione scientifica e tecnologica molto più qualitativa degli studenti.*
>
> *(Lamanauskas, 2014, p.6, trad.)*

A questo punto è naturale chiedersi quali ricadute possa avere la didattica collaborativa sui docenti che la mettono in pratica. In accordo con precedenti ricerche sul tema, essa fornisce delle occasioni per riflettere sulla propria pratica d'insegnamento (es. Thomas &

Pedersen, 2003), incoraggia un atteggiamento motivato e responsabile (Lamanuskas, 2014; Calderhead & Gates, 1993), permette di condividere opinioni e critiche sulla pratica altrui e supportare il cambiamento (Clark et al., 1996). In accordo con Schoenfeld (Schoenfeld, 2002), fornire ai docenti spazi e opportunità per accrescere le proprie conoscenze e migliorare le proprie competenze potrà in seguito consentire di avere un miglioramento del processo di insegnamento/apprendimento ed un migliore rendimento degli studenti in matematica. Secondo alcuni studi (Lamanauskas, 2014; Gutierrez, 1996), nella Scuola Secondaria la didattica collaborativa viene attuata principalmente nei dipartimenti disciplinari: i docenti di uno stesso dipartimento condividono norme inerenti all'insegnamento/apprendimento della disciplina di dipartimento, i criteri di valutazione degli studenti e le esperienze vissute in classe. Lieberman, invece, ritiene che una cultura collaborativa *tout court* sia indispensabile per lo sviluppo della scuola, riferendosi all'ambiente scolastico più in generale, non solo a livello dei dipartimenti disciplinari (Lieberman, 1990).

La ricerca condotta si colloca in linea con le ricerche precedenti sul collaborative teaching nella Scuola Secondaria. Tra gli scopi vi è, difatti, come meglio descritto nei capitoli successivi, il voler indagare le forme di didattica collaborativa messa in atto in un ben preciso contesto didattico che è il "Liceo Matematico", descritto in modo approfondito nel quarto capitolo. Nello specifico, vengono anche analizzati gli esiti inerenti alle pratiche didattiche adottate dagli insegnanti coinvolti in un progetto sperimentale di Liceo Matematico attuato a Palermo, nel suo primo anno di vita, nel corso del quale docenti di diversi dipartimenti disciplinari hanno lavorato insieme al fine di raggiungere obiettivi condivisi. Tale contesto didattico è stato preso in considerazione in quanto rappresentativo del contesto nazionale scelto. Nel paragrafo successivo viene introdotto il quadro teorico della mediazione semiotica, alla luce del quale va considerata la formazione dei docenti coinvolti nella ricerca; pur se non è qui usato per l'analisi dei dati raccolti, il riferimento ad esso è indispensabile in quanto l'uso degli artefatti ha trovato concretezza nelle pratiche didattiche dei Licei Matematici coinvolti nella ricerca. Le considerazioni che seguono traggono spunto da quanto riportato nelle Indicazioni Nazionali e anticipano il contenuto dei paragrafi conclusivi del presente capitolo:

Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il «pensare» e il «fare» e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani.

(MIUR Indicazioni Nazionali per il primo ciclo d'istruzione, 2012, p.60).

2.4 La mediazione semiotica

Alcuni autori evidenziano come il *laboratorio di matematica*[24] svolga un ruolo prioritario come luogo (non solo fisico) nel quale avviene la mediazione del sapere matematico (Baccaglini-Frank et al., 2018). La teoria della mediazione semiotica (TMS) è stata elaborata da Bartolini Bussi e Mariotti (2009) a partire dall'idea seminale di mediazione[25] semiotica introdotta da Vygotskij (1978). Per poter descrivere al meglio il quadro teorico, è necessario fare qualche premessa sulla visione dell'apprendimento in Vygotskij e far luce sui concetti di *artefatto*, di *potenziale semiotico* di un artefatto e di *ciclo didattico*.

Nella visione di Vygotskij, il pensiero è creato a partire dalle azioni svolte con il supporto di qualche strumento. Tali azioni si annoverano tra quelle che egli definisce *funzioni psichiche superiori* (FPS), tipiche degli esseri umani, così denominate per distinguerle dalle *funzioni psichiche inferiori* (FPI) che invece sono comuni a tutti gli esseri viventi (Vygotskij, 1978). Queste ultime sono da lui considerate come geneticamente ereditate, involontarie e con una struttura che non è socialmente o culturalmente mediata. Lo sviluppo delle funzioni mentali consiste in una transizione dalle funzioni inferiori verso funzioni superiori, più complesse, che siano volontarie, in relazione tra loro e culturalmente determinate (Ligorio &Cacciamani, 2013). Tra le funzioni

---

[24] L'idea di *laboratorio di matematica* è stata proposta dall'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) nel 1908 ed è stata di recente declinata secondo due interpretazioni non contrapposte: come un momento didattico «in cui la matematica è proposta sfida storico-culturale» o «come ambiente di modellizzazione […] in cui la matematica è vista come utile per le applicazioni» (Baccaglini Frank et al., 2018, p.63). Diversi approfondimenti sul tema si possono trovare alla pagina https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/ e nei materiali UMI-CIIM del 2003 (UMI-CIIM,2003).

[25] Il concetto di *mediazione* si riferisce al postulato secondo cui all'uomo non è dato accedere per via diretta alla realtà e, pertanto, ha bisogno di fare ricorso a degli strumenti (Ligorio & Cacciamani, 2013, p.229).

psichiche superiori rientrano, ad esempio, anche le capacità cognitive di un individuo. «In via generale – sostiene Vygotskij – potremmo dire che le relazioni tra le funzioni psichiche superiori sono state un tempo relazioni tra persone» (Vygotskij, 1978, p.206). Caratteristica fondamentale di queste relazioni, che insorgono ad un grado elevato di sviluppo, è il segno, secondo l'autore. È «in forma sociale, esterna» - prosegue Vygotskij – che vengono introdotti i segni all'interno del sistema generale di comportamento ed è sull'uso di questi segni, socialmente e culturalmente determinati, che si esplica lo sviluppo culturale della persona. Tutto lo sviluppo culturale del bambino attraversa tre tappe fondamentali: in un primo momento, sviluppa delle abilità di per sé, in un secondo momento queste ultime sono pensate come abilità per gli altri ed infine come abilità per sé stessi. Vygotskij cerca di chiarire questa distinzione riportando come esempio lo sviluppo del gesto dell'indicare nel bambino (Vygotskij, 1978, p.208-209): dapprima usa il gesto per afferrare un oggetto (gesto di indicare di per sé), poi comincia ad usare il gesto di indicare per ottenere una reazione nell'adulto (gesto per gli altri) e finalmente, una volta raggiunta la padronanza del gesto, lo usa intenzionalmente come strumento per regolare le proprie azioni, ad esempio per indicare un punto preciso o facilitare la lettura di un testo (gesto per sé stessi). Emerge l'idea che ogni funzione psicologica compaia pertanto due volte, prima a livello sociale, ovvero fra persone, poi a livello individuale, come forma interiorizzata. Ad ogni modo, la dimensione sociale promuove, nella visione Vygotskijana dell'apprendimento, lo sviluppo del pensiero. É il contesto storico-culturale nel quale avviene l'apprendimento che deve stimolare lo sviluppo del bambino, inteso come passaggio da una *zona di sviluppo attuale* (ovvero, la zona delle capacità raggiunte e già consolidate) verso una *zona di sviluppo prossimale* (ZSP), vicina alla precedente ma che contiene il germe di quelle capacità grazie alle quali potrà svolgere attività più complesse (Ligorio & Cacciamani, 2013). Nel contesto un ruolo molto importante per passare da una zona attuale ad una prossimale è svolto dall' "altro", dall'adulto o da un pari più capace, con cui interagisce l'individuo. L'interazione con gli altri permette così di affinare le proprie capacità cognitive e di accedere a nuove ZSP. Altri autori hanno specificato questo costrutto nei termini seguenti:

> *La ZPS è in poche parole la distanza tra: il livello attuale di sviluppo del bambino, determinato dalla sua capacità di risolvere da solo un dato problema (quello che il bambino sa fare), e il livello di sviluppo potenziale, determinato dalla capacità di risolvere un problema con il supporto di un adulto.*
>
> *(Baccaglini-Frank et al., 2018, p.60)*

Relativamente alla visione dell'apprendimento in Vygotskij, è dunque di primaria importanza la componente sociale delle ZSP, quindi la relazione tra il soggetto che apprende e l'adulto, l'esperto che possa guidarlo e stimolarlo opportunamente fino a che sarà in grado di compiere in assoluta autonomia quelle azioni che prima imitava o svolgeva parzialmente con il supporto dell'adulto. La componente soggettiva delle ZSP, invece, è basata sull'imitazione: prima si imita l'adulto che compie un'azione in un dato contesto, poi gradualmente si diventa sempre più autonomi nel compiere quella stessa azione.

Guardando al contesto scolastico, in particolare, questa relazione con l'adulto si traduce nella relazione studente-docente. Lo studente prima osserva il docente che svolge un dato compito, poi lo imita svolgendo parti dell'attività in autonomia ed infine riesce a svolgere in totale autonomia quel compito, possibilmente contribuendo a migliorarlo in maniera creativa. Il docente stimola e supporta continuamente l'alunno in questo processo, facendosi non solo detentore di informazioni ma costituendo di fatto un *mediatore* tra lo studente ed il contesto socioculturale in cui i due si trovano. La mediazione del docente è essenziale per il raggiungimento degli scopi educativi e, in una visione più ampia, per la missione che Vygotskij affida alla scuola: offrire gli strumenti utili per un'evoluzione culturale e per rendere gli alunni «uomini del proprio tempo», capaci di usare gli strumenti che la cultura e la storia mettono loro a disposizione per determinare il futuro della specie umana (Ligorio & Cacciamani, 2013, p.69).

In accordo con le ipotesi di Vygotskij, le autrici Bartolini Bussi e Mariotti ritengono che il processo di apprendimento si fondi sull'interazione sociale: lo sviluppo cognitivo del singolo è possibile attraverso la collaborazione con un altro individuo più esperto (o in un gruppo), al fine di svolgere un compito o raggiungere un comune obiettivo (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009). Ciò non esclude, anzi è coerente con la nozione di Zona di Sviluppo Prossimale definita pocanzi, nella quale la conoscenza dell'individuo viene costruita come forma interiorizzata di esperienze socialmente condivise. Questo processo, che Vygotskij chiama *internalizzazione*, presenta due caratteristiche fondamentali, la prima delle quali è senza dubbio la sua natura sociale. La seconda caratteristica è una diretta conseguenza della prima: il processo di internalizzazione è guidato da un *processo semiotico*, ovvero si basa sull'uso dei *segni* (primo fra tutti, il linguaggio naturale, ma anche i gesti, i testi, i disegni o gli stessi sistemi di segni matematici), prodotti ed interpretati nel momento in cui avviene una comunicazione tra il docente e lo studente. L'interazione sociale che avviene attraverso la comunicazione, quindi attraverso la produzione e l'interpretazione di segni (in forma orale o scritta), permette lo sviluppo delle funzioni psichiche superiori già menzionate (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009). A partire dai significati di tali segni, prodotti dal processo di internalizzazione e denominati *strumenti psicologici* dallo stesso Vygotskij, si sviluppano le attività mentali dell'uomo. Nonostante il linguaggio sia l'esempio più comune di *segno*, è possibile rintracciarne molti altri, come egli stesso specifica in un successivo lavoro (Vygotskij, 1981): i sistemi di simboli algebrici, i sistemi di numerazione, le tecniche mnemoniche, i disegni, le mappe, i diagrammi. La ZSP può così configurarsi come una sorta di spazio simbolico che emerge proprio dall'interazione tra l'individuo e il contesto.

Nella teoria della mediazione semiotica si possono rintracciare gli elementi precedentemente descritti, elementi cardine del pensiero di Vygotskij: la nozione di zona di sviluppo prossimale e la nozione di internalizzazione e l'interazione dell'individuo con il contesto socioculturale (in cui avviene l'apprendimento) come base per la costruzione della conoscenza. Parlando di conoscenza matematica, ad esempio, lo sviluppo della capacità di comprendere la definizione di cerchio richiede l'attribuzione di significati, socialmente e culturalmente condivisi in un dato contesto di apprendimento, ad alcuni segni (es. al linguaggio utile per introdurre i concetti di linea, punto, distanza); a livello cognitivo, e non solo pratico, possono essere usati anche degli *artefatti*, intesi come strumenti o mezzi in funzione dei quali o per mezzo dei quali risolvere un problema (nell'esempio di cui sopra, potrebbe essere usato un compasso come artefatto). Lo stesso termine *artefatto* richiama qualcosa che non è dato in natura ma è, per l'appunto, fatto con arte; esso modula l'azione dell'uomo nel mondo e determina i processi mentali sia quando è usato per compiere un'attività, sia quando l'azione di mediazione diventa simbolica (Ligorio & Cacciamani, 2013). Sono considerati *artefatti* tutti quegli oggetti, fisici o figurati, che l'umanità ha prodotto nel tempo: utensili, gesti, suoni, forme orali e scritte di linguaggio, strumenti musicali, strumenti scientifici, ecc. (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009). Alcuni di questi artefatti vengono usati nelle scuole da anni: si tratta dei libri di testo, ben noti ad ogni studente. Tra gli artefatti prodotti dall'uomo, il linguaggio, sia in forma orale sia in forma scritta, ricopre certamente un ruolo chiave, in quanto è su di esso che poggia le fondamenta qualsiasi forma di comunicazione (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Norman (Norman, 1993) parla a tal proposito di *artefatti cognitivi*[26] ad indicare quegli strumenti che si fanno mediatori per lo sviluppo del pensiero, ovvero i suoni, i gesti ed i simboli attraverso cui ci si riferisce ad oggetti o a concetti. Secondo Rabardel e altri (Rabardel, 1995; Béguin & Rabardel, 2000), il concetto di *artefatto* va ben distinto da quello di *strumento*:

> *Uno strumento non può essere confuso con un artefatto. Un artefatto diventa uno strumento solo attraverso l'attività del soggetto. In questa luce, se da un lato uno strumento è chiaramente un mediatore tra il soggetto e l'oggetto, dall'altro è anche costituito dal soggetto e dall'artefatto.*
>
> *(Béguin & Rabardel, 2000, p. 175, trad.)*

In altri termini, l'*artefatto* sarebbe l'oggetto di per sé stesso (può anche consistere in una parte di un artefatto o in un insieme di artefatti, a seconda dello scopo dell'attività cognitiva che si sta svolgendo con l'ausilio dell'artefatto), un oggetto che potrebbe essere di tipo materiale oppure simbolico prodotto dal soggetto che sta svolgendo un dato compito o prodotto eventualmente da altri. Esso va distinto dagli *schemi d'uso* associati all'artefatto, ovvero tutte quelle procedure che il soggetto usa per svolgere quel preciso compito (Béguin & Rabardel, 2000). Tali schemi emergono durante lo svolgimento dell'attività, sono legati all'esperienza dell'individuo e, di conseguenza, possono essere costruiti dal soggetto o derivare dall'appropriazione di schemi sociali preesistenti.

[26] Il termine originale è *cognitive artifacts* (Norman, 1993).

L'*artefatto* (oggetto) e i suoi *schemi d'uso* (soggettivi) costituiscono le due componenti di uno *strumento*. Ne deriva che uno strumento possiede un'impronta essenzialmente individuale ed è fortemente legato al contesto sociale entro cui si sviluppa. Il processo di elaborazione ed evoluzione di uno strumento è un processo lungo e complesso che Rabardel chiama *genesi strumentale*[27] (Rabardel, 1995); la dimensione sociale di tale processo si ritrova nell'interazione tra gli schemi d'uso (individuali) e gli schemi sociali che vengono condivisi all'interno di una comunità di pratica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

Sulla base di queste premesse, in riferimento principalmente al concetto di mediazione semiotica in Vygotskij ed integrandolo con le ricerche di ergonomia cognitiva[28] di Norman (1993) e Rabardel (1995), Bussi e Mariotti (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) hanno proposto un modello di insegnamento e apprendimento basato sull'utilizzo, da parte di uno studente, di un *artefatto culturale* per svolgere un determinato compito. Tale modello ipotizza che l'attività con l'artefatto possa permettere l'appropriazione di un concetto matematico o, più in generale, la costruzione di conoscenze matematiche. Come confermato in altre ricerche (Mariotti & Maffia, 2018), dall'utilizzo di un artefatto in combinazione con i suoi schemi d'uso possono essere evocate specifiche conoscenze matematiche e, prima ancora, specifici significati matematici. Più in generale, infatti, l'uso sociale di un artefatto per svolgere un determinato compito (che coinvolga studenti e insegnante) implica *a fortiori* la produzione di segni che sono in relazione sia con l'azione che si sta compiendo (dunque, con l'artefatto utilizzato, ad esempio, per risolvere un dato problema), sia con il contenuto matematico che si vuole mediare. La produzione dei segni, ad esempio mediante gesti, disegni o parole, può essere spontanea o

---

[27] Il termine originale è *genèse instrumentale* (Rabardel, 1995).

[28] Con il termine *ergonomia cognitiva* si fa riferimento a quella disciplina che ha come oggetto di studio i processi cognitivi coinvolti nell'interazione tra l'uomo e la tecnologia, ovvero tra l'uomo e gli strumenti per l'elaborazione di informazione. La conoscenza prodotta da questo studio è utilizzata per supportare la progettazione di strumenti appropriati da essere usati al lavoro, per l'educazione degli individui o per divertimento (definizione tratta da Di Nocera F. (2004). Che cos'è l'ergonomia cognitiva. Carocci, Roma.).

espressamente richiesta dal compito (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009). I segni emersi vengono socialmente elaborati ed intenzionalmente usati dal docente - che guida l'attività – per promuoverne l'evoluzione da segni legati al compito e all'artefatto o parti di esso (*segni situati* o *segni artefatto*) verso segni legati ad una specifica conoscenza matematica (o, semplicemente, *segni matematici*). Questi ultimi sono collegati ai significati matematici culturalmente condivisi, sia nell'istituzione a cui appartiene la classe, sia nella comunità matematica; essi potrebbero essere espressi, ad esempio, da una definizione, da una dimostrazione o da un enunciato da dimostrare. «Questi segni sono parte dell'eredità culturale e costituiscono l'obiettivo del processo di mediazione semiotica orchestrato dall'insegnante» (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009, p.290). Oltre ai segni descritti sinora, ne esiste un ulteriore tipo: si tratta dei *segni pivot*, come meglio specificato di seguito:

> *I segni pivot hanno la caratteristica della polisemia, cioè possono riferirsi nella classe sia all'attività con l'artefatto, richiamando azioni strumentali, che anche al linguaggio naturale e al dominio matematico. La loro polisemia fa sì che essi possano essere utilizzati come perno per favorire il passaggio dal contesto dell'artefatto al contesto matematico. [...] Il loro significato è collegato al contesto dell'artefatto, ma assume generalità attraverso il suo utilizzo nel linguaggio naturale. Talvolta essi sono termini ibridi, prodotti e utilizzati all'interno della classe, ed intendono esprimere un primo distacco dall'artefatto, pur mantenendo il legame con esso, per non perdere il significato. È utile osservare che la stessa parola (ad esempio 'funzione') come segno può corrispondere a diverse categorie, con allusione ad un artefatto (segno artefatto), con un certo grado di autonomia da esso (segno pivot) e con riferimento a una definizione matematica (segno matematico).*
>
> *(Bsrtolini Bussi & Mariotti, 2009, p.23)*

Nello svolgimento dell'attività con l'artefatto, si crea in tal modo un duplice legame semiotico tra l'artefatto usato, il compito che si vuole portare a termine e la conoscenza verso cui l'insegnante ha voluto indirizzare l'alunno. Le autrici del quadro della mediazione semiotica parlano di *polisemia dell'artefatto*. Questo legame si concretizza nella produzione di due sistemi paralleli di segni le cui relazioni non sono affatto immediate (Figura 2).

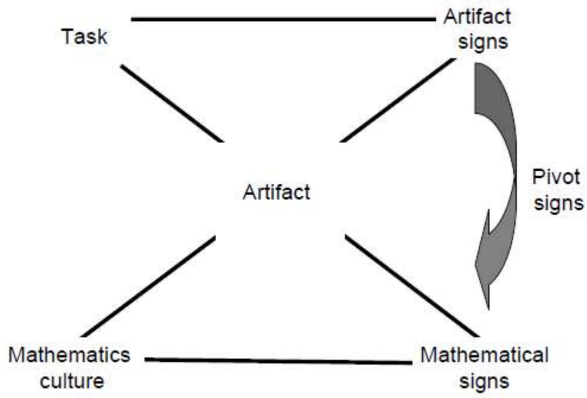

Figura 2 Polisemia dell'artefatto, tratta da (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p.757).

Un esempio chiave viene fornito da Mariotti e Maffia (Mariotti & Maffia, 2018), i quali prendono in considerazione due artefatti: il primo è un compasso, il secondo è costituito dalla combinazione di un bicchiere ed una matita. Entrambi permettono di disegnare su un foglio una circonferenza eppure, nei rispettivi schemi d'uso, si riscontrano procedure differenti e vengono evocate proprietà geometriche ben diverse. Nel caso della matita e del bicchiere, lo schema di utilizzo si concentra sul movimento, o meglio, sul gesto compiuto dalla mano mentre gira attorno al bicchiere tenendo la matita. Questo evoca essenzialmente la proprietà geometrica di curvatura costante, ma non propriamente le proprietà della circonferenza. Di contro, nel caso del compasso, lo schema di utilizzo è basato sul fatto che l'ago all'estremità di un'asta sia fermo e l'apertura del compasso debba rimanere costante mentre viene tracciato il disegno. Nella comunità matematica, ciò può evocare le nozioni di centro, raggio di un cerchio e di distanza costante tra il centro ed i punti della circonferenza. Gli autori interpretano ciò affermando che i due artefatti abbiano p*otenziali semiotici* differenti, intendendo con tale espressione la duplice relazione che lega l'artefatto - usato per una certa attività strumentale - sia ai significati personali che emergono quando lo si usa per svolgere un compito, sia ai significati matematici evocati (Bussi & Mariotti, 2008). Riguardo all'uso di artefatti nell'azione di insegnamento-apprendimento a scuola, si possono trovare diversi approfondimenti in un importante lavoro sull'uso delle macchine matematiche a scuola (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006) quale modo innovativo di affrontare argomenti di geometria in classe. Qui si ripercorrono più di 2000 anni di storia per rintracciare i modi in cui gli artefatti costruiti abbiano influito sulla produzione del pensiero astratto nelle varie epoche; in particolare -si legge- «esso può mediare significati relativi ai saperi che vi sono incorporati» (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006, p.77). Le potenzialità dello strumento, come osservato da Bussi e Maschietto (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006), non derivano tanto dalle proprietà dell'oggetto in sé quanto dall'interazione sociale che è guidata dall'insegnante:

> *In altre parole, le potenzialità dello strumento non coincidono con le proprietà intrinseche del materiale, ma dipendono dall'interazione realizzata in classe, sotto la guida dell'insegnante, per mezzo di particolari consegne e all'interno di pratiche sociali. Il ruolo dell'insegnante diventa essenziale nel definire la direzione del processo di esplorazione.*
>
> *(Bartolini Bussi & Maschietto, 2006, p.77)*

All'interno della TMS un ruolo cruciale è svolto dall'insegnante che «utilizza l'artefatto come uno *strumento di mediazione semiotica»* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 752). Lui/lei assume il ruolo di esperto che è consapevole del potenziale semiotico di un dato artefatto e, in quanto tale, deve guidare l'evolversi dei segni personali emersi negli studenti, centrati sull'uso dell'artefatto (*segni artefatto*) e correlati al compito che si vuole svolgere (ad esempio, la risoluzione di un problema che implichi l'uso di un artefatto) verso i segni matematici desiderati. Questa evoluzione, denominata *processo di mediazione semiotica*, trova il suo pieno compimento nella costruzione collettiva di segni condivisi legati all'uso dell'artefatto e alla conoscenza matematica da esso mediata. Per tale ragione, le autrici definiscono il docente *mediatore culturale*, in quanto egli può mediare un contenuto matematico attraverso un intervento didattico. È possibile progettare, in accordo con Mariotti e Maffia (Mariotti & Maffia, 2018), una sequenza di *cicli didattici* per promuovere il processo di mediazione semiotica. Ogni ciclo propone più attività:

- attività con l'artefatto: consistono nel chiedere agli studenti di svolgere un compito, ad esempio lavorando in piccoli gruppi, promuovendo necessariamente la produzione e la condivisione di segni (parole, gesti, disegni) in relazione all'artefatto usato (*segni artefatto*);

- attività di produzione individuale di segni: si tratta di attività semiotiche proposte esattamente per stimolare la produzione di segni personali che dovranno evolversi in segni matematici, condivisi con la collettività e all'interno della cultura di settore (ad esempio, si potrebbe richiedere agli studenti di annotare le conclusioni di una discussione collettiva o di stilare una relazione scritta sull'attività in cui è stato usato in precedenza l'artefatto, specificando eventuali dubbi, riflessioni o domande);
- attività di produzione collettiva di segni: nello specifico, si fa riferimento alla discussione collettiva quale momento essenziale del processo di mediazione semiotica e, in conseguenza, del processo di insegnamento e apprendimento che si basa sulla mediazione semiotica. In particolare, tenendo in considerazione la *Discussione Matematica* (Bartolini Bussi et al., 1995), la discussione collettiva è spesso lanciata dall'insegnante ed è un momento che coinvolge l'intera classe, ad esempio, nell'elaborazione delle soluzioni ad un dato problema oppure nell'analisi di testi prodotti dagli alunni. L'obiettivo principale dell'azione dell'insegnante in una discussione matematica è quello di promuovere l'evoluzione dei segni artefatto (emersi con l'attività precedente) in segni matematici, valorizzando gli interventi di ciascun membro della classe e facendo leva sui potenziali semiotici provenienti dall'utilizzo di un dato artefatto (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009). Questa evoluzione sembra non procedere in modo spontaneo, ma necessita dell'intervento del docente che guida la discussione matematica e usa il particolare artefatto per portare a compimento il suo scopo educativo.

Le fasi del ciclo didattico sono schematizzate nella seguente figura:

Figura 3 Il ciclo didattico, tratta da (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009, p.20).

L'attività con uso di artefatto, per il raggiungimento di specifiche conoscenze matematiche, ben si coniuga con l'idea di *scuola-laboratorio* proposta da Giovanni Vailati, che fu un eminente matematico, filosofo e educatore italiano. Egli non intendeva, con tale espressione, riferirsi alla scuola quale laboratorio per svolgere delle esperienze scientifiche, quanto piuttosto:

> *come luogo dove all'allievo è dato il mezzo di addestrarsi, sotto la guida e il consiglio dell'insegnante, a sperimentare e a risolvere questioni, a [...] mettersi alla prova di fronte a ostacoli e difficoltà atte a provocare la sua sagacia e coltivare la sua iniziativa.*
>
> *(Vailati 1906, p. 292)*

In accordo con Giacardi (2011), a Vailati si deve il merito di aver proposto per primo in Italia l'idea di laboratorio. In riferimento alla matematica, il laboratorio da lui inteso era centrato sull'idea che la matematica fosse da "praticare", ma anche e soprattutto da sistematizzare in una teoria. Con l'intenzione di voler approfondire il contesto del laboratorio di matematica quale luogo privilegiato ove mediare il sapere matematico, nel paragrafo seguente viene meglio chiarito cosa si intende qui per laboratorio di matematica. Viene esplicitato in conseguenza il pensiero di Vailati e come è emersa, nel panorama internazionale, l'idea di un laboratorio di matematica agli inizi del Novecento, prendendo spunto, in via prioritaria, dal contributo di Giacardi (2011).

2.5 Il ruolo del laboratorio di matematica

Il termine *laboratorio* rimanda, nell'immaginario collettivo, alle azioni da compiere per creare qualcosa, costruire qualcosa usando un opportuno strumento di lavoro che può essere di stampo tecnologico oppure no. Anche nel sistema di istruzione e educazione italiano il termine *laboratorio* richiama all'opera laboriosa dell'uomo, per costruire una conoscenza o acquisire una competenza, come suggerito da Domingo Paola in una sua riflessione (Paola, 2007). Tuttavia, nella tradizione italiana, ampio spazio è stato dato da sempre alla lezione frontale, quale metodo privilegiato di insegnamento e apprendimento, basato sulla trattazione di un argomento verso un'unica direzione: *da* un docente (esperto) *al* discente (colui che apprende). La lezione, in tal senso, si svolge in tempi ben scanditi, influenzati senza dubbio dalla necessità di affrontare la vastità di argomenti suggeriti dalle indicazioni curricolari; essa richiede una partecipazione degli alunni solo su un piano intellettuale, costituendo di fatto un buon mezzo per raggiungere, nei tempi stabiliti e in modo efficace, gli obiettivi didattici prefissati dal docente. Probabilmente tutto questo ha contribuito a far sì che la *lectio* si affermasse quale metodo efficace per garantire, nel primo ciclo d'istruzione, un'alfabetizzazione di base alla maggior parte possibile della popolazione italiana. Si pensi soprattutto al secondo dopoguerra, quando la scuola ha avuto un ruolo chiave nel consentire l'alfabetizzazione di una fetta importante della popolazione italiana. Il secondo ciclo d'istruzione avrebbe poi avuto il compito di formare la futura classe dirigente del paese, ovvero (secondo le possibilità di allora) i giovani che avevano il desiderio di studiare ed i mezzi (soprattutto, economici) per farlo. Ciononostante, una volta che la scuola è diventata accessibile a tutti e *per* tutti, la sua missione si è trasformata: la scuola avrebbe dovuto formare le nuove generazioni (non solo, un'élite di studenti) ed aiutarle ad acquisire le competenze e conoscenze necessarie per partecipare consapevolmente alla vita pubblica ed affrontare le sfide sempre più difficili lanciate dal mondo del lavoro (Paola, 2007). Di conseguenza, se da un lato viene chiesto al docente di contribuire alla formazione dei futuri cittadini, aiutandoli a sviluppare competenze trasversali agli insegnamenti e ad alimentare le competenze sociali e civiche nello svolgimento delle attività ordinarie, dall'altro viene chiesto al discente di saper «leggere la realtà in modo razionale» (MIUR, 2018, p.13), di saper interagire con i compagni e con l'insegnante nel processo di costruzione del sapere, di applicare a contesti di realtà quanto appreso, di argomentare correttamente e confrontarsi con gli altri, nel rispetto delle reciproche opinioni. Un riferimento alle suddette competenze si ritrova nelle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo d'istruzione del 2012[29], dove viene enfatizzato il ruolo della matematica nell'acquisizione delle stesse:

> *In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri.*
>
> *(MIUR, 2012, p.60)*

Nelle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo del 2018 (MIUR, 2018, p.12) viene ribadito quanto appena riportato, sottolineando la rilevanza di tali competenze «per la formazione di una cittadinanza attiva e consapevole, in cui ogni persona è disponibile all'ascolto attento e critico dell'altro e a un confronto basato sul riferimento ad argomenti pertinenti e rilevanti». Un contesto di apprendimento che può stimolare il confronto con i pari e l'argomentazione, in modo quasi naturale, è costituito dal *laboratorio di matematica*, «inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive» (MIUR, 2012, p.60). Un ulteriore scopo educativo del laboratorio viene indicato nelle Indicazioni Nazionali del 2018 (MIUR, 2018) ove si legge che, alla luce delle Indicazioni Nazionali del 2012 (MIUR, 2012), il laboratorio può costituire per ogni alunno/a un momento di allenamento nel fare scelte consapevoli e con senso di responsabilità, aspetti chiave nell'educazione ad una cittadinanza attiva e responsabile.

---

[29] D.M. n.254/16.11.2012, Gazz. Uff. n. 30/05.02.2013. (Ciarrapico & Berni, 2017, p.132-136).

Uno studio di Giacardi (2011) confronta più modelli di laboratorio di matematica, guardando al panorama nazionale e internazionale, e analizza, su un piano storico e pedagogico, le caratteristiche della scuola laboratorio di Giovanni Vailati: è in essa che è possibile rintracciare gli albori del laboratorio di matematica in Italia. L'idea di offrire agli studenti uno spazio in cui sperimentare, in maniera attiva e spontanea, dialogare con gli altri soggetti coinvolti (i pari e i docenti), costruire significati e, dunque, una conoscenza emerge già verso la fine dell'Ottocento negli studi di pedagogisti, educatori e psicologi. Tra essi, si ricordino, ad esempio, John Dewey (1859 – 1952) in America e Maria Montessori (1870-1952) in Italia. Alla nascita di un laboratorio di matematica contribuirono anche dei matematici, tra i quali John Perry (1850-1920), Felix Klein (1849-1925) e Giovanni Vailati. Per chiarire il ruolo del laboratorio di matematica nella scuola di oggi, si è scelto di risalire agli albori di quest'idea e di esplicitare, seppur in maniera sintetica, il contributo offerto dai matematici e educatori sopra citati.

John Dewey, ben noto filosofo, psicologo e pedagogista americano, è considerato uno dei massimi esponenti dell'attivismo pedagogico, una dottrina pedagogica nata sul finire dell'Ottocento, che metteva al centro del processo educativo l'attività del fanciullo. Le riflessioni pedagogiche di Dewey sulla scuola si possono ritrovare nel saggio *The School and Society*, datato 1899, scritto in un particolare momento storico. All'epoca di trovava a Chicago e qui aveva potuto notare come la rivoluzione industriale avesse cambiato profondamente l'economia e la società, determinando forti disuguaglianze sociali e mettendo così in pericolo la partecipazione democratica dei cittadini. In quel periodo gli accademici iniziavano a chiedersi se la scuola fosse ancora in grado di rispondere ai cambiamenti sociali in atto e di formare adeguatamente quegli studenti che avrebbero preso parte ai cambiamenti produttivi. Da ciò sono scaturite le sue riflessioni sulla necessità di riorganizzare la scuola in quanto, insieme alla famiglia, costituisce l'*incipit* dello sviluppo di una società democratica (Pezzano, 2013). Per il filosofo americano, la scuola è l'embrione di una società democratica: deve consentire a ciascuno di realizzarsi, mettendo in relazione la propria vita con la vita sociale dettata dalle regole sociali e culturali. La scuola si configura, nella visione di Dewey, quale luogo in cui sperimentare la vita democratica e favorire il progresso sociale. Nel saggio su citato egli parla, nello specifico, di una *scuola-laboratorio* che deve considerare le attività intellettuali ma anche e soprattutto le attività pratiche; inoltre, essa ha il compito di formare il carattere di ogni individuo, accrescere i suoi interessi, nella comprensione di sé e degli altri, di valorizzare le esperienze e su di esse costruire una conoscenza. Per fare ciò, la scuola offre l'opportunità di svolgere lavori di officina o tessili o di cucina, per lasciare che gli studenti sperimentino, si confrontino con gli altri, sviluppino le proprie potenzialità intellettive e le proprie attitudini (Giacardi, 2011). Il lavoro che essi devono compiere nella scuola-laboratorio pensata da Dewey si viene a costituire quale azione attiva nell'ambiente di apprendimento progettato *ad hoc* dall'insegnante, mossa dal desiderio di scoprire e di sperimentare. Dalle esperienze pratiche si deduce poi l'insegnamento teorico, e non il contrario (come già accadeva nelle scuole tradizionali). Per Dewey, difatti, l'*esperienza* è il fondamento necessario e imprescindibile della conoscenza. Nell'esperienza, guidata dall'insegnante e in continua interazione con l'ambiente circostante gli alunni possono imparare ciò che faranno nella società e nel mondo lavorativo: imparano a confrontarsi con gli altri, sanno di dover svolgere un dato compito e sono sostenuti dal gruppo a cui appartengono, in altre parole imparano le regole del vivere democratico. Il suo progetto vede davvero la luce nella scuola del suo tempo: è il 1896 quando Dewey fonda a Chicago la *scuola sperimentale* basata su questi ideali educativi. Si tratta di una scuola elementare istituita presso il Dipartimento Pedagogico di Chicago e attuata in forma di laboratori nei quali gli alunni si confrontano con i problemi presentati dal maestro e mettono in atto strategie risolutive che sono ben lontane dall'imitare passo passo il comportamento del maestro. *The School and Society* racconta gli esperimenti realizzati nella sua scuola e mostra i principi fondanti della sua teoria pedagogica. Qualche anno dopo, a seguito delle interazioni con alcuni matematici dell'epoca (Moore, Halsed), in un articolo del 1903 Dewey afferma, usando le parole di Giacardi (2011), «che nella pratica dell'insegnamento si deve tener conto anche dell'aspetto psicologico e che dunque occorre partire dalla realtà concreta, dall'esperienza ordinaria, e presentare le applicazioni pratiche della matematica in modo da arrivare gradualmente al rigore logico» (Giacardi, 2011, p.2).

Le idee di Dewey sembrano in linea con le idee che, nei primi anni del Novecento, porta avanti John Perry, secondo il quale l'insegnamento della matematica deve essere di tipo pratico e laboratoriale:

> *The most essential idea in the method of study called Practical Mathematics is that the student should become familiar with things before he is asked to reason about them.*
> *(Perry 1913, p. 21)*

Egli propone un nuovo metodo didattico basato sul *problem solving* e sulle procedure sperimentali. Un metodo che prevede un approccio sperimentale alla geometria e lo studio delle applicazioni della matematica. La matematica in quest'ottica è più da «praticare» che da «sistematizzare», per usare le parole di Giacardi (Giacardi, 2011, p.4). Il valore assegnato agli esperimenti collegati a problemi reali, affiancato all'uso di strumenti e modelli per l'insegnamento della matematica, è un aspetto chiave anche delle idee di Felix Klein che in Germania, a fine Ottocento, stava intanto elaborando un complesso programma di riforma dell'insegnamento della matematica. Tutta la sua opera trae ispirazione dall'idea di una stretta relazione tra i vari rami della matematica (ad esempio, tra l'Algebra e la Geometria) ma anche tra questa e le altre scienze.

In Italia, come accennato, propone l'idea di un laboratorio Giovanni Vailati, matematico e filosofo impegnato in campo educativo su più fronti: sul fronte dell'insegnamento (prima all'Università di Torino, poi nelle scuole secondarie), sul fronte della riforma delle Scuole Secondarie (che lo vede impegnato, tra il 1905 al 1909, nei lavori della Commissione Reale) e sul fronte della ricerca scientifica. Va precisato che, a differenza di Perry, Vailati non opera una esposizione sistematica delle sue idee, idee che vengono rintracciate in vari scritti e appunti ma non sistematizzate, evidentemente anche a causa della sua morte prematura. La scuola laboratorio proposta da Vailati rientra tra le indicazioni metodologiche inerenti ai programmi di matematica da lui elaborati nell'ambito dei lavori della Commissione Reale per riformare la Scuola Secondaria. Non si tratta di un laboratorio per esperienze scientifiche, quanto piuttosto di un «luogo dove all'allievo è dato il mezzo di addestrarsi, sotto la guida e il consiglio dell'insegnante, a sperimentare e a risolvere questioni, a [...] mettersi alla prova di fronte a ostacoli e difficoltà atte a provocare la sua sagacia e coltivare la sua iniziativa» (Vailati, 1906, p. 292). Le parole di Giacardi (2011) sintetizzano bene gli aspetti peculiari della sua visione dell'insegnamento della matematica:

> *La lezione maieutica, il ricorso al disegno, al lavoro manuale, al gioco e l'introduzione di opportuni sussidi didattici, il metodo sperimentale operativo, l'approccio unitario alle matematiche, l'uso della storia della scienza, un giusto equilibrio fra rigore e intuizione sono gli aspetti più significativi della visione vailatiana dell'insegnamento e si traducono nella scuola-laboratorio che egli auspicava e che a suo parere poteva essere attuata ad ogni livello scolare.*
>
> *(Giacardi, 2011, p.8)*

In accordo con Giacardi (2011), la lezione maieutica è quella che egli ritiene la più opportuna per guidare l'allievo alla scoperta delle verità matematiche: una lezione basata sul dialogo e strutturata secondo domande-stimolo che il docente pone per incoraggiare l'allievo alla ricerca delle suddette verità. Secondo Vailati, la dimensione del gioco all'interno del processo di apprendimento può contribuire ad accrescere l'attenzione degli studenti. Anche il lavoro manuale può essere utile in questo processo di scoperta, in quanto permette all'allievo di esercitare le proprie facoltà di osservazione e di giudizio e concorre ad un apprendimento significativo. In termini attuali, si potrebbe dire che la lezione maieutica si contrappone alla *lezione frontale*, di stampo comportamentista, basata sul fatto che il docente debba "trasmettere" una conoscenza all'allievo: il docente predispone il contenuto da trasmettere, mentre l'alunno ha il compito di ascoltare il docente, memorizzare quanto ha udito e «immagazzinare i concetti trasmessigli» (Ligorio & Cacciamani, 2013, p.25). Ne consegue che, nella visione di Vailati, l'insegnamento della matematica debba avere un'impostazione operativa e sperimentale: nella sua scuola laboratorio la matematica è intesa come una matematica "da praticare", senza però trascurare l'aspetto teorico. La sua idea è che si debba procedere dalla pratica alla teoria, dal concreto all'astratto, con il ricorso a strumenti quali il disegno, la bilancia, la carta millimetrata. L'allievo dovrebbe prima conoscere i fatti a cui una teoria si riferisce e solo dopo imparare quella teoria. Secondo Bolondi (2006), anche oggi il fanciullo deve conoscere procedendo dalla sperimentazione alla spiegazione teorica, dal caso particolare al caso generale. I vantaggi di questo approccio si riscontrano principalmente nell'insegnamento della geometria: non a caso, infatti, il disegno si configura come un nesso naturale tra la teoria e la pratica. Il disegno geometrico, infatti, è inteso da Vailati come qualcosa di necessario per comprendere come costruire le figure, scoprire le proprietà geometriche delle figure e, solo dopo, comprendere la geometria euclidea. Può essere utile, in quest'ottica, proporre una teoria sotto forma di problema: l'allievo si sentirebbe inserito in un contesto sperimentale in cui osservare, conoscere gli elementi del problema e ricercare una strategia risolutiva mediante l'utilizzo di strumenti matematici opportuni. L'insegnante potrebbe poi mostrare come sia possibile giungere ad una stessa risoluzione (o dimostrare una data proposizione) usando strumenti o strategie differenti. Affrontare un problema con metodi differenti è il modo più semplice che il docente ha di far percepire agli studenti l'unità delle matematiche (ad esempio, facendo ricorso a metodi algebrici, geometrici e aritmetici). Come sostiene Giacardi (2011), Vailati riteneva importante offrire agli allievi una visione unitaria delle matematiche e, ancor più, del sapere, facendo dialogare la cultura scientifica con la cultura umanistica. Per fare ciò l'insegnante può ricorrere al metodo storico in quanto applicabile ad ogni scienza e utile a rendere l'insegnamento più gradevole e più proficuo. Una lettura commentata in classe di qualche passo di testi scientifici classici potrebbe certamente assolvere a tale compito ed al contempo avvicinare gli allievi alla storia delle scienze.

Le riflessioni di Vailati hanno ispirato diversi ricercatori contemporanei. Ad esempio, dalle idee di Vailati nasce quello che Bolondi (2006) definisce *laboratorio di apprendimento.* Egli parte dal presupposto che bisogna *fare matematica* per capire cosa *è matematica* e delinea i tratti essenziali del suo laboratorio di apprendimento, progettato dall'insegnante per *fare matematica* appunto:

1 In un laboratorio ci sono situazioni da osservare, fatti da studiare o riprodurre, dati da sistemare. Si tratta di un luogo, non necessariamente fisico, nel quale gli studenti si sentano *liberi* dai tradizionali schemi scolastici e siano *mossi* dalla voglia di sapere, di capire.

2 In un laboratorio non si espone una teoria formale per poi applicarla a qualche caso concreto o farne degli esempi. Viceversa, si parte da un problema, da un insieme di dati, da una situazione per poi giungere ad una soluzione o una spiegazione razionale e, sulla base di queste, organizzare la conoscenza così costruita in una teoria.

3 Nel laboratorio l'alunno mette in gioco tutto sé stesso, le proprie abilità e conoscenze, mentre opera alla *ricerca* di una soluzione per cui non ha a disposizione un metodo "suggerito" dal testo stesso del problema (come talvolta accade negli esercizi di allenamento proposti dai libri scolastici).

4 Operare in un laboratorio implica una *collaborazione costruttiva* per venire a capo ad un problema concreto: una collaborazione «in orizzontale» tra gli studenti, ed una «in verticale» tra il singolo alunno, il gruppo classe e il docente (Bolondi, 2006, p.2). Nella dimensione collaborativa emergono talvolta proprio quegli studenti più restii, più in difficoltà, che invece trovano nel laboratorio un momento per vedere valorizzati sé stessi ed il proprio lavoro.

5 Nel lavoro in laboratorio non c'è una demarcazione tra la teoria e la pratica; è possibile risalire alla costruzione di una teoria formale, possibilmente generale, come anche applicare una teoria ad un problema concreto. Si potrebbe dire che l'alunno diventa, *in pectore*, un matematico che nello studiare una situazione reale, con gli strumenti concreti e conoscitivi di cui dispone, schematizza, generalizza, formula ipotesi, verifica, dimostra, applica.

6 In laboratorio anche sbagliare ha un senso e contribuisce alla costruzione dei significati: questa *dimensione costruttiva dell'errore* era già stata valorizzata da Federico Enriques (1871-1946), figura di spicco nel mondo matematico e filosofo della scienza, convinto sostenitore dell'unitarietà del sapere come del resto anche Vailati.

7 «Per risolvere i problemi posti dalle situazioni concrete di laboratorio, l'intuizione si unisce al rigore, la fantasia al metodo, l'inventiva al mestiere» (Bolondi, 2006, p.2). In queste dicotomie si esplica il valore formativo del laboratorio.

In ultimo, Bolondi (2006) afferma la necessità che il laboratorio abbia un suo *tempo* specifico ed una configurazione tali da distinguerlo dalle normali ore scolastiche. Parafrasando le parole di Paola (2007), si potrebbe dire che le peculiarità di questa metodologia di lavoro, a prescindere dalla forma e dallo scopo educativo perseguito, richiedono attenzione, laboriosità, pieno coinvolgimento nel processo di "costruzione collettiva" di una conoscenza. Nei punti sopra elencati si rintracciano in maniera chiara ed evidente i tratti salienti della visione di Vailati della scuola laboratorio: la caratterizzazione del laboratorio come luogo in cui ogni allievo può "praticare" la matematica, sperimentare, risolvere problemi e superare difficoltà che mettono alla prova le sue intuizioni e le sue abilità, confrontarsi con i pari e con l'insegnante nel processo di scoperta delle verità matematiche, comprendere la teoria a partire da situazioni concrete.

In accordo con Giacardi (2011), la caratterizzazione che Vailati dà della scuola laboratorio rimane ad ogni modo sempre attuale ed è stata ripresa di recente nei curricoli di matematica proposti dalla Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica[30] (CIIM) dove si legge:

> *Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti,*

---

[30] Le origini della CIIM si risalgono al 1908 quando, in occasione del IV Congresso Internazionale dei Matematici, è costituita una sottocommissione italiana dell'ICMI. Nel 1952 l'ICMI è trasformata in una sottocommissione permanente dell'UMI (Unione Matematica Italiana) e due anni dopo è istituita la prima Sottocommissione italiana per l'Insegnamento della Matematica, con presidente Guido Ascoli (1887-1957). Nel 1963 viene introdotto l'acronimo CIIM. Altri otto presidenti si succedono prima del 1975, quando la CIIM diviene una sottocommissione permanente dell'UMI. Dopo la modifica del regolamento avvenuta nel 2012, è la Commissione Scientifica (CS) dell'UMI a nominare gli 8 membri della CIIM che si siano distinti per l'attenzione ai problemi dell'insegnamento della matematica e che abbiano comprovata esperienza nel campo; altri membri possono essere eventualmente nominati per rappresentare quelle realtà che sono attive nel settore della didattica della matematica o di altre discipline ad essa affini. Inoltre, il Presidente, indicato dalla CS fra i membri della CIIM, può avvalersi della collaborazione di un numero esiguo di esperti nel settore, nominati anch'essi dalla CS. Per approfondimenti, si rimanda alla pagina ufficiale della CIIM (https://umi.dm.unibo.it/che-cose-la-ciim/storia-della-ciim/la-nascita-della-ciim/), curata dalla Prof.ssa Cerroni, dove è possibile trovare altre informazioni ampiamente documentate da fonti storiche, i nominativi degli attuali membri della CIIM e di quanti che ne hanno fatto parte in passato.

organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).

(Anichini et al., 2004, p. 28)

Si tratta di una metodologia che, come Vailati auspicava, è basata sul *problem solving*, sul dialogo, sulle congetture e sulle verifiche sperimentali, per mezzo dei quali l'insegnante persegue l'obiettivo di costruire significati e collegare gli aspetti pratici e teorici della matematica.

2.6 Apprendimento integrativo e insegnamento interdisciplinare della matematica

In un recente lavoro (Williams et al., 2016), viene messa in luce la necessità sempre maggiore di indagare e risolvere problemi della vita reale, pratici, interdisciplinari (nel senso che sarà di seguito specificato); questa ha stimolato alcune collaborazioni tra docenti che rientrano in quello che si potrebbe definire *lavoro interdisciplinare*. Gli autori dello studio citato hanno operato una revisione della letteratura esistente sulla *didattica interdisciplinare della matematica*[31] (IdME), un campo di ricerca fiorente nel quale si rintracciano diversi studi sperimentali che includono la matematica quale fattore chiave per arricchire le esperienze di apprendimento degli studenti in diversi livelli scolari. Molti di essi ruotano intorno allo sviluppo di competenze nelle discipline STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*) per preparare i giovani ad inserirsi nel settore industriale - altamente competitivo e innovativo - e aiutarli a diventare cittadini attivi in una società sempre più globale e digitale: fornire un'educazione di elevata qualità è infatti il miglior investimento che una società possa attuare (Consiglio dell'Unione Europea, 2018). Ciò trova conferma in un altro studio che riconosce nelle discipline STEM il fondamento per la formazione etica e professionale di cittadini responsabili, che possano ergersi a custodi del pianeta (Maas et al., 2019). Prima di parlare di insegnamento e apprendimento interdisciplinare della matematica è tuttavia necessario fare chiarezza su

---

[31] La definizione esatta è *Interdisciplinary Mathematics Education* (IdME) (Williams et al., 2016).

cosa si intende per "disciplina", "interdisciplinarità" e "lavoro interdisciplinare". Come si possono teorizzare tali concetti in didattica della matematica? Quali lavori sono stati condotti sull'interdisciplinarità nella pratica educativa? Da queste domande prende avvio la revisione in letteratura operata da Williams e dai suoi colleghi (Williams et al., 2016), poi confluita in un successivo lavoro (Williams & Roth, 2019) che mira a fornire un fondamento teorico alla ricerca sull' IdME e sull'attività interdisciplinare in ambito didattico e lavorativo, discutendo casi di studio e politiche adottate per promuovere attività curriculari integrative[32]. Sulla base dei contributi indicati, viene prima fatta luce sulle radici storiche e culturali del concetto di *disciplina*. Si tratta di un passaggio necessario per comprendere e cosa si intende per attività disciplinare e interdisciplinare, dal momento che ogni siffatta attività è sempre mediata da artefatti culturalmente determinati (Williams & Roth, 2019). Inoltre, la comprensione di ciò che il lavoro interdisciplinare comporta (in termini di opportunità e difficoltà) è possibile solamente indagando il modo in cui le discipline (in senso generale) nascono, fioriscono, si relazionano e lavorano in sinergia per assolvere delle funzioni sociali (Williams et al., 2016).

La parola *disciplina* deriva dai termini latini *discipŭlus* ("allievo") e *disciplina* ("insegnamento"), usati col significato di istruzione, formazione, ramo di studio, scuola filosofica e più tardivamente castigo o punizione (Williams et al, 2016). Il termine inglese *discipline* è stato usato da Chaucer in riferimento ai rami della conoscenza quali la medicina, la teologia o giurisprudenza (Williams et al, 2016). Essa trova spazio in differenti ambiti (politico, sociale, accademico, per citarne alcuni). In un quadro teorico generale, la disciplinarità può essere definita come un "fenomeno del mondo sociale", segnato dall'aumento della diversificazione e specializzazione del lavoro e del discorso, ma anche come una "forma di discorso che rende tematica la specializzazione" (Williams et al., 2016, p.4, trad.). Stando alla definizione di cui sopra, ogni disciplina si caratterizza per le identità specializzate che in essa risiedono, per le basi di conoscenza e le pratiche che in essa si sviluppano e vengono trasmesse (Suazo et al., 2019). Le pratiche sono infatti

[32] Per ulteriori approfondimenti, si rimanda alla monografia dell'ICME-13 Doig, B., Williams, J., Swanson, D., Borromeo Ferri, R., & Drake, P. (2019*). Interdisciplinary Mathematics Education: The State of the Art and Beyond.*

quei principi e quei metodi che vengono applicati a problemi di vita quotidiana spesso in modo inconsapevole o spontaneo; è quella conoscenza che si rivela nelle azioni, nel modo stesso di operare all'interno di una disciplina[33]. Williams e Roth (Williams & Ruth, 2019, p.17), sostengono che alla base della definizione di "disciplina" risiede il concetto di "attività produttiva", in quanto unità elementare di analisi per qualsiasi fenomeno specificamente umano e rappresentativa dell'intera società. L'attività produttiva, con le sue pratiche materiali e discorsive, implica generalmente un lavoro collettivo e congiunto dei membri della società finalizzato alla produzione di beni di consumo, nonché al controllo sulle loro condizioni individuali e alla soddisfazione dei bisogni umani. Pertanto, l'attività produttiva nella sua interezza, può conferire significato e dare corpo al concetto di disciplina (Williams & Roth, 2019). Ne segue, secondo gli autori sopra citati, che è possibile concepire una disciplinarità che non sia *sine tempore* o, per meglio dire, nata *con* l'umanità, ma che sia nata *per* l'umanità, per soddisfarne alcuni bisogni. Nel corso della storia, sono emerse più forme di produzione dovute alla crescente specializzazione e divisione del lavoro che hanno contribuito a rendere la produzione più efficiente o i suoi prodotti più efficaci. Proprio la divisione del lavoro è ciò che rafforza la coesione di una società (Durkheim, 1893). Quest'ultima può difatti essere pensata come insieme di attività sociali diversificate ed interconnesse:

> *L'interconnessione avviene per mezzo di scambi, per cui i prodotti di un'attività diventano parte integrante di un'altra attività, come quando la produzione di nuove conoscenze all'interno di una disciplina come la matematica diventa parte del kit di strumenti per le attività produttive associate nell'ingegneria o nella manifattura.*
>
> *(Williams et al., 2016, p.6, trad.)*

Tuttavia, l'attività specializzata di una disciplina emergente ha comportato talvolta la necessità di creare un'infrastruttura teorica di conoscenza, rendendo l'insegnamento funzionale o indispensabile alla produzione e riproduzione di una disciplina (nonché caratterizzante la disciplina stessa) (Williams & Roth, 2019). Tale insegnamento,

[33] La definizione è tratta da Schön, D. A. (1983). *The Reflective Practitioner: How Professionals Think in Action.* New York: Basic Book.

formalizzato in un curriculum e in una scuola, nutre la conoscenza dell'attività specializzata da cui è nato e al contempo si distacca da essa, "si estranea dal lavoro produttivo in quanto tale" per assumere una vita propria, nelle accademie e nelle scuole (Williams & Roth, 2019, p.17). Questa alienazione dal lavoro non va intesa come un distacco dal mondo del lavoro per coltivare lo studio di una disciplina fine a sé stessa. Difatti, se è vero che matematici puri come Godfrey Harold Hardy (1877-1947) hanno dichiarato l'assoluta inutilità della loro matematica pura, è anche vero che diversi rami della matematica pura si sono rivelati estremamente utili decenni o centinaia di anni dopo la loro invenzione; basti pensare all'algebra booleana e al suo sfruttamento nelle tecnologie digitali, alle geometrie non euclidee e alla fisica moderna (Williams & Roth, 2019). Un esempio di questo cambiamento della natura di una disciplina lo si può rintracciare nella filosofia dell'Antica Grecia (la produzione di conoscenza della verità), poi evoluta lungo i due rami della filosofia e della fisica e in ultimo frammentata, nei metodi e nei contenuti, in quelle che sono le scienze attuali (Durkheim, 1893). Si inizia a parlare di discipline accademiche e scolastiche in Occidente: qui può essere rintracciata la loro origine, con la suddivisione iniziale in trivio (grammatica, retorica, logica) e quadrivio (aritmetica, geometria, astronomia, musica), emersa in epoca medievale e rimasta in vigore fino alla prima modernità (D'Ambrosio, 1999). Solo verso la fine del XVIII viene operato un riordino degli oggetti di indagine e dei principi su cui storicamente si sono basate.

Dalla definizione di *disciplina* in termini di attività produttiva, emerge chiaramente come questo termine costituisca "un'arma a doppio taglio" ed includa in sé una duplice natura, pratica e di discorso: da un lato contraddistingue le specifiche pratiche e tecniche con cui gli scienziati e i professionisti svolgono il loro lavoro, dall'altro – come disciplina fisica e di pensiero - conferisce loro specificità imponendo dei vincoli al modo in cui le persone lavorano (Williams et al., 2016, p.9). Tali vincoli, secondo Lynch (1985), derivano in parte dall'accettazione di pratiche e forme di rappresentazione socialmente riconosciute che costituiscono e identificano una disciplina e i suoi confini (Lynch, 1985). Inoltre, in accordo con altri autori (Williams et al., 2016), la disciplina è un prodotto storico in tutti i sensi, socialmente e storicamente determinato. In quanto attività produttiva, essa coinvolge una data comunità in un lavoro collettivo, differenziato e finalizzato a (o spinto dal) produrre un bene; in quanto attività sociale, essa include tutti gli aspetti di una data comunità di praticanti. Lo schema sottostante (Figura 4) rappresenta sinteticamente le molteplici relazioni che intercorrono tra gli attori di un sistema produttivo e le parti costituenti la disciplina quale attività produttiva e sociale:

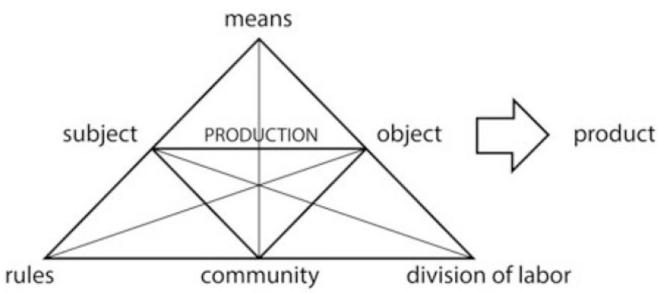

Figura 4. Schema teorico di un'attività storico-culturale di un sistema di attività. Tratta da Engeström (1987).

Ogni nodo dello schema rappresenta un momento dell'attività produttiva. L'intero sistema di produzione storicamente evoluto, sociale e materiale, media la relazione dialettica tra il *soggetto* (una singola persona oppure un gruppo) impegnato con l'*oggetto* dell'attività; l'interazione tra il soggetto e l'oggetto, mediata da *strumenti* e *significati*, ha come risultato il *prodotto* ed avviene all'interno di una *comunità* dove la *divisione del lavoro* è governata da norme e *regolamenti* (Williams & Roth, 2019). Il modello sopra raffigurato (Fig. 4) trae origine dai più recenti sviluppi dell'*Activity Theory*[34], un approccio teorico sviluppato intorno agli anni '20 da alcuni studiosi sovietici della scuola storico-culturale. In questo modello, spiega Zucchermaglio, "per soggetto si intende la comunità sociale il cui operare costituisce il punto di vista adottato nell'analisi e per oggetto si intende il materiale o lo spazio problematico nel quale l'attività si muove e che è trasformato in risultati con la mediazione di strumenti e artefatti fisici e simbolici. La comunità comprende numerosi individui o sottogruppi che stanno lavorando su uno stesso oggetto. Per divisione del

[34] Per ulteriori approfondimenti, si rimanda alla pagina https://www.indire.it/db/docsrv/audio/Activity%20theory.pdf.

lavoro si intende sia la divisione orizzontale di compiti tra i membri di una comunità che quella verticale in base allo status e al potere. Infine, con regole si intendono tutte quelle norme e convenzioni esplicite, ma anche spesso implicite, che guidano le azioni e le interazioni all'interno di un sistema di attività" (Zucchermaglio, 1996, pp. 23-24). A questo punto è necessario chiarire come la Teoria dell'Attività concettualizza l'*oggetto*, o meglio, l'*oggetto/motivo* dell'attività. Richiamando l'esempio classico dell'attività lavorativa, Williams e Roth (2019) sottolineano che l'oggetto che definisce l'attività produttiva è, come ogni altro nodo dello schema (Figura 4), in fase di trasformazione: le azioni dei vari lavoratori portano infatti alla trasformazione di oggetti "grezzi" in oggetti di consumo che soddisfano i bisogni sociali (Williams e Roth, 2019, p.24).

> *Così, per esempio, un costruttore ha tutti materiali e strumenti a portata di mano e l'immagine "ideale" della casa finita. L'oggetto è sia la materia prima che viene trasformata in un prodotto, ma anche, nella sua forma "ideale", è il motivo, cioè il risultato previsto dal soggetto che agisce. Allo stesso modo, il soggetto viene trasformato attraverso l'attività (si può chiamare questo apprendimento, o in alcuni casi sviluppo), riflettendo le sue azioni in via di sviluppo sull'oggetto e sulle relazioni con altri soggetti impegnati nell'attività comune.*
>
> *(Williams & Roth, 2019, p.19, trad.)*

Un'attività è definita, pertanto, dal "motivo" di trasformare un oggetto "grezzo" in "oggetto risultato", ossia in una nuova forma che soddisfi un bisogno sociale (Williams e Roth, 2019, p.24); l'oggetto nel suo stato attuale e il prodotto finale, sia pur immaginato, costituiscono l'*oggetto-motivo* dell'attività. Quest'ultimo trova espressione nell'apprendimento e nell'istruzione in termini di riconoscimenti, voti o risultati di apprendimento (*prodotto*) necessari per soddisfare alcuni bisogni sociali quali "la progressione, l'accettabilità/rispettabilità sociale o anche una carriera" (Williams & Roth, 2019, pp. 18-19). Una disciplina, come ad esempio la matematica, si può vedere quale attività produttiva in cui il soggetto utilizza strumenti di vario genere (concettuali, fisici, di misura, …) per operare su un oggetto (che è la matematica stessa), interagendo con altri soggetti (la comunità o le comunità di matematici o altri specialisti) anch'essi coinvolti nella produzione (Williams & Roth, 2019). Oggetti/motivo comuni a più sistemi di attività produttive o, in altri termini, a più discipline caratterizzano quelli che si potrebbero chiamare lavori *interdisciplinari* (come viene meglio chiarito di seguito): qui ciascun sistema, con le proprie caratteristiche distintive, strumenti e prospettive, offre un contributo unico nell'attività produttiva (Figura 5).

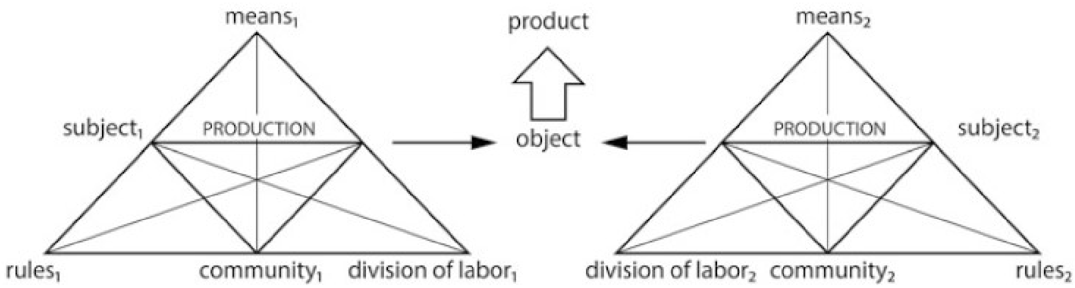

Figura 5. Schema rappresentativo di due differenti sistemi di attività che collaborano con un obiettivo/motivo comune (Williams et al., 2016, p.11).

Se nel XX secolo la struttura dominante della conoscenza era la divisione in domini di specializzazione disciplinare, questo sistema è stato messo in discussione dalle attività interdisciplinari presenti in numero sempre maggiore (Klein, 2010). Per definire il termine "interdisciplinare", secondo Repko (2008) il punto di partenza consiste nel suddividere la parola nelle sue componenti: *inter* e *disciplinare.* Il prefisso *inter* significa "tra" o "nel mezzo"; *disciplinare* indica l'appartenenza o l'essere in relazione con un particolare campo di indagine. In senso ampio, dunque, si potrebbe dire che "interdisciplinare" significa letteralmente "tra campi di indagine" o "tra ambiti di studio"; questo suggerisce la necessità che ci siano almeno due persone, di due discipline almeno, impegnate a lavorare insieme in qualche modo in qualche campo (Stember, 1991). Il problema dell'interdisciplinarità può essere inquadrato secondo Williams e Roth all'interno dell'*Activity Theory* sopra citata. Se nella normale organizzazione della società i prodotti finali vengono scambiati per mezzo di una forma di scambio generalizzata, come il denaro, in un lavoro interdisciplinare due o più sistemi di attività che rappresentano diverse discipline possono unirsi per lavorare in modo congiunto su un comune oggetto/motivo dando vita ad un prodotto comune (Williams & Roth, 2019). L'oggetto/motivo comune probabilmente differisce dall'oggetto-motivo che caratterizza le singole pratiche monodisciplinari (Williams & Roth, 2019). Tuttavia, esso va chiarito in modo da poter analizzare il lavoro congiunto tra le parti come un unico sistema di attività, dove la divisione del lavoro incorpora le discipline coinvolte. Un caso relativamente semplice di lavoro congiunto con un unico oggetto/motivo può essere quello in cui un medico ed un paziente sono coinvolti nel risolvere un dato problema di salute di quest'ultimo; entrambi potrebbero agire perché sia prescritto e adoperato un qualche trattamento medico ma le loro attività potrebbero orientarsi verso differenti direzioni se i loro motivi non sono ben allineati (ad esempio, se il paziente non gradisce gli effetti collaterali del trattamento o i farmaci sono troppo costosi) (Williams & Roth, 2019). In campo educativo emergono ulteriori problemi di fondo, quali l'identificazione, da parte dell'insegnante, del discente con l'oggetto dell'attività disciplinare oppure il mancato riconoscimento dell'oggetto/motivo comune:

> *Così, si afferma spesso che l'apprendimento è l'oggetto della scuola, mentre in pratica, la produzione di voti, pagelle e diplomi è il vero motivo verso cui sono orientati scuole, insegnanti, studenti e genitori.*
>
> *(Williams & Roth, 2019, p.25, trad.)*

Ciò si rivela anche nell'insegnamento di più discipline, dal momento che gli insegnanti di discipline diverse adottano pratiche disciplinari distinte e guardano verso risultati di apprendimento contraddistinti (Williams & Roth, 2019). Del resto, è difficile aspettarsi che individui le cui abitudini si sono formate in campi indipendenti si relazionino in modo efficace tra di loro (Williams et al., 2016). La ragione potrebbe risiedere nel fatto che "le pratiche di selezione e indottrinamento *all'interno di* ogni disciplina" contribuiscono all'estraniazione della disciplina dal lavoro produttivo prima, e alla "differenziazione *tra* le discipline" poi, adducendo ostacoli al lavoro interdisciplinare in ambito accademico o scolastico (Williams & Roth, 2019, p.27, trad.). Ne segue che la definizione di un oggetto/motivo comune a più discipline è un prerequisito essenziale per realizzare un lavoro interdisciplinare ma può anche costituire una difficoltà non irrilevante per conseguire il successo di quell'attività. Nel mondo accademico ciò è amplificato dalla presenza di gerarchie istituzionali in virtù delle quali alcune discipline sono considerate più importanti e apprezzate di altre; si parla infatti di contrapposizione tra scienze "dure" (naturali) e scienze "morbide" (sociali e umane) (Bourdieu, 2000). Riassumendo, nel quadro dell'*Activity Theory,* due discipline che condividono uno stesso oggetto/motivo sono coinvolte in una medesima attività; ciascuna di esse, con le proprie caratteristiche distintive, offre il proprio contributo alla realizzazione di un prodotto che si configura quale capitale culturale della società intera, realizzato all'interno di una divisione del lavoro tra gli specialisti di ambedue le discipline. In questa interazione è possibile incontrare degli ostacoli dovuti a ragioni culturali, storiche o produttive (la definizione di un oggetto/motivo comune dell'attività interdisciplinare, la struttura gerarchica in cui si collocano le discipline e l'alienazione tra le discipline stesse).

In quanto prodotto storico, ogni disciplina i evolve nel tempo e nel luogo. Man mano che una disciplina si sviluppa assorbe, così, pratiche e discorsi provenienti da altre discipline e le fa confluire in un processo di indagine più complesso (pensando agli oggetti, strumenti, risultati e alle domande e forme organizzative che tale processo chiama in causa) dove le discipline si integrano secondo livelli differenti: si parla in tal caso di mono-, multi-, inter-, trans-, e meta- disciplinarità (Williams et al., 2016). La successione dei prefissi non è affatto casuale. L'interdisciplinarità può effettivamente essere pensata come un continuum di relazioni tra discipline, in cui si passa attraverso livelli crescenti di complessità a partire dalla monodisciplanarità (livello 0), proseguendo con la multidisciplinarità (livello 1) e l'interdisciplinarità (livello 2); in ultimo, i livelli più complessi di transdisciplinarità (livello 3) e metadisciplinarità (livello 4) (Williams et al., 2016). La multidisciplinarità si realizza avvicinando le intuizioni di due o più discipline, senza tuttavia cercare di integrarle né di scoprire alcun terreno comune; essa si limita ad apprezzare le differenze di prospettive disciplinari (Repko., 2007). Dunque, prevede un debole impegno da parte di ciascuna delle discipline coinvolte, le quali rimangono distinte nelle pratiche materiali e discorsive caratterizzanti l'identità di ognuna. La multidisciplinarità non fa confusa con la *pluridisciplinarità* che indica la "giustapposizione" di discipline, in relazione più o meno marcata, quali matematica e fisica o latino e greco (OECD, 1972, p.25, trad.). In un gruppo pluridisciplinare, ad esempio, è possibile esaminare una questione o un problema facendo affidamento sulle lenti e sui contributi offerti da diverse discipline (Ignjatovic, 2020), studiando uno stesso argomento dal punto di vista offerto da ciascuna disciplina (Capone et al., 2016b). L'interdisciplinarità, invece, consiste nell'integrazione di metodi, contenuti e concetti provenienti da diverse discipline (OECD, 1972); essa "identifica intuizioni rilevanti, crea o scopre un terreno comune tra di loro, e lo usa per integrarle" (Repko., 2007, p.12, trad.). L'astrofisica, la biochimica, l'ecopsicologia, la psicostoria e la sociobiologia sono solamente alcuni dei tanti esempi in cui i domini di conoscenza diventano interconnessi: partendo da un punto comune, sintetizzano alcuni aspetti della loro materia e si arricchiscono reciprocamente, traendone mutuo beneficio (Collen, 2002). L'interdisciplinarità, secondo la definizione di Repko (2007) implica quindi l'integrazione tra due o più discipline in termini di conoscenze e pratiche o approcci (Stember, 1991), con conseguente trasferimento di metodi da una disciplina ad un'altra. Nel tentativo di dare una definizione compiuta al termine "interdisciplinare", molti altri studi sono stati condotti e diverse declinazioni si possono rintracciare in letteratura (non solo in didattica della matematica). Uno dei testi più citati nella ricerca sull'interdisciplinarità è il rapporto OCSE (OECD, 1972) elaborato circa mezzo secondo addietro, in cui risiede il fondamento e l'ispirazione per le considerazioni sinora discusse. Qui la definizione di interdisciplinarità si fonda sulla mutua collaborazione ed integrazione di elementi propri di due o più discipline che interagiscono fra di loro (Repko, 2007).

> *L'interdisciplinarità è un aggettivo che descrive l'interazione tra due o più discipline diverse. Questa interazione può andare dalla semplice comunicazione di idee all'integrazione reciproca di concetti organizzativi, metodologia, procedure, epistemologia, terminologia, dati e organizzazione della ricerca e l'istruzione in un campo abbastanza grande. Un gruppo interdisciplinare è composto da persone formate in diversi campi del sapere (discipline) con diversi concetti, metodi, dati e termini diversi organizzati in uno sforzo comune su un problema comune con una continua intercomunicazione tra i partecipanti delle diverse discipline"*
>
> *(OECD, 1972, pp. 25-26, trad.).*

Tra le attività interdisciplinari si annoverano le attività STEM (*Science, Technology, Engineering e Mathematics*), ovvero quelle attività di insegnamento e apprendimento delle Scienze, della Tecnologia, Ingegneria e Matematica in contesti interdisciplinari. Una fiorente ricerca ruota da anni intorno alle discipline STEM, considerate come un modo per coinvolgere gli studenti in compiti autentici e nei rami dell'innovazione scientifica (Tytler et al., 2019). In un recente lavoro (Tytler et al., 2019), in particolare, si discutono tre casi di studio inseriti in una più ampia iniziativa australiana di apprendimento STEM. Gli autori affermano che gli esiti della ricerca condotta dimostrano che il progetto STEM ha suscitato un maggiore impegno ed entusiasmo per le attività STEM e la ricerca scientifica negli studenti convolti. Tuttavia, nell'indagare la percezione delle esperienze negli insegnanti e nell'esplorare i diversi modi di concettualizzare e far interagire la matematica in contesti STEM, emergono due importanti sfide o ostacoli: da un lato la sfida (per gli insegnanti) di generare un apprendimento matematico produttivo e coerente in contesti interdisciplinari, dall'altro le barriere istituzionali e sistemiche all'adozione più ampia di attività STEM interdisciplinari (Tytler et al., 2019).

Il terzo livello di complessità viene introdotto da Williams e Roth (2019) con una riflessione sulla scarsa consapevolezza delle discipline che storicamente hanno avuto un ruolo nella nascita di oggetti, strumenti e concetti in uso nella vita quotidiana e nella maggior parte delle attività lavorative produttive. "Andando avanti con il lavoro, – affermano gli autori - ignoriamo il lavoro matematico che è andato nella progettazione e nella fabbricazione degli strumenti che usiamo (il computer), le regole dei sistemi a cui obbediamo inconsciamente (l'orario), persino i concetti matematici incorporati nei discorsi che mediano il nostro lavoro […]." (Williams & Roth, 2019, p.27, trad.). In altri termini, la transdisciplinarità è "l'applicazione di teorie, concetti o metodi attraverso le discipline con l'intento di sviluppare una sintesi globale" (Lattuca, 2001, p. 83, trad.). Secondo Strathern (Strathern, 2004, p.70) si tratta di una sorta di "super-interdisciplinarità" che riunisce "le discipline in contesti in cui nuovi approcci nascono dall'interazione tra loro, ma in misura maggiore". Una conferma la si trova in Collen (2002) il quale afferma che, come l'interdisciplinarità, "la transdisciplinarità promuove un linguaggio comune, una conoscenza utilizzabile tra le discipline e metodologie condivise" ma, a differenza della prima, "orienta lo sforzo più verso la sistematicità e la complessità dell'obiettivo" (Collen, 2002, p.8, trad.). L'attuale rivoluzione educativa si può concretizzare solo sul fronte transdisciplinare (Capone et al., 2016b). Un approccio transdiciplinare in ambito educativo, secondo l'UNESCO (2013), "dissolve i confini tra le discipline convenzionali e organizza l'insegnamento e l'apprendimento intorno alla costruzione del significato nel contesto di problemi o temi del mondo reale" (UNESCO, 2013, p.58, trad.). In questa argomentata discussione è possibile intuire un livello maggiore di complessità rispetto all'interdisciplinarità: se in quest'ultima una disciplina prende in prestito teorie, concetti o metodi da un'altra per applicarli ad un problema condiviso con altre discipline (Repko, 2008), la transdisciplinarità, invece, va oltre l'ambito strettamente disciplinare ed opera una sintesi globale, approdando verso nuove terre quali la sanità, l'istruzione, e le industrie manifatturiere (Klein, 2010). In ultimo, la transdisciplinarità non può che addurre alla metadisciplinarità, una "emergente mono-disciplinarità di maggiore complessità", come meglio specificato da Collen (2002):

> *I confini che distinguono le discipline si dissolvono in una certa misura nella inter- e trans-disciplinarità, ma diventano più che insignificanti, di fatto inesistenti, al meta-livello. La meta-disciplinarità mostra le qualità intrecciate delle discipline miste che lavorano in collaborazione e collettivamente, rendendo la ricerca della conoscenza più che tangibilmente transdisciplinare.*
> *(Collen, 2002, p.9, trad.)*

Altrove, la meta-disciplinarità è indicata come la conoscenza della disciplina stessa e di ciò che in essa è possibile rintracciare per risolvere un problema o una questione (comune ad altre discipline) (Williams & Roth, 2019).

Così, sulla scala della complessità, l'interdisciplinarità può effettivamente essere pensata come un continuum di relazioni tra discipline che procede dalla mono-disciplinarità, alla meta-disciplinarità, passando per la multi-disciplinarità e la transdisciplinarità che offrono più o meno ibridazione delle discipline coinvolte tra questi estremi (Collen, 2002). Un valore aggiunto a questa scala è offerto dalla prospettiva teorica di Bakthin (Bakthin, 1981). Molti dei suoi concetti sono tenuti in considerazione in una versione più attuale della teoria storico-culturale dell'attività (Williams & Roth, 2019). Nella sua visione, una *disciplina* è un genere di linguaggio nel quale si formano strutture di enunciati necessari alla comunicazione tra individui. Nelle culture moderne è presumibile che ciascuno si esprima attraverso più voci, adottando più generi di linguaggio, in senso *multidisciplinare*. Affinché sia efficace, una comunicazione multidisciplinare richiede che gli interlocutori facciano ricorso, sia pur parzialmente, a linguaggi/discipline parlati da "altri". Ciò può condurre ad enunciati ibridi, con conseguente produzione di voci nuove e creative. Quando questo avviene solo a livello di significato, mantenendo distinte le voci ed i generi di linguaggio all'interno dell'enunciato, si parla di *multidisciplinarità*. Non viene creato un nuovo genere di linguaggio né un linguaggio ibrido (come accade, ad esempio, se si considera la biochimica come disciplina a sé rispetto alla chimica e alla biologia). Williams e Roth (2019) suggeriscono sia particolarmente utile esaminare la collaborazione tra matematici o specialisti (ciascuno, con una propria voce all'interno di un certo genere di linguaggio), quale collaborazione *tra* e *attraverso* le discipline, da questa prospettiva. Per raggiungere lo scopo di un dialogo efficace (formare un enunciato ibrido), nessuna disciplina ha bisogno di assorbire le competenze dell'altra; semplicemente, necessita di una conoscenza *metadisciplinare* della propria natura, della propria identità in relazione con le altre. Nella prospettiva di Bakthin, essa va studiata e sviluppata in contesti di attività *transdisciplinari* dove si concretizza un confronto fra discipline che lavorano dialogicamente in una stessa attività, con un oggetto/motivo comune, per riprendere la versione classica dell'Activity Theory. Ogni linguaggio/disciplina mantiene qui i suoi tratti distintivi ma una metaconoscenza della disciplina stessa è necessaria per comprendere il contributo che ciascuna disciplina può offrire e concordare i propri *motivi* con quelli delle altre discipline (Williams & Roth, 2019). Un progetto o un'attività *interdisciplinare* è concettualizzato, nella teoria di Bakthin, come un enunciato ibrido nel quale due o più voci interagiscono, facendo emergere un nuovo genere di linguaggio o disciplina (Williams & Roth, 2019). Se si sposta l'attenzione alla matematica, le risorse teoriche qui richiamate, *l'Activity Theory* e la prospettiva di Bakthin, implicano da un lato la separazione della matematica (il suo insegnamento, apprendimento, la ricerca, la disciplina stessa) dal suo uso in un sistema produttivo più ampio, dall'altro un accostamento ad altri generi di linguaggio e pratiche discorsive. Entrambe (ma non solo) possono offrire un contributo all'educazione matematica interdisciplinare. È essenziale, pertanto, in accordo con Williams e Roth (2019), conoscere non solo la natura di una disciplina, come ad esempio la matematica, ma anche le sue reciproche relazioni con altre discipline, così da poter risolvere problemi sempre più complessi essendo consapevolmente e sapientemente “non-disciplinati”, cioè liberi dagli schemi o barriere che le stesse discipline, nella loro evoluzione storica e culturale, hanno creato. In tal senso, un approccio interdisciplinare all’educazione matematica offre e riceve dal mondo esterno un valore aggiunto che non avrebbe altrimenti (Williams & Roth, 2019).

Un’ultima riflessione sembra necessaria in riferimento ai problemi di ricerca del mondo reale che attualmente si trovano ad affrontare studiosi e specialisti. Problemi che non vengono offerti loro sotto forma di categorie etichettate, per risolvere i quali è quantomai proficuo andare oltre le competenze specialistiche acquisite in una singola disciplina o professione. L’Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico ha osservato in un recente resoconto (OECD, 2019b) che solo negli ultimi decenni si è registrata una crescente attenzione verso il pensare al mondo come composto da sistemi interconnessi, piuttosto che da una mera serie di unità discrete. In conseguenza, il focus dei sistemi educativi mondiali si è spostato dalle conoscenze curricolari circoscritte alle singole discipline verso la comprensione delle discipline come sistemi interconnessi. (OECD, 2019b) La chiave di volta risiede nell’adottare un approccio interdisciplinare tanto nella ricerca, quanto nell’apprendimento e nell’ambito lavorativo, per rispondere a domande complesse, risolvere problemi complessi (Razmak & Bélanger, 2016) e giungere verso una conoscenza più completa del mondo circostante. Si tratta infatti di un approccio che “genera una comprensione dei temi e delle idee che attraversano le discipline, delle connessioni tra le diverse discipline e sulla loro relazione con il mondo reale […] combinando contenuti, teorie, metodologie e prospettive di due o più discipline.” (UNESCO, 2013, p.32, trad.). Un esempio emblematico è costituito dall’integrazione della tecnologia con la comunicazione, un processo di integrazione che migliora l'efficacia interdisciplinare; la tecnologia ha difatti cambiato anche la vita e le abitudini degli esseri umani, oltre che il modo di fare ricerca e di insegnare (Razmak & Bèlanger, 2016).

In ambito educativo, le prospettive sopra indicate (multi/inter/trans/meta-disciplinarità) sono profondamente intrecciate in quello che è definito in senso più ampio come *approccio di apprendimento integrativo*, un approccio che punta ad un autentico apprendimento integrato e porta con sé notevoli benefici: uno spazio creativo e di esplorazione in cui apprendere; una libertà nell'integrare e combinare diversi metodi; la possibilità di migliorare la motivazione e l'efficacia del processo di apprendimento (Ignjatovic, 2020, p.186-187). Furner e Kumar (Furner & Kumar, 2007), ad esempio, in uno studio sul possibile miglioramento nell'insegnamento delle scienze integrandole con la matematica, sostengono che aiutare gli studenti a sviluppare la loro fiducia e abilità in matematica e scienze avrebbero un impatto positivo sulla vita degli studenti a lungo termine. Tale approccio trova conferma nel più recente rapporto OCSE (OECD, 2019b) sulle prospettive future dell'educazione e delle competenze, dove si suggerisce di presentare agli studenti una conoscenza che rifletta la complessità del mondo attuale, ovvero che sia già interconnessa. Qui si riconosce la presenza di quattro diversi tipi di conoscenza: *disciplinare, interdisciplinare, epistemica* e *procedurale* (OECD, 2019b, p.4). La prima consiste nella conoscenza di quegli oggetti e contenuti specifici di ogni materia, appresi ad esempio nello studio della matematica o delle lingue; è questa la struttura portante grazie alla quale gli studenti possono sviluppare altri tipi di conoscenza. La conoscenza interdisciplinare mette in relazione più discipline/individui e può essere realizzata mediante identificazione dei punti di connessione tra più materie, trasferimento e integrazione di concetti, contenuti, strategie e metodi. La conoscenza epistemica è conoscere come i professionisti di un dato settore (o di una data disciplina) pensano e lavorano; essa aiuta gli studenti ad approfondire la loro comprensione della disciplina, a capire perché la si apprende e come la si può applicare. La conoscenza procedurale è la comprensione di come viene eseguito un compito, quali sono gli step da compiere per realizzare un certo obiettivo, e come lavorare e imparare attraverso processi strutturati; essa è particolarmente utile per individuare soluzioni per problemi complessi. Mentre gli studenti sviluppano la loro competenza e imparano all'interno di più domini di conoscenza, fanno esperienza di come poter applicare le loro conoscenze disciplinari e procedurali in un'ottica epistemica e con un approccio interdisciplinare.

Nel corso del tempo, lo sviluppo cognitivo, l'autoconsapevolezza, gli atteggiamenti e le convinzioni, e la capacità di adattare e trasferire l'apprendimento in diversi contesti, possono rafforzarsi a vicenda, sostenendo sia livelli più profondi di comprensione che livelli più alti di competenza tra gli studenti. Le interazioni tra le conoscenze disciplinari, interdisciplinari, *epistemiche e procedurali avvengono in questo contesto, aiutando a collegare e integrare i diversi aspetti della conoscenza con la capacità di ogni discente di adattarsi e applicare ciò che sa a un paesaggio che cambia.*

(OECD, 2019b, p.5, trad.)

Concludendo, in questo paragrafo si è cercato di chiarire il concetto di interdisciplinarità dandone alcune basi teoriche derivate da contributi più o meno recenti, per delineare lo stato dell'arte sull'IdME. Diverse ricerche prendono in esame l'interdisciplinarità in ambito accademico (es. Suazo-Flores et al., 2019), nella formazione degli insegnanti (es. An, 2017) o nella pratica didattica della matematica insieme ad altre discipline: matematica e scienze (es. Furner & Kumar, 2007), matematica e biologia (es. Madlung et al., 2011), matematica e discipline STEM (es. Maas et al., 2019). Questi studi mostrano alcuni risultati positivi derivanti dal contestualizzare l'insegnamento della matematica in attività didattiche che esplorano la relazione tra la matematica ed altre scienze: una maggiore capacità nei docenti di creare lezioni di matematica innovative (An, 2017); un maggiore coinvolgimento degli studenti nell'apprendimento tramite esperienze meno frammentate e più stimolanti, dove sia possibile applicare le proprie conoscenze in una prospettiva più ampia che punti verso l'interpretazione e la risoluzione di problemi del mondo reale (Furner & Kumar, 2007; Madlung et al., 2011); risultati motivazionali, affettivi, di apprendimento e di problem-solving negli studenti, pur se non c'è chiarezza né univocità su come si possano identificare e misurare i risultati conseguiti nell'apprendimento (Williams et al., 2016); e, forse, una maggiore consapevolezza di cosa sia una disciplina e come diverse discipline possono contribuire alla formazione di cittadini attivi, socialmente responsabili e sensibili alle problematiche più attuali (Maas et al., 2019; Williams et al., 2016). Nel lavoro di revisione più recente sull'andamento dell'IdME (Doig et al., 2019), come affermato dagli stessi autori, manca tuttavia una discussione circa la particolare natura disciplinare della matematica e le modalità con cui questa possa arricchire un insegnamento ed un lavoro di tipo interdisciplinare nel senso specificato. Il coinvolgimento della matematica potrebbe tradursi in un utilizzo degli *strumenti* matematici o del linguaggio matematico in quanto funzionali alle scienze o ad altre discipline, banalizzandone il ruolo in confronto alle altre o facendola apparire agli studenti come "meno evidente" o persino "meno potente" (Doig & Williams, 2019, p.230). Comprendere le radici della matematica come disciplina a sé, la mutua relazione con altre discipline nel porre e risolvere problemi, l'evoluzione del curriculum di studi, dei modi di insegnare ed apprendere la matematica consentirebbe invece di caratterizzare, nonché di valorizzare, il ruolo della matematica all'interno del fenomeno dell'interdisciplinarità (Doig & Williams, 2019).

Quanto argomentato fin qui rappresenta il fondamento teorico sul quale è stata progettata, implementata ed analizzata l'indagine sperimentale discussa nei capitoli successivi. Si ribadisce che, in relazione alle domande di ricerca definite per il lavoro di tesi, la teoria della motivazione intrinseca di Deci e Ryan (Ryan & Deci, 1986; Deci & Ryan, 2000) e i quadri teorici, ad essa sottesi, del collaborative teaching dell'interdisciplinarità rappresentano le lenti di analisi degli esiti della ricerca condotta. Il PCK e la TMS si inseriscono qui per caratterizzare, da un punto di vista teorico, la progettazione e l'implementazione delle attività didattiche rivolte ai destinatari della presente ricerca. Il capitolo successivo affronta poi, seppur in parte, la problematica legata alla relazione tra Didattica e Storia della Matematica e, nello specifico, l'uso della Storia nella pratica educativa. Tale scelta è in accordo con l'idea di Cerroni (Cerroni, 2018a; Cerroni, 2018b) sull'uso della Storia come fattore ulteriore motivante per l'apprendimento della matematica, soprattutto nel contesto del laboratorio di matematica che accomuna i Licei Matematici. Tale idea affonda le sue radici nell'operato di Emma Castelnuovo (Castelnuovo, 1963) ed è in accordo con quanto suggerito nei materiali UMI-CIIM del 2003.

La storia della matematica, pur presentando contenuti suoi propri e possibilità di sviluppi su vari fronti (pensiamo soprattutto agli aspetti interdisciplinari con la filosofia, con l'arte e con molte altre discipline), va vista, in questo contesto [il laboratorio di matematica], come un possibile ed efficace strumento di laboratorio [...] adatto a motivare adeguatamente e ad indicare possibili percorsi didattici per l'apprendimento di importanti contenuti matematici.

(UMI-CIIM del 2003, p.27)

CAPITOLO III

La storia dell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie d'Italia: introduzione del laboratorio di matematica e successivi sviluppi

3.1 Introduzione

Il progetto di riforma della Commissione Reale cui Vailati aveva collaborato viene pubblicato nel 1909, anno della morte di Vailati. Poco tempo dopo Guido Castelnuovo (1865-1952), presidente della "Mathesis" e delegato italiano dell'ICMI, invita gli insegnanti a sperimentare all'interno delle scuole i programmi di matematica di Vailati. È a lui che viene di lì a poco affidato l'onere di redigere i nuovi programmi e le relative istruzioni metodologiche. Il progetto di riforma al quale aveva collaborato Vailati è un chiaro segno dell'esigenza di rinnovamento nei programmi di matematica sentita, già alla fine dell'Ottocento, dagli intellettuali e accolta dal mondo politico dell'epoca. Tale esigenza di rinnovamento è imprescindibile dai programmi promulgati dal governo come pure dalle discussioni attorno a questi programmi che hanno interessato la storia della Scuola Secondaria Superiore d'Italia. Prima di parlare dei "nuovi" programmi scolastici e delle "nuove" indicazioni metodologiche affidate alla Commissione Reale è tuttavia doveroso, quanto indispensabile, ripercorrere le tappe storiche che hanno portato a sentire l'esigenza di un rinnovamento nell'ordinamento scolastico come nella pratica didattica, e l'esigenza di un'innovazione nell'insegnamento della matematica. Come ogni cambiamento, tutto nasce da un dissidio interiore, una sorta di battaglia tra le parti di uno stesso essere: la scuola. La scuola che istruisce il neonato popolo italiano; la scuola ai suoi alti gradi d'istruzione che si occupa di ricerca e dialoga frattanto con le università di altri paesi europei; la scuola che deve formare le future generazioni e le future classi dirigenti, uomini e cittadini del loro tempo, parte attiva della comunità sociale e culturale in cui vivono; la scuola che deve stare sempre al passo coi tempi e compiere la sua azione educativa in sinergia con il territorio e con il mondo contemporaneo. A richiedere a gran voce un cambiamento è la scuola stessa, circa vent'anni dopo l'unità d'Italia, ma a "fare" il cambiamento è la politica, nelle persone e negli enti che ascoltano, discutono, si accordano per redigere una riforma, per elaborare un programma. È accaduto allora, accade ancora oggi.

Per comprendere la genesi delle idee che stanno dietro alle varie riforme dell'insegnamento matematico susseguitesi in Italia occorre scavare nel passato, inquadrando la maturazione di queste idee nel contesto delle riforme degli ordinamenti scolastici. Pertanto, l'attenzione viene in questo capitolo riposta nel particolare momento storico che l'Italia vive tra l'Unità d'Italia e la fine del XX secolo, inquadrando il contesto politico, sociale e culturale ed il ruolo della matematica nella scuola italiana di questo periodo. Il capitolo è articolato in diversi paragrafi che consentono di ricostruire la storia dell'educazione matematica e delle principali riforme istituzionali dell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie italiane dall'Unità d'Italia fino ad oggi. Nella trattazione si declinano due aspetti: il primo aspetto è quello normativo, legato all'emanazione delle riforme istituzionali e all'evoluzione dei programmi di matematica in Italia; il secondo aspetto è quello che riguarda l'attuazione di tali provvedimenti nella pratica didattica e la nascita del laboratorio di matematica, ponendo particolare enfasi sull'importanza che quest'ultimo riveste nell'educazione matematica in classe. La scansione dei paragrafi è dettata dalle principali riforme citate e segue, pertanto, l'ordine cronologico delle principali norme approvate. Nel secondo paragrafo si presentano i primi ordinamenti scolastici dell'Italia unita; nel terzo si focalizza l'attenzione sui movimenti di riforma affermatisi, in Italia e in Europa, sul finire dell'Ottocento; con il quarto paragrafo si dedica ampio spazio alla scuola laboratorio proposta da Giovanni Vailati, per l'importanza che rivestono le sue idee a livello istituzionale e perché ad esse si ispira la sperimentazione qui descritta; nel quinto paragrafo si delineano i tratti del Liceo "Moderno" da una proposta di Guido Castelnuovo il quale è incaricato di portare avanti il progetto di riforma iniziato da Vailati e mai concluso a causa della di lui morte prematura; il sesto paragrafo ruota intorno alla Riforma Gentile del 1923 e al cambiamento politico, sociale e filosofico in atto negli anni a ridosso della guerra; i dibattiti e i tentativi di riforma che si susseguono fino agli anni Ottanta sono descritti nel paragrafo settimo; uno sguardo attento è rivolto alle nuove sperimentazioni attuate tra gli anni Ottanta e gli anni Novanta, discusse nel penultimo paragrafo; a conclusione del capitolo, nell'ultimo paragrafo, si fa riferimento alle leggi promulgate nel 2010 con uno sguardo verso gli anni successivi. Ultima sperimentazione (non proposta da alcun governo o ministero ma ricercatori in didattica della matematica, e vengono delineati i tratti della sperimentazione del Liceo Matematico, menzionata precedentemente le radici e le caratteristiche salienti del Liceo Matematico.

3.2 L'istruzione classica e l'istruzione tecnico-scientifica tra l'unità d'Italia e la seconda metà dell'Ottocento

I programmi scolastici, le indicazioni metodologiche provenienti dal Ministero e, più in generale, il quadro istituzionale della scuola italiana dopo l'Unità d'Italia poggiano le loro fondamenta nella Legge Casati[35], elaborata dal ministro Gabrio Casati (1798-1873) e promulgata nel 1859 dal re Vittorio Emanuele II. Tale legge servì inizialmente a riorganizzare l'istruzione pubblica in Lombardia e nel Regno di Sardegna (incluso il Piemonte), per poi essere estesa (non senza difficoltà) anche alle altre regioni italiane dopo l'unificazione dell'Italia (Pepe, 2016). Con la Legge Casati il sistema educativo italiano viene diviso in: primario, secondario, tecnico, normale e superiore (università) (Giacardi & Scoth, 2014). All'istruzione primaria, avente durata quadriennale, faceva seguito un'istruzione secondaria divisa in due livelli, inferiore (ginnasio, di durata quinquennale) e superiore (liceo, avente durata triennale). In subordine al ginnasio-liceo, viene collocata l'istruzione tecnica, suddivisa anch'essa in due livelli, inferiore (scuola tecnica, di durata triennale) e l'istituto tecnico (biennale o triennale). Le scuole normali sono infine destinate ai futuri maestri. Tutti i gradi di istruzione dovevano essere finanziati dai comuni, eccetto i livelli di istruzione secondaria superiore in quanto finanziati totalmente o in parte dal governo. All'insegnamento della matematica nell'istruzione tecnica era comunque riservata «la stessa centralità che nei licei ginnasi spettava alle lingue classiche» (Pepe, 2016, p.358). La Legge Casati stabilisce quindi le caratteristiche principali dell'educazione di stato e avrebbe dominato l'istruzione pubblica in Italia per più di 60 anni

[35] Legge del 13/11/1859 n. 3725. Codice (1870), pp. 78-79 (Pepe, 2016, p.325-364).

(Giacardi & Scoth, 2014). I tratti salienti della Legge sono descritti brevemente dalle parole di Giacardi e Scoth (2014):

> *This legislation, whose distinctive characteristics were the dominant role of the university, centralisation and bureaucratisation, and the concern for educating a ruling class firmly anchored to the values embodied by humanistic culture, would govern public instruction in Italy for more than 60 years.*
>
> *(Giacardi & Scoth, 2014, p.9)*

L'articolo 188 della legge Casati, difatti, recita: «L'Istruzione secondaria ha per fine di ammaestrare i giovani in quegli studi mediante i quali si acquista una cultura letteraria e filosofica che apre l'adito agli studi speciali che menano al conseguimento dei gradi accademici nelle Università dello Stato». (Canestri & Ricuperati, 1976, p.36). Da queste poche righe si evince il ruolo dominante che viene assegnato in conseguenza all'università e la preoccupazione -oltre che l'interesse-, da parte del governo, ad istruire e educare una classe dirigente «saldamente ancorata ai valori incarnati dalla cultura umanistica» [36] (Giacardi & Scoth, 2014, p.9). A tale scopo, la legge Casati prevede un percorso di istruzione secondaria essenzialmente distinto tra classico e tecnico[37]: il primo (dal carattere speculativo) doveva formare le future classi dirigenti e preparare agli studi universitari; il secondo (dal carattere applicativo), invece, doveva dare sbocchi professionali, guardare alle applicazioni e alle professioni future. L'educazione tecnica, come sottolinea Menghini (Menghini, 2016) deve fornire una cultura di carattere generale a quanti andranno ad occupare un posto nei servizi pubblici, nelle industrie, nelle aziende agricole e nel commercio. In particolare, nel 1860 l'istituto tecnico viene organizzato in quattro sezioni: commerciale amministrativa, agronomica, chimica e fisico-matematica (alle quali si aggiungerà la sezione industriale nel 1971). La sezione fisico-matematica non ha carattere professionalizzante: essa deve rafforzare la capacità di ragionare e abbracciare argomenti moderni per preparare ai corsi di Ingegneria. Essa prevede almeno cinque ore alla

[36] Traduzione italiana a cura dell'autrice.

[37] Per ulteriori approfondimenti, si rimanda al lavoro di Roberto Scoth: Scoth, R. (2006). *L'istruzione tecnica in Italia al costituirsi della scuola statale (1859-1877): gli insegnamenti matematici*.

settimana di Matematica, è l'unica a consentire l'accesso agli studi universitari in ambito scientifico e si potrebbe dire che è nata come alternativa scientifica al Ginnasio-Liceo (Menghini, 2016). Pepe (Pepe, 2016) evidenzia come tuttavia gli Istituti Tecnici abbiano avuto «un inizio tormentato», dovuto alla volontà di coniugare le due istanze di formazione generale (per accedere presto al mondo del lavoro) e professionale (per preparare agli studi universitari in ambito scientifico:

> *Mentre però le scuole tecniche si diffusero abbastanza rapidamente nel territorio, costituendo in molti comuni le prime scuole pubbliche dopo le primarie, gli istituti tecnici ebbero un inizio tormentato da due istanze contraddittorie: quella di dare un'ampia preparazione teorica che poteva condurre anche alle facoltà di scienze matematiche fisiche e naturali e poi alle scuole di ingegneria, e quella di fornire competenze professionali già spendibili a 16-18 anni di età.*
>
> *(Pepe, 2016, p.360)*

In accordo con Menghini (Menghini, 2016), gli anni dopo l'unità d'Italia sono caratterizzati dal patriottismo e dal positivismo, nati durante il Risorgimento italiano, che hanno dato un grande impulso allo sviluppo della ricerca scientifica, assegnandole il ruolo centrale che non aveva mai avuto prima (Brigaglia & Masotto, 1982). Nel campo matematico, si ha una ricerca fiorente e l'insegnamento della matematica assume rilevanza a tutti i livelli scolastici. Guardando all'insegnamento della matematica nello specifico, una sua prima caratterizzazione si trova nel decreto[38] emanato nel 1867 dal ministro Michele Coppino (1822-1901), recante istruzioni metodologiche e programmi d'insegnamento ispirati dalle idee di Luigi Cremona (1830-1903), membro della commissione incaricata di redigere i suddetti programmi. Egli è senza dubbio il matematico che fra tutti è stato il più impegnato per la costruzione di un nuovo sistema scolastico in Italia dopo l'unificazione del territorio (Giacardi & Scoth, 2014). Quest'ultimo ritiene che nel Liceo classico la matematica debba essere vista «come un mezzo di coltura intellettuale, come una ginnastica del pensiero» (Giacardi, 2006, p.3) per mezzo della quale aiutare l'allievo nella ricerca della verità, senza scadere in un insieme di proposizioni e teoremi. I contenuti

---

[38] Istruzioni e programmi per l'insegnamento della matematica nei ginnasi e nei licei, in Supplemento alla Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia, Firenze 24 ottobre 1867. Per ulteriori approfondimenti, si rimanda al lavoro: Giacardi, 2006, pp.325-326.

matematici vengono dunque ridotti (le sezioni coniche, i problemi di massimo e di minimo, i limiti, il calcolo combinatorio non trovano più spazio nei programmi di matematica dei licei) pur riservando un elevato numero di ore all'insegnamento della matematica (segno di una considerazione ancora alta dell'insegnamento di questa disciplina). Fondamentale è poi per Cremona il ricorso al metodo euclideo nell'insegnamento della geometria (prova ne è che egli ripristina, nella riforma Coppino del 1867, l'uso degli *Elementi* di Euclide nei licei come manuale di geometria) per abituare gli allievi al rigore del ragionamento. Il ritorno a Euclide si configura come la principale innovazione nei primi anni dell'Italia unita nell'insegnamento secondario (Pepe, 2016). È il ritorno al metodo euclideo che caratterizza dunque i nuovi programmi ed è a partire da questo che Cremona auspica un profondo rinnovamento dell'insegnamento della matematica.

Analogamente, fa notare Giacardi (Giacardi, 2006), anche l'insegnamento dell'aritmetica e dell'algebra deve basarsi, nelle idee di Cremona, sul metodo deduttivo e dimostrativo. Ciò non significa che debba essere necessariamente toccata ogni parte del programma in maniera minuziosa, anzi è sufficiente far conoscere le proposizioni fondamentali, dimostrandole e collegandole l'una con l'altra. L'insegnamento della matematica deve puntare in via prioritaria, secondo Cremona, all'acquisizione di un metodo, appunto, e allo sviluppo dell'attitudine a risolvere problemi, competenze di base per affrontare i successivi studi universitari. Come riferisce Giacardi (Giacardi, 2006), i propositi di Cremona, e soprattutto il ritorno ad Euclide nel metodo e nei manuali, aprono la strada ad un clima di rinnovamento nell'insegnamento della matematica in Italia. Si apre un dibattito sull'uso o meno degli *Elementi*, si focalizza l'attenzione su alcuni aspetti chiave dell'insegnamento della geometria (ad esempio, l'esigenza di approfondire il problema dei fondamenti); vengono pubblicati diversi manuali di geometria di alto livello che finiscono per influenzare il dibattito sul metodo e sull'insegnamento della matematica. In particolare, da uno studio di Menghini (Menghini, 2010) è emerso che l'insegnamento della geometria non era previsto nei programmi del ginnasio fino a che nel 1881 non fa capolino la geometria intuitiva, con un approccio intuitivo-sperimentale atto a superare le difficoltà degli studenti nell'affrontare la geometria razionale. Il corso di geometria intuitiva, introdotto nel primo triennio medio, fu tuttavia male interpretato ed ebbe vita breve. Dopo tre anni, viene abolito lo studio della geometria intuitiva per poi essere reinserita nei programmi dei primi anni del ginnasio come approfondimento delle nozioni di base acquisite nella scuola elementare (es. i nomi assegnati alle forme geometriche, le regole per calcolare lunghezze, aree e volumi dei poligoni principali), perseguito con un approccio pratico.

Dal 1900 iniziano a comparire i primi libri di geometria intuitiva nei quali, ad esempio, il punto viene in essi pensato come un granello di sabbia, il piano come una pagina di un libro. In essi trovano spazio, per la prima volta, le isometrie, considerate uno strumento compatibile per introdurre una geometria intuitiva (Menghini, 2016). Secondo Giacardi (Giacardi, 2006) il manuale *Elementi di geometria, ad uso delle scuole secondarie superiori*, scritto da Federico Enriques e Ugo Amaldi (1875-1957) e pubblicato nel 1903, è quello che tiene conto in misura maggiore degli aspetti didattici coniugando il rigore del metodo induttivo (a partire da osservazioni, si enunciano dei postulati e da essi si ricavano dei teoremi) con l'intuizione di alcune affermazioni o spiegazioni.

3.3 I primi movimenti di riforma dell'insegnamento in Europa e in Italia alla fine dell'Ottocento

Tra la fine dell'Ottocento e i primi del Novecento si ha un importante sviluppo della ricerca scientifica e alcuni dei matematici più attivi nella ricerca si impegnano nella stesura dei manuali scolastici di alto valore scientifico. Il loro impegno è proficuo anche sul fronte politico, per l'elaborazione di una legislazione scolastica che rispondesse ai cambiamenti politici e sociali, e sul fronte della formazione degli insegnanti (ad esempio, nel 1895 a Torino un gruppo di insegnanti delle scuole medie fondano l'associazione "Mathesis", nata allo scopo di formare gli insegnanti sul piano scientifico e sul piano didattico favorendo un miglioramento della scuola). Nonostante l'impegno e le iniziative promosse dai tanti insegnanti e, fra questi, dai matematici in particolar modo, alla fine dell'Ottocento non si registra ancora l'auspicato miglioramento della qualità dell'insegnamento. In aggiunta, dai provvedimenti emanati nell'ultimo ventennio del XIX secolo si denota una crescente svalutazione dell'importanza assegnata alla matematica, per la ristrettezza dei contenuti trattati a scuola e per il ridotto numero di ore scolastiche ad essa dedicate. Mentre in Europa si affermano movimenti di riforma, l'Italia stenta ancora a stare al passo coi tempi. Basti pensare alle iniziative promosse da Felix Klein in Germania per riformare l'insegnamento della matematica e puntare un faro sulla formazione degli insegnanti, con la speranza di favorire l'adozione di approcci didattici meno astratti, più applicativi e che si avvalgano dell'aspetto storico della disciplina, e di promuovere i collegamenti tra la matematica e le altre discipline scientifiche. In Italia, invece, un decreto del ministro Bonghi del 1875 (ripreso, in termini simili dal ministro Baccelli nel 1899) consente addirittura di terminare il Liceo senza essere promossi in Matematica o, in via alternativa, in Greco. Nel 1904 il ministro Orlando concede persino l'opportunità di scegliere, negli ultimi due anni del Liceo Classico, tra il Greco e la Matematica, per venire incontro a quanti fossero «incapaci per predestinazione» nell'una o nell'altra disciplina[39].

La reazione dei matematici a tali decisioni, che sono in netto contrasto con i valori del Liceo stesso, era pressoché prevedibile ma fa volgere lo sguardo verso un moderno liceo. L'esame comparativo delle ore e dei programmi scolastici nel liceo classico italiano rispetto a quelli delle scuole europee, promosso nel 1887 dal Ministero della Pubblica Istruzione[40], fa emergere vari difetti dell'indirizzo classico rispetto alle scuole della vicina Germania; tra essi vale la pena sottolineare l'adozione di un metodo didattico del tutto razionale, che lascia poco spazio alle applicazioni della matematica (Giacardi, 2006).

L'aria di rinnovamento che si inizia a sentire in Italia ha bisogno di un nuovo respiro, un nuovo alito di vita. Molti italiani attivi nella ricerca e interessati alle problematiche scolastiche scelgono infatti come meta dei propri viaggi formativi le università dove insegna Klein. Da lui traggono impulso Corrado Segre (1863-1924), Gino Fano (1871-1952), Gino Loria (1862-1954), Federico Enriques, Giuseppe Veronese (1854-1917), Francesco Saveri (1879-1961) e Guido Castelnuovo per la scelta delle tematiche di

---

[39] R. Decreto che approva gli orari e i programmi per l'insegnamento del greco e della matematica nel ginnasio e nel liceo, «Bollettino Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica», XXXI, II.52, Roma 29 dicembre 1904, p. 2851 e art. 3 a p. 2856 (Giacardi, 2006, p.18).

[40] *Esame comparativo dei programmi nelle scuole secondarie classiche*, «Bollettino Ufficiale dell'Istruzione», Ottobre 1887, XIII, pp. 193-241 (Giacardi, 2006, p.17).

ricerca ma anche per il modo di concepire l'insegnamento della matematica. Ad esempio, Castelnuovo ritiene, come Klein, che la matematica debba essere insegnata insieme alla fisica, per dare espressione a quel confronto costante tra astratto e concreto che sta alla base della matematica (Menghini, 2010). In Italia apprezza la visione metodologica e didattica di Klein anche Rodolfo Bettazzi (1861-1941), fondatore dell'Associazione "Mathesis". In quanto membro della scuola di logica matematica di Giuseppe Peano (1858-1932), è un convinto sostenitore del rigore logico, necessario per avere un'esposizione semplice e chiara. Afferma Giacardi (GIacardi, 2006) che Bettazzi, come Klein, ritiene utile l'uso dell'intuizione e della pratica nell'insegnamento della matematica; egli sottolinea l'importanza di dare spazio alle applicazioni della disciplina e l'utilità di mettere in evidenza i legami tra la matematica e le altre scienze (fisica, geodesia, topografia solo per citarne alcune) come anche i legami tra la matematica e la realtà. È tuttavia a Giovanni Vailati, anch'egli membro della scuola di Peano, che si deve un primo concreto progetto di riforma dei programmi scolastici: una prima proposta concreta, dopo tanto discutere, con la quale Vailati intende attuare, seppur in parte, gli insegnamenti di Klein.

3.4 La scuola-laboratorio di Giovanni Vailati e le prime proposte di rinnovamento

Il primo passo verso un rinnovamento dell'insegnamento della matematica in Italia si ha solo nel 1905 con l'istituzione della *Commissione Reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia*. La commissione, composta da insegnanti di scuola media, professori universitari e ispettori universitari, viene istituita allo scopo di indagare gli aspetti strutturali ed amministrativi, i contenuti, i metodi, la preparazione degli allievi in uscita dalle scuole secondarie, per poi proporre le modifiche in risposta alle criticità rilevate e all'esigenza di rinnovamento che ai primi del Novecento si sente come urgente e necessaria. L'indagine apre un acceso dibattito circa l'unificazione delle scuole medie inferiori, i possibili indirizzi di studio superiore e il valore formativo delle scienze. Nonostante i dissidi interni alla commissione stessa, nel 1908 quest'ultima presenta un disegno di legge nel quale si propone una scuola media triennale unica (senza il latino) che dia accesso ai tre rami del liceo: classico (con latino e greco), scientifico (con due lingue moderne e potenziamento della sezione scientifica) e moderno (con latino e due lingue straniere). In aggiunta, propone una scuola tecnica professionale di tre anni – alternativa alla scuola media unica - con accesso all'istituto tecnico.

Per quanto concerne i programmi di matematica e le relative indicazioni metodologiche, essi vengono redatti da Giovanni Vailati: in essi Vailati fa confluire le istanze positivistiche, l'esigenza di democratizzare la cultura, la visione del sapere come unitario e il valore formativo della matematica (Giacardi, 2006). Le sue riflessioni, come afferma Giacardi (Giacardi, 2006), partono dalle criticità rilevate nelle scuole secondarie in Italia: un apprendimento «passivo» e mnemomico, uno spazio troppo ampio dedicato all'insegnamento della lingua e della letteratura italiana, la mancanza di laboratori, le classi troppo numerose (Giacardi, 2006, p.32). Nella visione di Vailati, invece, l'insegnamento della matematica deve avere un'impostazione più sperimentale che mnemonica, più operativa che descrittiva, più concreta che astratta, partendo dall'assunto che il processo di apprendimento procede proprio dal concreto verso l'astratto. L'allievo deve poter scoprire le verità matematiche da solo, pur se con la guida attenta dell'insegnante che pone interrogativi e lo fa riflettere.

La scuola-laboratorio da lui auspicata, descritta ampiamente nel capitolo precedente, si fonda proprio su queste considerazioni e su alcuni aspetti metodologici oggi tornati oggetto di studio (Capone et al., 2017; Cerroni, 2018a; Colella, 2016): far percepire agli allievi l'unitarietà del sapere (ad esempio, proponendo loro di affrontare un problema con differenti metodi); bilanciare il rigore e l'intuizione; creare un rapporto continuo tra matematica e realtà; usare la Storia della Matematica per promuovere un dialogo costante tra le discipline, rendere l'azione didattica più efficace ed evitare ogni dogmatismo. Coerentemente con quanto finora detto, la riforma di Vailati prevede l'introduzione dei concetti di funzione e di derivata in ogni liceo, proprio per l'importanza rivestita da tali concetti se applicati alle altre scienze; nel liceo moderno (in preparazione agli studi economici o sociali) inserisce il calcolo delle probabilità e la rappresentazione di dati statistici; nel liceo classico dà ampio spazio allo studio della geometria euclidea, prevedendo letture di opere classiche di geometria per rendere più ampia la visione della civiltà antica, solitamente considerata in arte ed in letteratura. La commissione concorda con Vailati circa l'impostazione metodologica data ai programmi di matematica nei licei e l'introduzione di concetti (funzione, derivata) che ben si prestano alle applicazioni della matematica ad altre scienze.

3.5 Verso un Liceo Moderno

La riforma elaborata dalla Commissione Reale, discussa nel capitolo precedente e qui ripresa, in realtà non è mai stata approvata. Le proposte di Vailati vengono attuate solo in parte nel 1911 con la creazione del Liceo moderno. Esso, nella sua formulazione originaria, differiva dal Liceo classico in quanto prevedeva l'insegnamento di una lingua moderna (tedesco o inglese) anziché il greco e dava più valore alle discipline scientifiche, tra le quali la matematica.

Alla stesura dei programmi e delle istruzioni del Liceo moderno si dedica Guido Castelnuovo, figura di spicco ricordata nel capitolo precedente. Come Vailati, anche Castelnuovo ritiene che l'insegnamento della matematica in Italia sia troppo teorico, astratto, e che ciò alimenti una visione distorta della cultura (Giacardi, 2006). Egli afferma, difatti, l'importanza delle attività sperimentali e delle applicazioni per «mettere in luce il valore della scienza» ed il ruolo ricoperto dalla matematica nella società moderna: così facendo, l'allievo «troverà nella matematica [...] una raccolta di metodi e risultati che hanno facili applicazioni in problemi concreti» (Castelnuovo, 1919). Inoltre, raccomanda agli insegnanti di puntualizzare come concetti matematici come quello di funzione siano legati allo sviluppo delle scienze sperimentali (che hanno influenzato lo sviluppo della matematica stessa); di tener conto del processo storico che ha condotto alle risoluzioni di alcuni problemi e, prima ancora, a porre quegli stessi problemi; di mettere in relazione l'insegnamento della matematica e della fisica, usando un approccio sperimentale e induttivo oltre che deduttivo (il riferimento è qui all'introduzione del concetto di funzione e del calcolo infinitesimale); di ricorrere alla storia della scienza per far comprendere agli allievi che ogni teoria è effimera, relativa, non di certo immutabile nel tempo (Castelnuovo, 1907).

Tra il 1914 ed il 1915 i nuovi programmi iniziano ad essere applicati, pur incontrando alcune difficoltà dovute sia alla carenza di fondi e di strutture adeguate, sia alla preparazione degli insegnanti. Negli stessi anni, l'associazione "Mathesis" propone di apportare delle modifiche anche ai programmi degli Istituti Tecnici, tra le quali dare più importanza alle applicazioni della matematica alla fisica ed introdurre i concetti di limite, derivata ed integrale ripercorrendo le tappe storiche che hanno portato alla nascita e all'evolversi di quei concetti. In linea con le proposte di "Mathesis", la Commissione Reale suggerisce alcune modifiche da apportare ai programmi degli Istituti Tecnici: introdurre le nozioni basilari del calcolo descrivendo il processo storico e il legame con le altre scienze; usare le derivate nei problemi di massimo ed usare gli integrali nel calcolo di aree e volumi per risolvere problemi che avrebbero richiesto il ricorso a trasformazioni algebriche (Menghini, 2016). Secondo Menghini (Menghini, 2016), si tratta dell'espressione più alta del ruolo della matematica nella scuola italiana. Nel 1918 il Ministero della Pubblica Istruzione propone una riorganizzazione dei curricula nelle scuole secondarie (Ministero della Pubblica Istruzione, 1918). Tuttavia, i programmi non sono stati (ufficialmente) adottati: questi sono, infatti, gli anni in cui l'Italia è coinvolta nei combattimenti della Prima guerra mondiale.

Le discussioni per riformare la scuola secondaria riprendono dopo la fine della guerra e anche in questo preciso momento storico si eleva la voce della "Mathesis", guidata dal neopresidente Federico Enriques. Matematico di spicco e figura erudita, Enriques promuove un *insegnamento dinamico* della matematica che sia più pratico (considerando lo sviluppo industriale della società dell'epoca), che debba educare i giovani alla scoperta, favorire una visione unitaria del sapere collegando la matematica con altri rami della conoscenza (psicologia, fisica, storia, filosofia, biologia), e da cui possa emergere il valore formativo della matematica (Enriques, 1921). La sua visione dell'insegnamento si collega in qualche modo all'insegnamento della matematica nelle province ex-austriache di Trento e Trieste, ora annesse all'Italia: nelle loro scuole, infatti, si dava più spazio alle applicazioni delle teorie studiate in matematica alle altre scienze, alla dimensione sperimentale (mentre nelle scuole italiane vi è una maggiore tendenza all'astrazione) e, come diretta conseguenza, emergeva il forte legame tra gli sviluppi della matematica e i recenti sviluppi della scienza.

I suggerimenti proposti da "Mathesis" al Ministero della Pubblica Istruzione vengono parzialmente accolti e raccolti in una bozza di decreto. Tuttavia, il quadro storico è destinato a mutare in tutt'altra direzione.

3.6 La riforma Gentile (e l'egemonia della cultura umanistica)

Nel 1922, con la ben nota marcia su Roma, Mussolini accentra nella propria persona tutti i poteri e, divenuto capo del governo, dà inizio alla dittatura fascista. Con la Riforma Gentile[41] del 1923, il filosofo neoidealista e Ministro della Pubblica Istruzione Giovanni Gentile (1875-1944) modifica l'assetto dell'istruzione secondaria secondo gli stessi principi di Casati. La riforma conferisce molto più spazio al Liceo Classico e, più in generale, alla formazione umanistica, alla cultura classica, ritenuta l'unico mezzo per istruire le future classi dirigenti fasciste.

Gli argomenti scientifici non vengono considerati per il loro valore cognitivo, piuttosto vengono confinati alla sfera dell'utile, del funzionale allo svolgimento di qualche professione; la figura del docente di matematica perde presto il suo prestigio in favore del docente nelle discipline umanistiche (Furinghetti, 1998). I percorsi di istruzione secondaria vengono distinti in due sole tipologie: quella tecnico-scientifica (degli Istituti Tecnici), volta a preparare all'esercizio di alcune professioni, e quella classico-umanistica (dei Licei), predominante sulla prima. La sezione fisico-matematica è soppressa e il Liceo moderno viene cancellato per lasciare lo spazio ad un Liceo Scientifico dove vengono accorpati gli insegnamenti di matematica e fisica (senza ampliare il numero di ore prima destinate alla sola matematica). Il Liceo Scientifico è rivolto ai giovani che aspirano agli studi universitari nelle facoltà di Scienze e di Medicina e Chirurgia. Viene istituito anche un Liceo femminile, privo di qualsiasi insegnamento scientifico e da cui non si poteva accedere agli studi universitari. Viene istituito un esame di stato al termine di ogni ciclo di

[41] R. D. 6/5/1923, n. 1054: Ordinamento della istruzione media e dei convitti nazionali. Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia n. 129 del 2/6/1923.

studi che, nel Liceo classico, costituiva un vero e proprio esame di ammissione all'università.

Quanto all'insegnamento della matematica nel Liceo Scientifico, con la riforma si assegnano cinque ore al primo anno, tre ore negli anni dal secondo al quarto. Gli argomenti di matematica vengono qui suddivisi in due parti distinte (Giacardi, 2006). Una prima parte, "algoritmica", per la quale è sufficiente saper risolvere degli esercizi, o meglio, applicare in via diretta i teoremi e le formule. Una seconda parte, "teorica", per la quale è richiesto di saper indicare l'articolazione logica dei teoremi ed illustrarne le dimostrazioni. Di conseguenza, gli algoritmi, che sono definiti mediante successioni aritmetiche e geometriche, si ritrovano nella prima parte per risolvere quei problemi che richiedono l'impiego delle tavole logaritmiche. Le equazioni esponenziali, piuttosto che essere presentate come applicazione dei logaritmi, vengono presentate nella parte teorica, assieme ai numeri reali; in questo c'è una sostanziale differenza con il Liceo Moderno in cui venivano prima introdotte le potenze ad esponente reale, poi le equazioni esponenziali e solo alla fine i logaritmi quale "strumento" utile a risolvere le equazioni esponenziali. Qualche analogia si riscontra con la sezione fisico-matematica nella quale i logaritmi venivano definiti a partire dalle successioni ma applicate solo al calcolo dell'interesse semplice e composto. Tra gli argomenti algoritmici vengono annoverati anche i triangoli sferici e la trigonometria, in quanto applicati alla navigazione, senza alcun riferimento alle ragioni – di natura teorica o applicativa - su cui si basa la loro presenza nei programmi. Viene lasciato molto più spazio all'aritmetica, limitandola ai soli numeri naturali, rendendo opzionale l'introduzione della funzione di Eulero, del teorema di Fermat e persino dei numeri reali (questi ultimi introdotti a partire dalle operazioni che su di essi si possono eseguire).

Nel Liceo Classico si ritrova un'impostazione similare, con una distinzione tra una parte algoritmica - che richiede la mera applicazione di formule, specialmente in algebra – ed una parte teorica – essenzialmente, si tratta di teorie da esporre e dimostrare, specialmente in geometria Euclidea. Gli argomenti sono, complessivamente, analoghi al Liceo scientifico ma più ridotti; fa eccezione il calcolo infinitesimale che non è contemplato nel Liceo classico. I sistemi lineari di equazioni e la geometria Euclidea piana vengono trattati nel Ginnasio, in quanto preparatori al Liceo scientifico e all'Istituto Tecnico. Negli Istituti Tecnici i programmi sono molto simili a quelli del Liceo Classico, tranne per il fatto che manca la trigonometria e che l'insegnamento della matematica è presente solo nei primi due anni del corso. Le Scuole Normali, istituite con la legge Casati per preparare i futuri maestri delle elementari, vengono sostituite dall'Istituto Magistrale nel quale il programma di matematica non coincide con quello delle Scuole Elementari (com'era invece nella formulazione originaria delle Scuole Normali) ma è perlopiù quello del Liceo classico.

In questo quadro cangiante risulta complessa una collaborazione tra il Ministero e i matematici di "Mathesis" i quali hanno pareri discordanti con Gentile (Menghini, 2016). Le richieste di Enriques, a nome del direttivo di "Mathesis", volte a contrastare lo scarso spazio orario riservato all'insegnamento della matematica nei vari percorsi di studi ed il ridotto valore formativo ad essa attribuito, non vengono accolte e nell'autunno del 1923 vengono approvati gli orari ed i programmi per le scuole medie, di fatto, secondo le idee pedagogiche e filosofiche elaborate da Gentile. In altre parole, la Riforma Gentile rende le cosiddette discipline umanistiche l'asse culturale della nazione e, principalmente, della scuola (Giacardi, 2006). Ciò è particolarmente evidente già dalle *Avvertenze* annesse ai programmi del ginnasio-liceo:

> *Il Liceo-Ginnasio dev'essere un istituto di cultura umanistico storica: prepara agli alti uffici della vita civile, alle professioni libere, alla vita politica, prepara da lontano, preparando l'uomo: l'uomo morale, che è a suo posto nella Storia, e perciò, sa il travaglio faticoso dell'umanità dalla spelonca in cui visse selvaggio a quella civiltà che non consiste nei perfezionamenti tecnici così appariscenti nella nostra vita moderna, fino al punto da apparire fini e non mezzi, ma consiste nella più profonda comunione di animi, nel più profondo senso della libertà e del dovere umano, nella più profonda coscienza della propria personalità.*[42]

Collaboratore del ministro Gentile nell'elaborazione dei programmi di matematica è Gaetano Scorza (1876 – 1939), membro attivo di "Mathesis" e personaggio certamente

---

[42] Orari e programmi per le regie scuole medie, «Bollettino Ufficiale del Ministero dell'istruzione pubblica», 17 Novembre 1923, 50, II, pp. 4413-4510, a p. 4435 (Giacardi, 2006, p.59).

meno “scomodo” rispetto a Castelnuovo. Egli, pur affermando il valore della matematica sul piano formativo, etico ed estetico, pur sostenendo l’importanza di un insegnamento della matematica che sia attivo e non dogmatico, che promuova lo sviluppo del senso critico e della creatività, si era lasciato condizionare fortemente dal contesto generale della riforma (Giacardi, 2006). È fuor di dubbio che hanno giocato un ruolo importante le nuove correnti politiche (sono questi gli anni di ascesa del nazifascismo) e filosofiche (il Neoidealismo o Neohegelismo italiano, ispirato agli ideali del bello e dell’assoluto), emerse a discapito della cultura positivistica e liberal-democratica che aveva invece segnato la seconda metà dell’Ottocento e i primi decenni del Novecento.

Le critiche alla riforma arrivano presto da più parti: da “Mathesis”, come già detto, ma anche da varie associazioni scientifiche (UMI-CIIM [43]), da alcune università, dall’Accademia dei Lincei e anche da parte di singoli illustri scienziati. Le ragioni sono molteplici e vanno dalla prevalenza degli studi filosofici nei licei al ridotto numero di ore dedicate alla matematica nei licei scientifici (cinque ore settimanali nelle classi prime, tre ore settimanale nelle tre classi successive, a fronte delle quattro ore dedicate settimanalmente all’insegnamento del latino), dalla mancata attenzione per la formazione degli insegnanti (con particolare riguardo alla mancata preparazione scientifica dei futuri insegnanti usciti dagli istituti superiori di magistero, equiparati alle università ed aperte anche ai maschi nel marzo 1923) agli abbinamenti tra discipline (matematica e fisica, pure storia e filosofia, per fare qualche esempio, dovevano essere insegnati dallo stesso docente) che rischiano di allontanare in misura maggiore le diverse scienze. Non ultime, vi sono ragioni, o meglio, preoccupazioni di natura politica nei confronti del fascismo in ascesa.

Nonostante le critiche e le preoccupazioni avvertite da più parti, lo squilibrio tra la formazione scientifica e quella classico-umanistica, che era nato già nel 1859 con la legge

---

[43] UMI è l’acronimo di “Unione Matematica Italiana”. CIIM è l’acronimo di “Commissione Italiana per l’Insegnamento della Matematica”. Si tratta di una Commissione permanente consultiva, istituita in seno all’UMI con il compito di esaminare i problemi riguardanti l’insegnamento matematico in Italia, a tutti i livelli, volgendo lo sguardo anche agli studi e alle esperienze di altri Paesi, ed eventualmente proporre alla Commissione Scientifica (CS) dell’UMI possibili soluzioni. Per approfondimenti, si veda il sito https://umi.dm.unibo.it/.

Casati, trova il suo consolidamento nella riforma Gentile del 1923 ed è destinato a continuare fino alla fine del Novecento.

3.7 Le riforme successive al 1923, fino agli anni Ottanta

Il Fascismo, che in Italia ha già preso potere non solo in campo politico, ma anche (come diretta conseguenza del regime di dittatura) nel campo dell'informazione, della cultura, mostra un certo interesse per la cultura tecnica e scientifica. Questo fa sì che, una volta che Gentile è uscito dal governo, vengano modificati i programmi riprendendo in esame quelli del 1918. Nel 1925 si introduce nel Liceo Scientifico lo studio delle coordinate cartesiane e le rappresentazioni grafiche delle funzioni. Le nozioni di calcolo infinitesimale sono presentate in relazione al loro significato fisico e geometrico e così è anche per lo studio delle funzioni. Infatti, prima di studiarne i limiti agli estremi del dominio o le derivate, si lascia spazio all'interpretazione fisica e meccanica di alcune funzioni elementari. Le equazioni esponenziali sono presentate in correlazione con i logaritmi, la costruzione dei numeri reali con le proporzioni tra grandezze geometriche (Menghini, 2016). È il 1936 quando viene modificata la struttura dei programmi di matematica, pur non alterando in maniera considerevole i contenuti. Innanzitutto, viene superata, almeno in via ufficiale, la precedente distinzione tra parte teorica e parte algoritmica, l'*incipit* della riforma Gentile (per quel che riguarda l'insegnamento della matematica, naturalmente), e vengono suddivisi i contenuti da trattare anno per anno. Al primo anno, vengono introdotti i numeri reali, non geometricamente ma come numeri decimali, per far sì che la geometria analitica possa essere trattata prima di affrontare le proporzioni tra grandezze (e, quindi, prima della geometria euclidea). Nell'ottica di presentare dei contenuti "pratici", fanno ora parte dei programmi di matematica anche gli elementi di probabilità. Nel 1937 si fa chiarezza anche sugli argomenti dell'esame finale da sostenere al termine della scuola superiore, la maggioranza dei quali riguarda la geometria.

Nel 1940, con la riforma Bottai[44], sembra aprirsi una nuova strada per il futuro della scuola secondaria in Italia: i corsi inferiori del Ginnasio e degli Istituti Magistrali e la Scuola Tecnica vengono "assorbiti" dalla Scuola Media, di durata triennale. A tale unificazione fa seguito l'istituzione di un corso di algebra nella terza classe, per dare qualche strumento utile anche a coloro che avrebbero lasciato la scuola dopo quei tre anni (Castelnuovo, 1963). I contenuti dei programmi sono pressocché invariati ma va rilevato come nei programmi allegati al decreto si esprima per la prima volta la necessità di arricchire le lezioni di matematica con riferimenti di carattere storico[45]. Una commissione nominata dai governi alleati e coordinata dal pedagogista americano Carleton Washburne[46] (1889-1968) viene istituita con il preciso scopo di compiere una revisione dei libri di testo e di formulare dei nuovi programmi per la scuola media e per i licei italiani, adottati solo a partire dal 1945/46 (Ciarrapico & Berni, 2017; Menghini, 2016; Ciarrapico, 2002). Tuttavia, nel 1944 vengono riconfermati in larga misura i programmi del 1936, con ben poche modifiche: le progressioni vengono annoverate tra i contenuti "suggeriti", mentre la distanza tra rette sghembe, la geometria sferica e la probabilità vengono invece escluse. Solo in alcune edizioni si trovano, nelle premesse, alcune indicazioni di carattere metodologico, come il dare spazio all'intuizione, all'origine psicologica e storica dei concetti, alla realtà fisica; in esse si intravvede per la prima volta un interesse per la dimensione psicologica dell'apprendimento negli alunni.

Nel 1945, la matematica acquisisce una certa dignità, nonostante l'insegnamento della matematica alla Scuola Media assuma nuovamente un carattere prevalentemente

---

44 R.D. n.899/01.07.1940. Per ulteriori approfondimenti, si rimanda a: Ciarrapico & Berni, 2017, pp.13-16.

45 Per ulteriori approfondimenti, si rimanda a: Ciarrapico & Berni, 2017, pp.15-16.

46 Washburne, discepolo della scuola di John Dewey, è un convinto sostenitore del metodo attivo che aveva già dato buoni frutti nell'educazione scolastica in America. I principi alla base dell'attivismo pedagogico consistono nell'imparare a leggere e scrivere la lingua parlata, ma anche la storia, la geografia, le scienze di base; si aggiungono ad essi la valorizzazione delle caratteristiche singolari di ogni persona, la salute fisica, psichica ed emotiva degli allievi e il soddisfacimento dei bisogni primari. La base pedagogica, improntata all'attivismo e al pragmatismo, dei nuovi programmi e indicazioni metodologiche si evince in modo chiaro nelle indicazioni metodologiche per l'insegnamento della matematica nelle quali si fa ampio riferimento al *gioco* e al *lavoro* quali strumenti per un apprendimento efficace (Ciarrapico & Berni, 2017).

pratico o sperimentale ed il riferimento alle radici storiche di teorie e concetti matematici sia solo opzionale. Viene stabilita la durata di tre anni per la scuola media, cinque anni per la scuola secondaria superiore, ma i contenuti dei programmi rimangono sostanzialmente gli stessi della Riforma Gentile. La metodologia ha ancora, nell'immaginario e nella pratica didattica dei docenti, i tratti di una sequenza rigida di passi: spiegazione dei contenuti prima; applicazione e interrogazione dopo, senza lasciare spazio all'analisi critica, alla rielaborazione dei contenuti, alla scoperta delle verità matematiche come invece sperava in cuor suo Vailati (Ciarrapico, 2002). Nel decennio tra il 1950 e il 1960 persiste la dicotomia tra cultura umanistica e scientifica che caratterizza la scuola di Gentile, pur se in Italia e in altri Paesi europei si avverte l'esigenza di migliorare lo studio della matematica (e, più in generale, delle scienze) a sostegno del progresso economico e tecnologico che in questi anni è in forte ascesa (Ciarrapico & Berni, 2017). Nel 1952 viene istituita un'ulteriore commissione (*Consulta didattica*) per riformare la scuola italiana e da questa emergono alcune interessanti proposte. Si tratta di proposte che non vedranno mai la luce ma che contengono il germe delle riforme di fine secolo. In riferimento all'insegnamento della geometria nelle classi liceali, ad esempio, si consiglia di affrontare uno studio razionale della geometria negli ultimi anni, partendo invece da proprietà evidenti, per introdurre gradualmente gli studenti al processo dimostrativo e prestando attenzione alla rielaborazione storico-critica di alcuni argomenti quando gli studenti avranno raggiunto una maggiore maturità intellettuale (Ciarrapico, 2002).

Nonostante un certo carattere di modernità, le proposte di cui sopra conferivano alla matematica un ruolo puramente formativo nei licei, un ruolo strumentale e di supporto alle discipline professionali negli Istituti Tecnici; probabilmente è proprio questa la ragione per cui non vengono accolte favorevolmente da molti accademici e docenti di matematica (Ciarrapico, 2002). In questo periodo prendono forma alcuni movimenti di riforma dell'insegnamento della matematica in Europa, movimenti che porteranno nazioni diverse a cooperare per cambiare il volto della scuola e sviluppare nuovi programmi. Una prima conferenza sul tema "Le nuove matematiche" viene organizzata in una città nei pressi di Parigi nel 1958, con rappresentanti del comparto scuola e del comparto università di ogni nazione, allo scopo di indagare le attuali forme di insegnamento della matematica negli stati europei e studiare se, ed eventualmente come, inserire i recenti sviluppi della disciplina nei programmi scolastici (ove invece l'algebra classica e la geometria euclidea dominano indisturbate da secoli e secoli). Nel 1960 segue una conferenza a Dubrovnik, in Danimarca, dalla quale emerge una proposta di stampo prettamente burbakista[47] secondo la quale l'insegnamento della geometria euclidea sarebbe inattuale, superato. Un'apposita commissione viene istituita anche in questa occasione, con lo scopo di ammodernare l'insegnamento della matematica senza per questo escludere del tutto la geometria euclidea. I programmi proposti da quest'ultima commissione si fondano sul ruolo centrale della teoria degli insiemi e del concetto di vettore, capisaldi della matematica, che sarebbe possibile introdurre già a partire dal ciclo medio (Ciarrapico, 2002). Nel ciclo di studi superiore andrebbero presentate in modo formale le diverse strutture algebriche (gruppo, anello, corpo e spazio vettoriale) ed i gruppi di trasformazione (per mezzo dei quali classificare le proprietà delle figure geometriche). La suddetta conferenza stimola profondi mutamenti in Europa e apre la strada, nella comunità matematica italiana, ad ulteriori proposte di rinnovamento dell'insegnamento matematico nella scuola secondaria, discusse in occasione di alcuni convegni. Il primo, promosso da UMI-CIIM, si tiene a Bologna nel 1961 allo scopo di accogliere proposte per aggiornare l'insegnamento matematico nella scuola secondaria tenendo ben presente l'unitarietà della scienza e il necessario aggiornamento dell'editoria di settore (Ciarrapico, 2002); il secondo è la conferenza[48] ICMI tenutasi a Bologna nel 1961. In Italia, il Ministero istituisce delle "classi pilota" nelle quali sperimentare un insegnamento moderno della matematica. Contestualmente, i docenti delle suddette classi avrebbero ripreso e approfondito i contenuti afferenti all'algebra astratta, alla struttura logica della geometria e alla matematica applicata. Vengono organizzati incontri tra la CIIM, una sottocommissione dell'UMI e il Ministero. L'intento

---

[47] Nicolas Bourbaki è lo pseudonimo collettivo sotto il quale lavora, dai primi anni Trenta, un gruppo di matematici, perlopiù francesi e belgi. Il movimento bourbakista, sviluppatosi a livello internazionale, propone di fondare tutta la matematica sulla teoria degli insiemi e sulle strutture matematiche (algebriche, topologiche, d'ordine). Nella loro concezione della matematica, l'unico metodo da attuare è quello assiomatico; l'intuizione geometrica andrebbe dunque accantonata e la geometria si ridurrebbe ad algebra astratta. Per ulteriori approfondimenti, si rimanda a: Ciarrapico & Berni, 2017, pp.41-44.

[48] Per ulteriori approfondimenti, si rimanda a: Ciarrapico & Berni, 2017, pp.47-50.

principe è quello di stabilire un unico programma per i primi di due anni di scuola superiore, comune a tutti gli indirizzi di studio, per dare espressione alle nuove esigenze didattiche e scientifiche. Dopo la crisi dei fondamenti, difatti, la geometria aveva ceduto il passo alla teoria degli insiemi, considerato elemento unificatore delle matematiche. L'insegnamento della geometria non si era comunque distaccato dall'impostazione euclidea: le proporzioni e le grandezze geometriche caratterizzano ancora gli studi dei primi anni nelle scuole superiori, mentre gli ultimi anni vengono riservati alla teoria della misura. Le classi pilota riescono, ad ogni modo, a stimolare le ricerche negli ambienti scolastici e accademici ma, nonostante i buoni propositi, non rappresentano il cambiamento tanto atteso. Una riforma importante, andata in porto in questi anni, è quella che ha condotto all'unificazione del ciclo medio e all'istituzione di una Scuola Media unica[49] nel 1962, unificazione resa necessaria dalla realtà sociale dell'epoca (Ciarrapico & Berni, 2017). Tra il 1966 e il 1967 si svolgono due convegni dell'UMI-CIIM, a Frascati, dai quali emerge la proposta finale di un programma unitario per i primi due anni di Liceo, centrato sull'algebra e sulla geometria; al triennio vengono aggiunti argomenti nuovi (come il piano vettoriale geometrico, la probabilità e la statistica) accanto a quelli tradizionali. I gruppi di trasformazione e la geometria proiettiva sono resi facoltativi. La tendenza emergente guarda stavolta a formare i giovani ad un livello più profondo, per fornire loro gli strumenti di indagine e di comprensione utili a condurre un ragionamento matematico e a risolvere problemi significativi; questa tendenza ha *in pectore* i tratti della metodologia "per problemi"[50] che avrà successo nei decenni seguenti, con riguardo alle esigenze educative e ai problemi d'apprendimento (Ciarrapico, 2002). In particolare, tra il 1966 ed il 1972 vengono attivati nuovi indirizzi tecnici ed emanati i rispettivi programmi: (solo) il programma per l'indirizzo di Perito aziendale e Corrispondenti esteri[51] (emanato nel 1966) riporta delle valide indicazioni metodologiche. In esso si punta l'attenzione sulla

---

[49] L. n.1859/31.12.1962. Per ulteriori approfondimenti, si rimanda a: Ciarrapico & Berni, 2017, p.50.

[50] Schoenfeld (1992) propone di considerare come problema non l'applicazione di una qualche regola matematica, bensì un compito che induca lo studente a ricercare una soluzione, senza sapere a priori quale procedura matematica adottare

[51] L. n. 884/13.07.1965. Per ulteriori approfondimenti, si rimanda a: Ciarrapico & Berni, 2017, p.52.

necessità di collegare la matematica con le altre discipline, tenendo in considerazione lo sviluppo storico delle teorie, promuovendo lo sviluppo del pensiero razionale e basando l'insegnamento della matematica su situazioni concrete, che attingono alla realtà. Qui, come sostiene Ciarrapico (2002), per la prima volta è presente un invito ad insegnare la matematica problematizzando la realtà, partendo dal concreto per abituare gli studenti al ragionamento e alla generalizzazione:

> *[...] occorre che l'insegnante abitui gli studenti al ragionamento, insistendo più sui concetti che sulle formule [...]. Scopo essenziale dell'insegnamento deve essere, in definitiva, non quello di costringere gli alunni ad acquisire un oneroso fardello di aride e spesso non assimilate nozioni, bensì quello di allenarli a risolvere con le proprie forze, ed anche con l'ausilio di libri di testo o manuali, problemi di tipo anche diverso da quelli specificatamente trattati dall'insegnante.*
>
> *(Gazz. Uff. S.G. n.231/12.03.1976, p.106)*

Gli articoli pubblicati in questi anni da alcuni esperti di didattica tra cui Emma Castelnuovo[52](1913-2014), e le relazioni derivanti dalle sperimentazioni nelle classi pilota

---

52 Emma Castelnuovo (1913-2014) nacque a Roma nel 1913. Cresciuta in un ambiente culturale molto stimolante, si laureò nl 1936 e dedicò la sua intera vita alla teoria e alla pratica dell'insegnamento della matematica. Durante gli anni del fascismo fu rimossa dall'incarico di docente perché ebrea e, come tanti dell'epoca, dovette proseguire nel suo lavoro nell'anonimato, senza tuttavia rinunciarvi del tutto. Superati gli anni difficili della guerra, poté dedicarsi nuovamente alla sua più grande passione: l'insegnamento. Ha insegnato matematica nella scuola della Comunità Ebraica romana e poi presso la scuola media Torquato Tasso di Roma dal 1945 al 1979, rivoluzionandone il modo di insegnamento. Organizzò per i suoi allievi incontri con diversi scienziati, esperti in didattica di altre discipline e pedagogisti, tra i quali il colonnello Carleton Washburne, che in quegli anni si trovava a Roma per contribuire alla stesura dei nuovi programmi per la scuola della neonata Repubblica Italiana. In quegli anni entrò in contatto con l'ambiente internazionale della ricerca in didattica della matematica, dove le sue proposte innovative furono accolte con fervore. Nel 1949 pubblicò il libro *Geometria intuitiva* per il primo ciclo della scuola secondaria, libro che costituisce una sorta di manifesto del suo pensiero didattico. Emma sosteneva l'importanza di un insegnamento fondato sulla manipolazione e sulla trasformazione dei materiali; a partire dalla manipolazione concreta degli oggetti è possibile desumere le proprietà delle figure geometriche o degli insiemi. La matematica va appresa, nella sua visione, a partire dalla realtà e da esperienze attive nelle quali gli allievi possono operare concretamente con materiali opportuni; solo in un secondo momento l'apprendimento approda verso la comprensione degli schemi astratti della matematica. Ha lavorato alla costruzione di una scuola *per* tutti, democratica e attiva, in cui la matematica sia più che altro uno strumento per avvicinare tutti al pensiero libero. Non a caso, difatti, tra i materiali da usare annovera bacchette di cartone, spaghi ed elastici, materiali semplici, poveri, alla portata di tutti. È stata un'eccezionale praticante riflessiva della didattica della matematica, molto nota a livello internazionale, ed è stata insignita di importanti riconoscimenti a livello nazionale e internazionale. Nel 2000 è stata nominata nella commissione per la redazione dei nuovi programmi di matematica e nel 2014 l'ICMI decise di istituire a suo nome (prima donna cui fu intitolato il premio) una medaglia da assegnare come riconoscimento per eccezionali traguardi raggiunti nella pratica della

sembrano puntare nella stessa direzione indicata da Klein ma le nuove, innovative idee (tra le quali, ad esempio, l'importanza del carattere *costruttivo* della geometria intuitiva più volte affermata da Emma Castelnuovo) non hanno poi incontrato il sostegno della comunità matematica italiana né si sono tradotte in riforme legislative. Nei primi anni Settanta si attivano gli indirizzi tecnici di Perito programmatore e di Perito informatico[53] nei quali l'informatica è disciplina cardine per formare professionalmente gli studenti: è questo, difatti, il periodo in cui i computer fanno il loro ingresso nel mondo sociale e lavorativo.

Intorno al 1976 prendono vita alcuni gruppi di ricerca nelle Università italiane per indagare come sono stati messi in atto i nuovi programmi scolastici ma anche per analizzare i risultati di sperimentazioni centrate sulle particolari metodologie d'insegnamento (ad esempio, l'apprendimento per problemi) o su nuovi argomenti oggetto di sperimentazione. Dalle ricerche pubblicate nascono discussioni costruttive, libri, ma nessuna proposta univoca per una riforma dell'insegnamento della matematica nella scuola superiore. La Scuola Media - unificata già nel 1962 - viene invece riformata nel 1977: è resa obbligatoria insieme alla Scuola Elementare e da essa vengono soppresse le materie opzionali (latino o applicazioni tecniche). All'insegnamento della matematica e delle scienze chimiche, fisiche e naturali (che costituiscono un'unica cattedra) vengono dedicate sei ore settimanali. Tra gli obiettivi proposti per l'insegnamento scientifico *tout court* si trova lo sviluppo dell'intuizione, la capacità di esprimersi mediante il linguaggio naturale, grafico e simbolico, la capacità di sintesi e di comunicazione; nelle indicazioni

---

didattica della matematica. Nelle sue opere si ritrovano temi ancora attuali e centrali nel dibattito sull'insegnamento della matematica nella scuola secondaria: il rapporto tra concreto e astratto; gli aspetti teorici e gli aspetti pratici; la valutazione; metodi descrittivo e costruttivo per la geometria. Tra i suoi lavori più importanti si ricordano qui i lavori: Castelnuovo, E., Lorenzoni, F., & Degli Espositi, C. (2008). L'officina matematica: ragionare con i materiali: le lezioni della più grande ricercatrice italiana di didattica matematica. La meridiana; Castelnuovo, E., & Lanciano, N. (1993). *Pentole, ombre, formiche: in viaggio con la matematica*. La Nuova Italia; Castelnuovo E. (1963). *Didattica della matematica.* La Nuova Italia, Firenze; Castelnuovo E. (1948). *Geometria intuitiva per le scuole medie inferiori*, Lanciano-Roma: Carrabba. Per ulteriori approfondimenti, si rimanda a: Luciano, E. (2020). Emma Castelnuovo: *Gli spazi e i tempi di una vita spesa per l'insegnamento della matematica;*

[53] Istituiti nel 1970, ne vengono modificati i programmi e le denominazioni con il D.P.R. n.123 del 28.01.1972. Programmi: All. 1 – All. 2. Per ulteriori approfondimenti, si rimanda a: Ciarrapino & Berni, 2017, p.65.

metodologiche emerge la metodologia "per problemi", ovvero un insegnamento che trae spunto dal problema, tramite cui analizzare situazioni problematiche reali, significative e sfidanti, per poi avviare un processo di matematizzazione della realtà e di astrazione che porti a comprendere la struttura matematica che dà senso ad una data situazione (Ciarrapico, 2002). Nella Scuola superiore si fanno strada alcuni progetti sperimentali, grazie all'impegno di più associazioni ed enti che agiscono in sinergia con il Ministero e seguono perlopiù i programmi di Frascati[54]. Nel 1975 nascono i primi Nuclei di ricerca universitari che, su iniziativa dell'UMI-CIIM, portano a collaborare docenti di scuola e docenti universitari per promuovere la ricerca teorica e sul campo (ovvero, con sperimentazioni nelle classi italiane).

3.8 Il PNI e i primi progetti sperimentali, con uno sguardo al primo decennio del nuovo millennio

Una prima vera svolta ai vari tentativi di riforma avviati dopo il 1923 si ha soltanto nel 1985 con il Piano Nazionale per l'Informatica[55] (PNI), un piano fortemente voluto dal Ministero della Pubblica Istruzione per introdurre l'informatica nelle scuole italiane di ogni ordine e grado e promuovere l'uso delle nuove tecnologie a scopo didattico. L'insegnamento dell'informatica viene pensato non complementare, quanto *all'interno* della matematica e della fisica, discipline fortemente connesse all'informatica e i cui destini sono destinati ad incrociarsi più e volte nel tempo con i successivi sviluppi dell'informatica. Inoltre, l'introduzione dell'informatica avrebbe dato un nuovo impulso all'insegnamento della matematica, ne avrebbe rinnovato la linfa vitale favorendo lo sviluppo di una matematica più *applicativa*, volta alla risoluzione di problemi "autentici", e conferendo un peso maggiore ai processi di formalizzazione. Il PNI rende necessario formulare in termini nuovi i programmi di matematica e di fisica alle superiori e,

---

[54] Si parla di programmi di Frascati per far riferimento alle proposte di variazione dei programmi di matematica emersi dai due convegni promossi dall'UMI-CIIM e tenuti a Frascati tra il 1966 e il 1967. Per ulteriori approfondimenti, si rimanda a: Ciarrapico & Berni, 2017, pp.56-58.

[55] La sperimentazione si avvale di quanto previsto nell'art.1 del D.P.R. n.419 del 1974. Per ulteriori approfondimenti, si rimanda a: Ciarrapico & Berni, 2017, p.84.

contestualmente, attuare un piano di aggiornamento professionale rivolto agli insegnanti, il primo piano di aggiornamento sul territorio nazionale. I programmi sono pertanto ridefiniti, nei contenuti, negli obiettivi e nei metodi, alla luce dei progressi della matematica e del crescente interesse per le metodologie di insegnamento e apprendimento. Come per l'ultima riforma della Scuola Media, i contenuti sono raggruppati in cinque grandi *temi* e una *premessa* ne esplicita gli obiettivi da perseguire ed i suggerimenti metodologici. Nelle premesse si sottolinea l'orientamento della matematica verso la matematizzazione della realtà (modellizzazione dei fenomeni naturali, sociali ed economici ed interpretazione degli stessi) e verso i processi formali, due spinte complementari nel cammino evolutivo della matematica stessa (Ciarrapico, 2002). Dando seguito al PNI, nei primi anni di scuola secondaria si introduce il piano cartesiano e il concetto di funzione, dando così un'interpretazione geometrica alla ricerca delle soluzioni di un'equazione; la geometria euclidea viene insegnata in termini di trasformazioni geometriche; la statistica, la probabilità, la logica e l'informatica sono le new entry del programma di matematica. L'apprendimento per problemi, più volte citato, e l'introduzione dei modelli matematici costituiscono fattori di novità e segni coerenti dell'interesse per un insegnamento della matematica che guardi ai fenomeni reali, che riesca ad attingere dalla realtà e ad essa ritornare, fornendo spiegazioni, ponendo problemi, aprendo discussioni su temi vicini ai discenti quanto ai docenti.

La rilevanza data, con la diffusione dei programmi PNI, alla computer science e agli aspetti algoritmici dell'informatica è destinata a durare e anzi ad incrementare nel tempo con l'evoluzione delle tecnologie e il crescente interesse dei ricercatori per gli aspetti metodologici legati all'insegnamento delle TIC[56] (Tecnologie per l'Informazione e la Comunicazione). Si parlerà più in avanti di tecnologie *a supporto* dell'azione didattica, come strumento didattico innovativo. Con il progetto PNI si è cercato di dare un volto nuovo alla matematica e all'insegnamento della matematica, quest'ultimo fermo al 1961 nelle scuole tecniche e al 1945 (concretamente, al 1923) nei licei. Di fatto, esso ha avuto

[56] L'acronimo TIC sta per "Tecnologie dell'Informazione e della Comunicazione" e indica quella disciplina che comprende l'Informatica, l'Elettronica e le Telecomunicazioni, ma indica anche un settore economico che ha dato vita alla cosiddetta rivoluzione digitale iniziata alla fine degli anni Cinquanta.

una grande diffusione nei bienni delle superiori ed una notevole influenza nel triennio dei Licei, soprattutto (Ciarrapico, 2002). Anche se non si può dire che abbia incontrato felicemente la prassi didattica nella totalità delle classi sperimentali coinvolte, positiva è comunque la risposta di molti docenti e associazioni scientifiche. Se non altro, il progetto PNI porta la comunità scolastica a ripensare al modo di insegnare la matematica dopo i dibattiti e le esperienze maturate nel ventennio precedente (Ciarrapico, 2002). Nel 1987, matematici ed esperti sono chiamati a collaborare in un Comitato, presieduto dal sottosegretario alla Pubblica Istruzione, l'onorevole Brocca, per formulare una riforma generale dell'istruzione secondaria superiore, una riforma resasi necessaria ma di fatto non ancora attuata (probabilmente per i diversi governi che si susseguono a distanza di poco tempo l'uno dall'altro). Il Comitato stabilisce quali nuovi indirizzi di studio debbano sostituire la scuola liceale e la scuola tecnica. Il Liceo scientifico si scinde in due indirizzi, uno tradizionale che include l'insegnamento del latino, l'altro scientifico-tecnologico che sostituisce il latino con l'informatica. Due gruppi diversi elaborano pochi anni dopo i programmi del biennio (nel 1988) e del triennio (1990); subito dopo, nell'a.s. 1991/92, si dà avvio al progetto Brocca in via sperimentale. Come il progetto PNI, anche il progetto Brocca ha avuto un discreto successo anzitutto nei Licei. Il programma di matematica del biennio Brocca[57] richiama molto quello del biennio previsto nel PNI ma, a differenza di quest'ultimo, mostra un'attenzione maggiore agli aspetti legati ai processi di apprendimento degli alunni. Il programma del triennio Brocca[58] prevede uno spazio maggiore dedicato agli elementi di aritmetica ma nel 1996 viene ridotto perché ritenuto da molti troppo articolato: alcuni argomenti vengono semplificati, altri sono resi facoltativi, altri ancora soppressi. A partire dal 1993 vengono attivati diversi percorsi di aggiornamento rivolti ai docenti, promossi sia da associazioni matematiche, sia da un Protocollo siglato dal Ministero dall'UMI-CIIM e (nel 1999) dalla SIS (Società Italiana di

---

[57] Piani di studio e programmi del primo biennio della scuola secondaria superiore (1991) reperibili online all'indirizzo: https://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/bienniobrocca.pdf.

[58] Piani di studio e programmi dei trienni della scuola secondaria superiore (1992) reperibili online all'indirizzo: https://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/trienniobrocca.pdf

Statistica), con l'intento di diffondere metodologie didattiche intrecciate con i progressi in campo tecnologico e scientifico.

Dal 2000 in poi, le riforme si susseguono rapide, come emerso da un lavoro approfondito di Ciarrapico (2002). Una delle più importanti è la riforma sul Riordino dei Cicli[59] che prevede una struttura suddivisa in due cicli di studio: il *ciclo primario* di sette anni, che include la Scuola Elementare e la Scuola Media (e si conclude con il primo Esame di Stato), e il *ciclo secondario* di cinque anni (di cui i primi due obbligatori) che assume la denominazione di Scuola secondaria (Ciarrapico & Berni, 2017). Una nuova commissione viene nominata con il compito esplicito di elaborare i curricoli della nuova scuola. La riforma sarebbe stata attuata nelle classi prime e seconde del ciclo primario dall'a.s. 2001/2002, nelle classi prime del ciclo secondario dall'a.s. 2002/03. Nell'elaborazione del curricolo di matematica del 2001 il gruppo di lavoro incaricato (composto da docenti universitari e di scuola, dirigenti scolastici e ispettori tecnici) trae spunto essenzialmente dai curricoli redatti da una Commissione dell'UMI (formata da docenti universitari, docenti di scuola e ispettori ministeriali), in cui l'introduzione di un *Laboratorio di matematica*[60] e l'importanza di una *discussione in classe*[61] costituiscono aspetti particolarmente rilevanti. Gli aspetti chiave di cui si tiene conto sono l'individuazione dei nuclei fondanti[62] (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2003) della disciplina, la gradualità degli obiettivi da raggiungere nel curricolo e la verticalità [63]. La struttura del curricolo è organizzata per nuclei tematici e nuclei di processo. I primi (*Il numero, Lo*

---

59 Legge Quadro n.30/10.02.2000. Per ulteriori approfondimenti, si rimanda a: Ciarrapico & Berni, 2017, p.115-117.

60 Da considerarsi come un luogo ideale che comprende oggetti, persone, strutture, idee, nel quale si vuole *costruire* i significati degli oggetti matematici (Ciarrapico & Berni, 2017).

61 Da considerarsi come un'occasione per conseguire un apprendimento efficace e consapevole dei concetti matematici, con la partecipazione attiva della classe al dialogo educativo orchestrato dall'insegnante (Ciarrapico & Berni, 2017).

62 «Per nucleo fondante di una data disciplina potremmo intendere dei contenuti-chiave per la struttura stessa della disciplina, non tanto sul piano meramente didattico, quanto sul piano fondazionale, epistemologico» (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2003, p.336)

63 Continuità nel processo di insegnamento-apprendimento (Ciarrapico & Berni, 2017, p.118).

spazio e le figure, Le relazioni, I dati e le previsioni) presentano dei contenuti specifici, mentre i nuclei di processo (*Argomentare e congetturare, Misurare, Porsi e risolvere problemi*) non presentano contenuti propri in quanto si riferiscono alle attività mentali che sono trasversali a tutti i nuclei tematici. Di ciascun nucleo sono indicati gli obiettivi d'apprendimento, con riguardo al ciclo di studi e al principio di gradualità cui si è fatto cenno. In accordo con Ciarrapico (2002), i nuovi curricoli di matematica fanno emergere l'idea di una matematica che abbia una duplice funzione, strumentale e culturale, che risulti essenziale nella formazione dei futuri cittadini per comprendere il mondo che li circonda e ancor già perché possiede una propria matrice culturale. Si tratta di due funzioni, due aspetti che si integrano nell'insegnamento della matematica e nello sviluppo del pensiero matematico. Imparare a pensare matematicamente si traduce perciò nell'imparare a *costruire* i significati degli oggetti matematici (rappresentazioni, manipolazioni simboliche, generalizzazioni), ovvero nel saper mettere in pratica i processi di matematizzazione[64] e di astrazione da un lato; nel saper usare questi strumenti per comprendere la struttura matematica "nascosta" in situazioni reali dall'altro lato (Ligorio & Cacciamani, 2013). In questo processo di costruzione di significati e di comprensione dei concetti matematici stessi interviene una voce nuova, quella della tecnologia, cui si fa cenno nelle note didattico-metodologiche dei curricoli, considerati i modesti successi del PNI e l'attenzione crescente per gli sviluppi in campo tecnologico. Nell'approccio ai concetti matematici, i nuovi curricoli sottolineano inoltre l'importanza di procedere per gradi e in maniera ciclica, per far sì che gli studenti non debbano affrontare salti cognitivi o fraintendimenti (Ciarrapico, 2002). È importante, in effetti, che ogni alunno ripercorra gli stessi passi (cioè, ritorni su un concetto appreso o su una procedura a lui nota) più e più volte con maggiore consapevolezza e maturità culturale, con ulteriori strumenti cognitivi a disposizione, forte delle competenze che ha acquisito nel tempo. Il Decreto contenente i nuovi curricoli di base non viene tuttavia registrato e in Parlamento viene messa in

[64] Già citati nei curricoli UMI per indicare il processo di modellizzazione matematica. Ovvero di traduzione in termini matematici di un problema legato ad un contesto reale e nella contestualizzazione della soluzione trovata; nel secondo ciclo, questo processo si completa con la formalizzazione e generalizzazione del problema considerato (Ciarrapico & Berni, 2017, p.118).

discussione una nuova riforma della scuola. Certamente il dibattito aperto con l'elaborazione dei programmi ha permesso di confrontare idee recenti e passate, successi e insuccessi che si sono susseguiti e di alimentare nella scuola e nelle università la speranza, mai spenta, di formare in modo autentico e profondo le nuove generazioni. Impedovo (2008) ad esempio, in un lavoro che trae ispirazione dall'idea di *insegnamento dinamico* della matematica di Enriques, propone l'utilizzo del software TI-Nspire della Texas Intrument come strumento operativo per esplorare in modo dinamico oggetti e concetti matematici (successioni numeriche, funzioni, derivata di una funzione). Mettere in pratica le idee di Enriques nel XXI secolo coinvolge, quindi, le nuove tecnologie ed apre la strada a nuove direzioni di ricerca, come egli stesso afferma:

> *La matematica sia cambiata perché sono cambiati gli strumenti con i quali la si insegna, con i quali si costruisce, si esplora, si fa ricerca. Allora non è male che la ricerca didattica percorra strade nuove, in cui le possibilità computazionali e grafiche dei moderni computer siano modulate ad un insegnamento capace innanzitutto di mostrare la bellezza della matematica, cioè del nostro pensiero razionale.* (Impedovo, 2008, p.8)

3.9 Le riforme dal 2010

Dopo la riforma dei programmi di matematica della Scuola secondaria nel 1936, una successiva vera riforma si ha solo nel 2010, con il riordino della Scuola secondaria superiore (archivio.pubblica.istruzione.it/riforma_superiori/nuovesuperiori/index.html), dopo appena un anno dalla pubblicazione delle Nuove Indicazioni Nazionali per il riordino della Scuola dell'Infanzia e del primo ciclo[65]. Ad esse è dedicato uno spazio maggiore in

---

[65] D.P.R. n.89/2009, reperibile online all'indirizzo: https://www.normattiva.it/uri-res/N2Ls?urn:nir:stato:decreto.del.presidente.della.repubblica:2009-03-20;89!vig=. Piuttosto recenti sono le Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione: MIUR (2012). Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale, Firenze, Le Monnier, consultabile on-line all'indirizzo: http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf; MIUR (2018). Nota prot. n. 3645 del 1° marzo 2018. Indicazioni nazionali e nuovi scenari per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione consultabile on-line all'indirizzo: http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni-nazionali-e-nuovi-scenari.pdf.

quanto le più recenti e in quanto volàno per la sperimentazione del Liceo Matematico. Dal 2010, l'ordinamento scolastico italiano è strutturato in modo che alla Scuola dell'Infanzia seguano un primo ciclo unico, della durata di otto anni obbligatori (Scuola Primaria quinquennale e Scuola Secondaria di I grado triennale). Un secondo ciclo d'istruzione è differenziato in:

- Scuola Secondaria di secondo grado, di durata quinquennale (di cui i primi due anni obbligatori), articolata in percorsi di Licei, di Istituti Tecnici e di Istituti Professionali, rivolta ai giovani dai 14 ai 19 anni che hanno concluso positivamente il primo ciclo di istruzione;
- percorsi triennali e quadriennali di istruzione e formazione professionale (IeFP) di competenza regionale, rivolti anch'essi a coloro che hanno concluso positivamente il primo ciclo di istruzione.

I percorsi IeFP[66] non vengono tenuti in considerazione nel presente lavoro in quanto è soltanto alla Scuola Secondaria di secondo grado che si rivolge la sperimentazione qui descritta. La suddetta riforma[67] è diretta agli Istituti Professionali[68] (per i quali si fa riferimento al D.P.R. 87/2010), Tecnici[69] (per i quali si fa riferimento al D.P.R. 88/2010) ed ai Licei (per i quali si fa riferimento al D.P.R. 89/2010). Un'apposita Commissione nazionale costituita nel 2007 dal Ministro della Pubblica istruzione era stata incaricata di predisporre le Linee Guida per il riordino degli Istituti Tecnici[70] e degli Istituti Professionali[71]. L'obiettivo finale era quello di riconfigurare gli indirizzi di studio e ridisegnare il profilo educativo, culturale e professionale dello studente (brevemente,

---

66 Per ulteriori approfondimenti sulle linee guida per i percorsi IeFP, si rimanda alle informazioni presenti alla pagina http://nuoviprofessionali.indire.it/.

67 D.P.R. n.87/2010, D.P.R. n.88/2010, D.P.R. n.89/2010, reperibili online all'indirizzo: https://www.gazzettaufficiale.it/eli/gu/2010/06/15/137/so/128/sg/pdf

68 Organizzati in due settori, "Servizi" e "Industria e Artigianato", e sei indirizzi.

69 Organizzati in due settori, "Economico" e "Tecnologico", e undici indirizzi.

70 (MIUR, 2010b).

71 (MIUR, 2010c).

“Pecup”) al termine del secondo ciclo del sistema educativo di istruzione e formazione. Alla base dei testi redatti risiedono le proposte del Gruppo tecnico nazionale operante presso il Dipartimento per l’Istruzione. Il lavoro del Gruppo si colloca in continuità con il lavoro della Commissione citata prima ed è frutto del dialogo costruttivo aperto con il personale docente e i dirigenti scolastici di centinaia di istituti (rispettivamente, Tecnici e Professionali), dei quali ha raccolto suggerimenti e riflessioni, ma anche con le associazioni professionali e disciplinari e le parti sociali. Un fattore di particolare rilievo che rievoca le precedenti collaborazioni tra il ministero della Pubblica Istruzione e il mondo della scuola. Le Indicazioni e le Linee Guida sono presentate come riferimenti a cui le scuole possono attingere per diversi scopi, tra i quali organizzare il curricolo di studi e individuare i risultati di apprendimento. Questi ultimi vengono articolati in conoscenze[72], abilità[73] e competenze[74], concetti il cui significato è tratto dal Quadro europeo delle qualifiche per l’apprendimento permanente (Consiglio dell’Unione Europea, 2008). Con la riforma, gli indirizzi di studio tecnici e gli indirizzi di studio professionali sono strutturati in attività ed insegnamenti appartenenti ad un’area generale e ad una di indirizzo. La prima area, comune a tutti i percorsi degli Istituti Tecnici e, rispettivamente, degli Istituti Professionali si pone l’obiettivo di fornire agli studenti una preparazione di base grazie allo sviluppo degli assi culturali[75] che caratterizzano l’obbligo di istruzione (asse dei linguaggi, matematico, scientifico-tecnologico, storico-sociale). Le aree di indirizzo hanno l’obiettivo

---

[72] Per *conoscenza* si intende qui un insieme di fatti, principi, teorie e pratiche apprese in relazione a specifici settori di lavoro o di studio.

[73] Per *abilità* si intende qui la capacità di applicare le proprie conoscenze e di usarle per portare a termine compiti e risolvere problemi. Esse si distinguono in abilità cognitive (comprendenti l'uso del pensiero logico, intuitivo e creativo) e abilità pratiche (comprendenti l'abilità manuale e l'uso di metodi, materiali, strumenti).

[74] Per *competenza* si intende qui la comprovata capacità di utilizzare le conoscenze apprese, le abilità sviluppate e le capacità personali, sociali e/o metodologiche, in contesti di studio oppure lavorativi o ai fini dello sviluppo professionale e personale.

[75] «Costituiscono il “tessuto” per la costruzione di percorsi di apprendimento orientati all’acquisizione delle competenze chiave che preparino i giovani alla vita adulta e che costituiscano la base per consolidare e accrescere saperi e competenze in un processo di apprendimento permanente, anche ai fini della futura vita lavorativa. Gli assi culturali che caratterizzano l’obbligo di istruzione sono quattro: asse dei linguaggi, matematico, scientifico-tecnologico, storico-sociale.» (LINEE GUIDA TECNICI, P.85, LINEE GUIDA PROFESSIONALI, P.118)

di far acquisire agli studenti quelle conoscenze spendibili in ambito di lavoro, di studio o nella vita di tutti i giorni, ma anche abilità cognitive che gli consentano di risolvere problemi, muoversi dinanzi alle continue innovazioni con senso di responsabilità e autonomia. I percorsi degli Istituti Tecnici e Professionali sono definiti, a differenza dei percorsi liceali, in modo da garantire un basamento comune negli insegnamenti di lingua e letteratura italiana, lingua inglese, storia, matematica e scienze in termini di conoscenze e competenze, già in parte consolidate secondo quanto espresso nelle Indicazioni Nazionali riguardanti l'obbligo di istruzione[76]. In particolare, in entrambe le Linee Guida si sottolinea l'utilità, nel primo biennio, di una collaborazione fra i dipartimenti nella progettazione e valutazione di attività di consolidamento delle competenze di padronanza della lingua italiana, della lingua straniera e della matematica. È auspicabile che tale collaborazione possa poi favorire una costante verifica della capacità di collegamento da parte degli studenti tra quanto appreso nell'area comune e quanto affrontato nell'area di indirizzo, costruendo dei ponti culturali tra gli insegnamenti che concorrono alla promozione delle competenze proprie dell'area di indirizzo (MIUR, 2010b, 2010c). Nel promuovere le competenze di natura tecnica proprie di ciascun indirizzo si mette in risalto il duplice legame tra esse ed i concetti e i procedimenti degli assi matematico e scientifico-tecnologico. Le abilità acquisite nell'asse matematico, in modo particolare, permettono allo studente di applicare i processi matematici nella sfera della quotidianità, di possedere una corretta capacità di giudizio, di valutare la coerenza logica di un'argomentazione e, più in generale, di orientarsi consapevolmente in differenti ambiti del mondo contemporaneo. Per raggiungere tale scopo non viene dettato alcun modello didattico-pedagogico, ma si discutono le potenzialità di alcuni approcci come, ad esempio, una metodologia didattica di tipo laboratoriale nella quale si possano applicare concetti o principi matematici (appresi a livello teorico) nella risoluzione di problemi di natura scientifica o tecnologica (Baccaglini-Frank et al., 2018). Nei nuovi ordinamenti dell'istruzione tecnica e professionale il laboratorio è visto comunque come una metodologia didattica innovativa che coinvolge lo studente a tutto tondo ed è trasversale a tutte le discipline. Lo studente è

[76] D.M. n.139 del 22 agosto 2007

coinvolto nella veste di protagonista dell'azione didattica strutturata in forma di "situazione-problema" che simuli contesti reali e stimoli lo studente ad un "apprendimento per scoperta". Qui può imparare attraverso il "fare", si misura con sé stesso (è messo di fronte ai propri punti di forza e punti di debolezza) e con la realtà; è coinvolto fisicamente ed emotivamente nella relazione diretta che instaura con il docente e con i pari. Si tratta di una configurazione che richiama quasi naturalmente il *learning by doing* (letteralmente, «imparare facendo», in interventi formativi centrati sull'esperienza) della scuola-laboratorio fondata da John Dewey circa cento anni prima. Il filo conduttore resta comunque quello che lega le competenze sviluppate nell'area generale, comune a tutti gli indirizzi, e le attività di insegnamento e apprendimento nelle specifiche aree di indirizzo. Questa impostazione richiede necessariamente una sistematica collaborazione tra i docenti delle varie discipline e favorisce l'incontro tra i saperi disciplinari e gli assi culturali previsti dall'obbligo di istruzione. È importante sottolineare che nelle Linee Guida per il primo biennio degli Istituti Tecnici (MIUR, 2010b), nel paragrafo *Indicazioni metodologiche*, la didattica laboratoriale emerge quale metodologia da privilegiare in quanto favorisce l'integrazione didattica delle discipline scientifiche (inclusi gli insegnamenti di scienze integrate e di scienze e tecnologie applicate, introdotti col nuovo riordino) e in quanto aiuta lo studente a confrontarsi con situazioni problematiche reali, ad interrogarsi su di esse, a risolverle. Per fare un esempio, la didattica laboratoriale per l'insegnamento delle "Tecnologie informatiche" (Settore Tecnologico degli Istituti Tecnici) contribuisce a raccordare i saperi, il metodo scientifico e la tecnologia, in quanto consente di interpretare esperienze reali alla luce dei riferimenti concettuali; di affrontare problemi reali contestualizzati in uno specifico ambito applicativo come l'informazione, l'ambiente o la salute. Alcuni dei compiti che si pongono i nuovi Istituti Tecnici consistono proprio nell'educare i cittadini ad usare responsabilmente le scoperte scientifico-tecnologiche e nel promuovere una profonda riflessione sul significato umano e sociale di tali scoperte. La cultura umanistica, insieme alle discipline di area generale, va ad integrarsi con le discipline delle aree di indirizzo per approfondire la genesi storico-culturale delle tecnologie, la loro evoluzione, la loro ripercussione sul piano economico, produttivo e sociale. Non si tratta solamente di promuovere una feconda integrazione dei saperi, quanto di intrecciarli in modo che ne risultino reciprocamente valorizzati. In aggiunta, va sottolineato come un intero paragrafo sia dedicato alla continuità del processo educativo (si può scorgere qui un riferimento alla *verticalità* dei curricoli di Matematica promossi dall'UMI e discussi nei paragrafi precedenti) con la scuola secondaria di primo grado: per educare lo studente è fondamentale che l'insegnante conosca i risultati di apprendimento conseguiti, valorizzi ciò che sa fare prima di iniziare il secondo ciclo, in modo da programmare eventuali azioni di recupero ispirate ai principi della continuità verticale (Baccaglini-Frank et al., 2018). Nel corso del secondo biennio e quinto anno degli Istituti Tecnici i giovani vengono così coinvolti in un percorso unitario di formazione e vengono accompagnati nell'edificazione del loro progetto di vita, di studio e di lavoro: al termine di tale percorso avranno sviluppato la dimensione teorico-culturale connessa alle abilità proprie delle discipline d'indirizzo ed avranno acquisito una pluralità di competenze personali e professionali utili sia al proseguimento degli studi, sia all'inserimento nel mondo del lavoro. In questo laborioso percorso la matematica fornisce gli strumenti per rappresentare e risolvere problemi di natura scientifica, tecnologica o economica usando uno specifico linguaggio e stimolando gli studenti ad essere consapevoli delle conoscenze che stanno alla base delle discipline scientifiche e delle applicazioni tecnologiche. A parziale integrazione del programma di base di matematica, viene inoltre aggiunta agli indirizzi tecnologici la disciplina "Complementi di matematica"[77] (nel cui programma figurano anche trasformazioni vettoriali, formule parametriche di alcune curve, equazioni differenziali lineari, derivate parziali, metodo dei minimi quadrati, numeri complessi, trigonometria sferica, problemi caratteristici della ricerca operativa). Essa viene pensata quale anello di congiunzione tra la cultura matematica generale e la cultura scientifica, tecnologica e professionale nella misura in cui il suo insegnamento è del tutto integrato con le discipline di indirizzo e fornisce un sicuro riferimento teorico durante le applicazioni professionali. Questa interdipendenza tra cultura professionale, cultura scientifica e tecnologie si può concretamente toccare con mano nelle esperienze di laboratorio, luogo

---

[77] Le *Linee Guida* di *Complementi di matematica*, relative alle varie attività e insegnamenti degli indirizzi dell'Istituto Tecnico Tecnologico, sono emanate con la Direttiva n.69 dell'1/8/2012 (Gazz. Uff. n. 253/29.10.2012, S.O.). Per ulteriori approfondimenti, si rimanda a: Ciarrapico & Berni, 2017, p.139.

privilegiato per la concreta acquisizione di saperi, lo sviluppo delle reali competenze scientifiche e l'integrazione dei nuclei fondanti delle discipline. Questo abitua inoltre gli studenti a mettere in campo il proprio bagaglio intellettuale e di abilità professionali per rispondere alle esigenze del mondo del lavoro che propone di affrontare sfide sempre nuove. In poche parole, si potrebbe dire che il ricorso al laboratorio consente di cogliere «l'interdipendenza tra scienza, tecnologia e dimensione operativa della conoscenza» (MIUR, 2010a, p.53). Quanto alla matematica, dal riordino degli Istituti Tecnici e Professionali ne emerge un volto nuovo: essa viene considerata come disciplina dell'area generale (che concorre, quindi, ad una formazione culturale di base degli allievi) ma viene chiaramente valorizzata nell'ottica di un percorso unitario di formazione soprattutto negli indirizzi tecnici. Ad essa vengono dedicate quattro ore settimanali nel biennio e tre nel triennio, con l'aggiunta di un'ora alla settimana per l'insegnamento dei Complementi di Matematica nel secondo biennio tecnico. Al termine del percorso tecnico, gli studenti dovrebbero padroneggiare il linguaggio formale e gli strumenti matematici, statistici e del calcolo delle probabilità utili alla comprensione delle discipline scientifiche e alle applicazioni operative nelle scienze applicate. Inoltre, essi dovrebbero saper collocare lo sviluppo del pensiero matematico nel quadro generale dello sviluppo della scienza e dell'evoluzione delle tecnologie, senza tralasciare le reciproche influenze con il contesto economico, sociale e culturale (MIUR, 2010a).

L'assetto ordinamentale, didattico e organizzativo dei licei viene rivisto anch'esso nel 2010, con la pubblicazione delle Indicazioni Nazionali (DPR n.89 del 2010) e del Regolamento dei nuovi licei[78]. Il nuovo Regolamento (MIUR, 2010d) viene attuato a partire dall'a.s. 2010/2011 nelle classi prime e in esso confluiscono i "vecchi" percorsi liceali e le relative sperimentazioni. La prima bozza del decreto è frutto del lavoro di un gruppo tecnico composto da personalità provenienti dal mondo accademico, dal mondo della scuola e da quello della cultura. Il gruppo viene esteso dall'onorevole Gelmini, Ministro dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca tra il 2008 e il 2011, la quale

[78] Gazz. Uff. n. 291/14.12.2010 – Suppl. Ord. N.275, Allegati. Per ulteriori approfondimenti, si rimanda a: Ciarrapico & Berni, 2017, pp.136-137.

costituisce un'apposita Commissione per definire il testo della riforma. Sentiti i pareri del Consiglio Nazionale della Pubblica Istruzione e raccolti i suggerimenti di sindacati, associazioni professionali, istituzioni scolastiche, forum di genitori e studenti, uffici scolastici regionali, la Commissione procede alla stesura finale delle Indicazioni e del Regolamento. In quest'ultimo si legge che i percorsi liceali hanno durata quinquennale e si sviluppano in due bienni ed un quinto anno. Il primo biennio è finalizzato all'acquisizione delle conoscenze, abilità e competenze richieste per l'assolvimento dell'obbligo scolastico (nel 2010, fissato al sedicesimo anno di età); il secondo biennio all'acquisizione delle competenze caratterizzanti i singoli percorsi liceali; il quinto anno al pieno raggiungimento degli obiettivi specifici di apprendimento e al compimento del profilo educativo, professionale e culturale dello studente liceale (MIUR, 2010a). I percorsi liceali vengono distinti in Artistico, Classico, Linguistico, Musicale e coreutico, Scientifico e sua opzione "Scienze applicate", delle Scienze Umane e sua opzione "Economico-sociale". Nell'Allegato A al Regolamento dei licei (MIUR, 2010d) viene specificato che il percorso liceale, a prescindere dallo specifico indirizzo scelto, fornisce agli studenti gli strumenti culturali e metodologici utili a leggere, comprendere in profondità ed interpretare situazioni e fenomeni reali, in modo critico e creativo, a partire da uno studio sistematico delle discipline in una prospettiva storico-critica. Rispetto al passato, viene dato infatti uno spazio maggiore alla matematica, alla fisica e alle scienze per irrobustire la preparazione degli studenti in campo scientifico. Ciò assume un certo rilievo se si pensa che uno studente liceale debba affrontare gli studi superiori considerati lo sbocco naturale - ma non esclusivo - degli studi liceali. Questa premessa rinsalda la volontà del Ministero di offrire ai giovani studenti la possibilità di acquisire una base di saperi e competenze comune ai licei, agli Istituti Tecnici, agli Istituti Professionali e ai percorsi dell'istruzione e formazione professionale. I risultati di apprendimento comuni ai percorsi liceali e attesi alla fine degli stessi sono espressi in termini di strumenti acquisiti, conoscenze approfondite e competenze maturate, distinte in cinque aree[79]: area metodologica, area logico-argomentativa, area linguistica e comunicativa, area storico-umanistica, area

[79] Per una descrizione più dettagliata delle singole aree, si veda (MIUR, 2010d, p.7)

scientifica, matematica e tecnologica. In riferimento a quest'ultima, a conclusione di un percorso liceale, gli studenti dovrebbero «comprendere il linguaggio formale specifico della matematica, saper utilizzare le procedure tipiche del pensiero matematico, conoscere i contenuti fondamentali delle teorie che sono alla base della descrizione matematica della realtà» (MIUR, 2010d, p.7); conoscere i contenuti principali delle scienze fisiche e naturali, padroneggiarne i metodi di indagine e comprendere il ruolo dell'informatica nella modellizzazione della realtà. È importante evidenziare come, tra tutti, i percorsi di liceo classico e liceo scientifico mirano ad una formazione culturale che abbraccia la riflessione filosofica (con lo studio della letteratura italiana, della storia, della filosofia) e il pensiero scientifico (con lo studio della matematica e delle scienze chimiche, fisiche e naturali); che permetta allo studente di condurre una riflessione critica sulle diverse forme del sapere, di coglierne le intersezioni e le interconnessioni, e di collocare il pensiero scientifico in una dimensione storico-umanistica. Sembra tuttavia che, nel tentativo di coniugare la cultura umanistica e la cultura scientifica per promuovere l'unitarietà del sapere venga (paradossalmente) rimarcato ancora una volta il divario "storico" che sussiste tra il pensiero filosofico ed il pensiero scientifico nella tradizione dei programmi scolastici. In aggiunta, l'opzione "Scienze applicate" introduce lo studio delle tecnologie quale punto di incontro tra la scienza e la vita quotidiana: tale opzione dedica infatti uno spazio maggiore all'analisi dei modelli usati nella ricerca scientifica e all'applicazione dei metodi d'indagine propri delle scienze in vari campi, facendo leva su diversi linguaggi (matematici, formali, storico-naturali, simbolici). I singoli percorsi liceali concorrono al raggiungimento di specifici obiettivi di apprendimento: specifici per ogni percorso scelto ma anche per ciascuna disciplina. Ecco perché le Indicazioni vengono declinate per tipologia di percorso liceale e per singola disciplina. Di ogni disciplina vengono indicate le competenze attese alla fine del percorso nella parte introduttiva delle *linee generali*; subito dopo, vengono presi in esame gli *obiettivi specifici di apprendimento* articolati per nuclei disciplinari e distinti per primo biennio, secondo biennio e quinto anno. È ben chiaro, comunque, che le Indicazioni non vogliono dettare alcun modello didattico o pedagogico, in quanto è fatta salva la libertà del docente di applicare quanto suggerito nelle Indicazioni e di arricchirlo in relazione ai singoli percorsi liceali e in relazione agli studenti che accompagnerà nel percorso di studi, ricercando di volta in volta le metodologie più appropriate per conseguire il traguardo del successo formativo e educativo (MIUR, 2010d). Nelle *linee generali* sulle competenze in matematica di ciascun indirizzo emerge l'importanza di soffermarsi non tanto sugli aspetti tecnici e algoritmici della disciplina, quanto sul rapporto tra i temi principali del pensiero matematico ed il contesto storico, filosofico, scientifico e tecnologico in cui si sono sviluppate le teorie matematiche. Appare qui evidente «il riferimento al valore culturale della matematica, come prodotto umano che si è sviluppato nel tempo» (Baccaglini-Frank et al., 2018, p.162). Il testo, difatti, rimanda a tre momenti dello sviluppo del pensiero matematico: il primo nella civiltà greca (la culla della civiltà occidentale che ha visto "nascere" la geometria euclidea), il secondo nella rivoluzione scientifica del Seicento (con l'emergere del calcolo infinitesimale), il terzo che ha inizio con il razionalismo illuministico e approda alla matematica moderna (quella che intreccia il suo cammino con la biologia, la tecnologia, le scienze economiche e sociali). I temi principali a cui si fa riferimento sono: la geometria euclidea del piano e dello spazio; il calcolo algebrico; le funzioni elementari dell'analisi; il calcolo differenziale e integrale (nelle nozioni di base); il concetto di modello matematico e l'analisi di semplici modelli matematici, ai quali si aggiunge l'introduzione ai concetti basilari del calcolo delle probabilità e di analisi statistica. Si puntualizza l'importanza dei modelli matematici utili allo studio e alla rappresentazione di fenomeni fisici, servendosi anche degli strumenti informatici, e dei «procedimenti caratteristici del pensiero matematico» (includendo le definizioni, i processi dimostrativi e di formalizzazione). I temi e gli approcci richiamati sono presentati come uno spunto per creare dei collegamenti con le altre discipline, ad esempio con la filosofia, la fisica, le scienze naturali o la storia, e per favorire il confronto tra concetti e metodi di indagine propri degli specifici domini di conoscenza. Per il primo biennio, gli *obiettivi specifici di apprendimento* sono declinati in riferimento alle aree tematiche *Aritmetica e algebra*, *Geometria*, *Relazioni e funzioni*, *Dati e previsioni*, *Elementi di informatica* (quest'ultima area è prevista nel quadro orario di tutti gli indirizzi eccetto il Liceo Scientifico con opzione Scienze Applicate). Il primo biennio dovrebbe essere dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico al calcolo algebrico, per favorire la rappresentazione e risoluzione di problemi mediante il ricorso al calcolo letterale e per introdurre in maniera intuitiva i numeri reali; alla conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea, dal momento che gli Elementi di Euclide hanno segnato in modo inequivocabile lo sviluppo della matematica occidentale, alla conoscenza delle principali trasformazioni geometriche e proprietà invarianti, alla rappresentazione di oggetti geometrici nel piano cartesiano usando strumenti tradizionali ed informatici (particolarmente utile anche nelle discipline grafiche del Liceo Artistico); ai linguaggi degli insiemi e delle funzioni, per introdurre il concetto di modello matematico, rappresentare in forma grafica ed algebrica fenomeni, risolvere problemi applicativi usando più registri (numerico, grafico, funzionale); all'analisi di una raccolta di dati e serie statistiche, coinvolgendo il più possibile le altre discipline e gli studenti nella raccolta stessa dei dati; all'uso consapevole e critico degli strumenti informatici per rappresentare e manipolare oggetti matematici e risolvere situazioni problematiche semplici. Nel Liceo Scientifico si parla in aggiunta di concetti dell'algebra vettoriale e matriciale, richiamandone le applicazioni in fisica. Nel secondo biennio lo studente liceale dovrebbe apprendere gli elementi dell'algebra vettoriale, approfondire la conoscenza dei numeri reali con riguardo ai numeri trascendenti, approfondire l'analogia tra la divisione fra numeri interi e la divisione fra i polinomi; studiare le sezioni coniche con approccio analitico e geometrico (con riguardo allo studio della circonferenza e del cerchio), per favorire lo sviluppo dell'intuizione geometrica; studiare le funzioni elementari dell'analisi ed i loro grafici (polinomiali, razionali, circolari, esponenziali e logaritmiche) e costruire semplici modelli di crescita e decrescita esponenziale; risolvere problemi in cui compaiono queste funzioni e che richiedano la risoluzione di equazioni e disequazioni di secondo grado; approfondire il concetto di modello matematico ed usare distribuzioni condizionate e marginali (oltre che i concetti di campione, deviazione standard, correlazione, regressione,…) possibilmente in collegamento con altre discipline. Fatta eccezione per il Liceo Artistico, negli altri Licei è previsto anche lo studio delle nozioni di base del calcolo combinatorio e della probabilità composta e condizionata. Per alcuni indirizzi, sono presenti in aggiunta ulteriori indicazioni: nei Licei Artistici è previsto lo studio della prospettiva in relazione alle rappresentazioni figurative e artistiche; nell'opzione economico-sociale del Liceo delle Scienze Umane è previsto lo studio dei «fondamenti matematici della teoria microeconomica, i fondamenti della teoria dell'utilità, gli elementi di base del modello macroeconomico keynesiano» e il ricorso all'approccio modellistico nell'usare la matematica nelle discipline sociali ed economiche (MIUR, 2010d, p.437). Gli obiettivi previsti per il quinto anno, comuni a tutti i Licei, riguardano lo studio della geometria analitica dello spazio (con l'aggiunta dello studio dei poliedri nello spazio per gli indirizzi del Liceo Artistico) e dei principali concetti del calcolo infinitesimale (continuità, derivabilità, integrabilità). L'idea che emerge è che gli studenti debbano sì acquisire il concetto di limite di una successione e di una funzione, che debbano derivare e integrare funzioni semplici o composte, ma soprattutto comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale nella descrizione di fenomeni e nella storia della scienza (nella definizione del concetto di velocità istantanea, di tangente ad una curva, nel calcolo di aree e volumi). Si può notare come l'introduzione della problematica dell'infinito matematico al secondo biennio sia pensata in relazione alla problematica dell'infinito in filosofia e come la costruzione e l'analisi dei modelli matematici, seppur in casi semplici, sia pensata in relazione ad altre discipline e soprattutto alla fisica, più volte citata nelle indicazioni sull'insegnamento della matematica nei Licei (MIUR, 2010d). Escludendo il Liceo Artistico, in tutti gli altri Licei è presente, inoltre, la sezione *Dati e Previsioni*; in essa si fa riferimento all'apprendimento delle caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue (binomiale, normale, di Poisson) e all'approfondimento del concetto di modello matematico in relazione alle altre discipline (ad esempio, nell'ambito delle scienze applicate, tecnologiche ed ingegneristiche per l'opzione "Scienze Applicate"). L'approfondimento del ruolo della matematica nella tecnologia e nelle scienze ingegneristiche è particolarmente marcato nelle indicazioni per l'opzione "Scienze Applicate" del Liceo Scientifico, nelle cui *linee generali* si puntualizza l'importanza di ricercare collegamenti interdisciplinari soprattutto tra matematica, fisica, informatica e scienze. Per raccordare tali insegnamenti fra di loro e con la storia, la filosofia e l'arte viene suggerito da un lato lo sviluppo di tematiche particolarmente rilevanti nella storia della scienza, della tecnica e del pensiero (senza dimenticare le figure di spicco nel panorama scientifico nazionale e internazionale che hanno dato il loro personale contribuito allo sviluppo di quelle tematiche), dall'altro lato l'instaurare collaborazioni con università, enti di ricerca, musei della scienza e mondo del lavoro.

In conclusione, dalle Indicazioni Nazionali per i Licei (MIUR, 2010d) emerge l'importanza di perseguire una formazione quanto più possibile completa e basata sul raccordo tra le discipline, laddove ciò è possibile, senza fare una netta distinzione tra discipline umanistiche e scientifiche ma citando, di fatto, la matematica, la fisica e le scienze da una parte, la storia, la filosofia e l'arte dall'altra. Inoltre, si eleva forte il concetto di modello matematico, da introdurre ed approfondire gradualmente, anno dopo anno, in quanto strumento utile alla descrizione e rappresentazione della realtà, alla comprensione di concetti che altrimenti sarebbero affrontati solo su un piano teorico, e all'applicazione delle conoscenze e competenze via via acquisite dagli studenti in tutti gli ambiti disciplinari. È questo, probabilmente, l'anello di congiunzione tra teoria e pratica mancante nelle idee incarnate da Giovanni Gentile.

Con la pubblicazione delle Indicazioni Nazionali per il II ciclo d'istruzione il volto della matematica nell'immaginario comune ne esce pertanto radicalmente mutato. Secondo alcuni autori (Baccaglini-Frank et al., 2018, p.165), «la sensazione è quella della necessità di un ripensamento profondo degli obiettivi educativi della matematica per gli Istituti Tecnici e Professionali […], che si chieda cosa l'educazione matematica possa dare ad uno studente di Istituto Professionale o Tecnico». Si inizia a pensare all'insegnamento-apprendimento della disciplina in collegamento con le altre, alla ricerca di possibili tematiche interdisciplinari per garantire una formazione culturale quanto più ampia possibile e che prepari i giovani ad affrontare le sfide di un mondo sempre più complesso. Si inizia a ripensare al ruolo dell'insegnante che si trova ad affrontare una vera e propria missione sociale: quella di formare delle "teste ben fatte", come suggerito da Morin[80] in un

---

[80] Edgar Morin (Parigi, 1921) è un noto filosofo, saggista e sociologo francese. È uno dei più grandi intellettuali contemporanei ed è considerato l'iniziatore del "pensiero complesso", ovvero un pensiero che supera la linea di divisione tra i saperi e che riesca a cogliere ciò che è invece tessuto insieme, il tutto e le sue parti. Nella sua opera *La testa ben fatta* si rivolge principalmente agli studenti e agli insegnanti; a questi ultimi egli attribuisce – tra le altre cose - il compito sociale di fornire agli studenti una cultura tale da saper contestualizzare i problemi multidimensionali cui ci mette di fronte la realtà sociale, politica e culturale; favorire l'intelligenza strategica; educare ad essere cittadini del mondo. Per approfondire la sua

suo noto saggio (Morin, 2000). Il pensiero di Edgar Morin sembra in verità più che mai attuale. Egli lamenta la forte disgregazione della cultura in due grandi blocchi: quello della cultura umanistica e quello della cultura scientifica. Al contempo egli pone in evidenza l'inadeguatezza dei nostri «saperi disgiunti», spezzettati nelle varie discipline, con la realtà che invece propone problemi sempre più complessi, globali, multidimensionali (Morin, 2000, p.5). In accordo con Morin (2000), mantenere separati i saperi impedisce tuttavia di cogliere la realtà nella sua unità e nella sua specificità ma, cosa ancor più grave, ciò si ripercuote sul sistema d'insegnamento con la conseguente perdita da parte dei giovani della loro naturale capacità di integrare i saperi e di contestualizzarli. Anche se distanti nel tempo, le Indicazioni Nazionali sembrano proporre alla scuola una sfida che è appunto quella di formare delle "teste ben fatte", lasciando agli insegnanti la libertà di attuare le strategie più opportune e alle istituzioni scolastiche la possibilità di fornire gli strumenti più adeguati, nel rispetto dell'autonomia scolastica e della libertà di insegnamento. Questa sfida è stata colta da alcune università che, pochi anni dopo, hanno dato seguito alle idee di Morin e hanno tracciato un sentiero concreto da percorrere, insieme alle scuole, al fianco degli insegnanti e della comunità studentesca: il Liceo Matematico.

---

teoria della complessità si legga un altro testo dell'autore intitolato *Introduzione al pensiero complesso*, Sperling & Kupfer, Milano 1993.

CAPITOLO IV

Il Liceo Matematico in Italia: nascita, sviluppo e ricadute sull'apprendimento degli studenti

4.1 *Introduzione*

Edgar Morin apre il suo saggio (Morin, 2000) richiamando quella che, nella visione di Montaigne, costituisce la prima finalità dell'insegnamento: «è meglio formare una testa ben fatta che una testa ben piena» (Morin, 2000, p.15). La prima, a differenza della seconda, presenta un'attitudine generale a porre e risolvere problemi, collegando i saperi (piuttosto che accumularli, come farebbe una «testa ben piena») per mezzo di principi organizzatori che diano loro un senso. L'educazione, secondo l'autore, deve non solo favorire questa attitudine generale, ma deve anche stimolare continuamente lo sviluppo dell'intelligenza generale; solo così è possibile trattare problemi specifici e sviluppare competenze particolari. Affinché venga sviluppata del tutto l'intelligenza generale, egli chiama in causa alcuni concetti profondi radicati nella cultura greca: la *curiositas* (intesa qui come desiderio di conoscenza), l'*ars cogitandi* (l'arte dell'argomentazione e della discussione), la *métis* (insieme di attitudini mentali che comprende l'intuizione, l'elasticità mentale, l'attenzione vigile). La «testa ben fatta» che propone Morin possiede dunque un'intelligenza che rende la persona capace di affrontare la sfida della complessità della conoscenza. È una persona che, impiegando le facoltà sopra citate, riesce ad organizzare la conoscenza non in comparti separati e sterili (come una «testa ben piena»), bensì secondo meccanismi di interconnessione e di separazione: ogni conoscenza va situata in uno specifico contesto e inserita in un insieme più ampio, correlata ad altre conoscenze situate. In tal modo, si può sviluppare un'attitudine a contestualizzare i saperi ed integrarli, superando la frammentazione della cultura cui si è già accennato. L'organizzazione delle conoscenze deve seguire un processo circolare che comporta un continuo andirivieni tra la separazione ed il collegamento, tra l'analisi e la sintesi. Ciò che auspica Morin è che, educando delle «teste ben fatte», è possibile superare quella disgiunzione tra le due culture, umanistica e scientifica, che a suo dire si è aggravata proprio nel XX secolo. Su questo si basa la riforma del pensiero e la riforma dell'insegnamento che egli ritiene fortemente necessarie, oltre che intrinsecamente legate, in quanto l'una non può prescindere dall'altra. Questo «consentirebbe di rispondere alle formidabili sfide della globalità e della complessità della vita quotidiana, sociale, politica, nazionale e mondiale» (Morin, 2000, p.29).

Con riferimento alla storia italiana, in particolare, altri studiosi ritengono quantomai necessario superare il sapere parcellizzato imposto dalla Riforma Gentile e puntano verso una didattica interdisciplinare (Capone et al., 2016a), con le sue molteplici sfaccettature (mono-, multi-, pluri-, inter-, trans-, metadisciplinare) discusse nel secondo capitolo. In particolare, riguardo all'insegnamento-apprendimento della matematica, c'è chi suggerisce di coinvolgere gli studenti in esperienze legate all'evoluzione storica, culturale e scientifica della matematica, così da indagare le ragioni storiche che stanno alla base del suo sviluppo, studiarne i rapporti con le altre discipline, comprendere il ruolo che la sua evoluzione ha avuto nella storia dell'umanità e l'impatto che essa ha avuto nelle varie culture (Swetz, 1995). Proprio da motivazioni di natura sociale e culturale nasce la proposta del Liceo Matematico; una proposta che emerge dalle riflessioni di Morin (2000) su quella riforma del pensiero che condurrebbe ad una «testa ben fatta». Il presente capitolo vuole descrivere la nascita ed i primi sviluppi del Liceo Matematico. Con il termine "Liceo Matematico" si indica un progetto sperimentale nato nel 2014 che coinvolge le scuole secondarie di secondo grado e, con numeri più ristretti, le scuole secondarie di primo grado e quelle del primo ciclo. È proprio nel 2014 che si forma la prima classe di Liceo Matematico, come meglio descritto nel contributo (Carullo et al, 2019) che ripercorre le tappe di quella classe quando ormai ha completato il suo ciclo di studi. Le attività educative di questa proposta didattica si ispirano all'apprendimento costruttivista, dunque sulla partecipazione attiva degli studenti al problem solving, e sono dirette verso lo sviluppo di un pensiero critico (Capone et al., 2016b). Gli studenti "costruiscono" le proprie conoscenze a partire da una situazione problematica, mettono in pratica le loro conoscenze ed esperienze pregresse e le applicano a situazioni nuove, aggiungendo costrutti intellettuali (Capone et al., 2016b). Nel paragrafo successivo vengono descritti i principi organizzativi ed i valori comuni alle varie sperimentazioni didattiche, rapidamente aumentate sul territorio nazionale a partire dalle prime classi sperimentali del 2014 (in provincia di Avellino): la stretta collaborazione tra il mondo della scuola e le università; la modalità laboratoriale, che favorisce la costruzione dei significati matematici; lo studio della matematica in modo interdisciplinare, per comprendere meglio il ruolo giocato dalla matematica nello sviluppo del pensiero razionale e nelle altre scienze. Vengono poi chiarite le finalità educative, sociali e formative della sperimentazione, puntando l'attenzione in particolar modo sul ruolo giocato dal Liceo Matematico nello sviluppo della competenza matematica e nella formazione culturale dei futuri cittadini. Il cardine del suo ruolo formativo è costituito dall'impronta fortemente interdisciplinare; è facendo leva su di essa che è possibile contribuire in modo decisivo alla formazione di quelle "teste ben fatte" di cui si parla nella riforma del pensiero e dell'insegnamento teorizzata da Morin (2000). Alcune sperimentazioni vengono qui brevemente introdotte nel quinto paragrafo, sottolineando nel sesto paragrafo come la metodologia del laboratorio di matematica sia risultata vincente in passate sperimentazioni. L'attenzione maggiore è riposta sull'introduzione del Liceo Matematico in due classi di Palermo, descritta nel paragrafo conclusivo; ad esse e a molte altre scuole d'Italia si rivolge la ricerca sperimentale condotta, descritta più dettagliatamente nel capitolo quinto (per quanto riguarda le domande di ricerca, la metodologia e gli strumenti utilizzati) e nel capitolo sesto (dove sono analizzati gli esiti della ricerca).

4.2 ***Nascita e sviluppo del Liceo Matematico: struttura, organizzazione, didattica interdisciplinare per collegare i saperi***

Come meglio espresso in alcuni studi recenti (Capone et al., 2016a, Capone et al., 2016b), l'obiettivo generale della proposta didattica è quello di fornire agli studenti gli strumenti per affrontare la complessità della società attuale. Il "Liceo Matematico" rappresenta un'occasione per riflettere ed aprire un confronto sulle metodologie di insegnamento e sui contenuti disciplinari non solo della matematica, ma (potenzialmente) di tutte le altre discipline di studio, nell'ottica di promuovere l'unitarietà dei saperi con un approccio di apprendimento integrativo. Esso costituisce una novità nel vasto panorama degli indirizzi di Scuola Secondaria Superiore di II grado in Italia ma non si tratta di un indirizzo di studi a sé, quanto piuttosto di un progetto sperimentale non ancora riconosciuto sul piano normativo (come invece era accaduto per il PNI). Esso nasce da una sperimentazione in didattica della matematica promossa nel 2015 dal Prof. Francesco Saverio Tortoriello e da altri collaboratori dell'Università di Salerno impegnati anch'essi nella ricerca in Didattica della Matematica; viene realizzato con il sostegno didattico-scientifico dell'UMI (Unione Matematica Italiana), della CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) e PLS (Piano Lauree Scientifiche). Nell'anno scolastico 2015/2016 vengono inaugurati in Campania i primi tre licei matematici. Già nell'anno successivo aderiscono alla proposta l'Università di Torino e gli atenei di Roma (Sapienza, Roma 3 e Tor Vergata). Dal 2017/2018 l'idea si diffonde rapidamente su tutto il territorio nazionale, fino a raggiungere oggi altri quindici atenei: Bari, Camerino, Caserta, Catania, Cosenza, Firenze, Foggia, L'Aquila, Padova, Palermo, Parma, Perugia, Potenza, Siena e Udine. È articolato in una o due ore settimanali aggiuntive rispetto alle ore curricolari (almeno 33 ore aggiuntive ogni anno). Le ore di approfondimento si tengono nella forma di laboratorio in orario antimeridiano e, in un numero minore di casi, pomeridiano; talvolta, esse coincidono con le ore di potenziamento (la realizzazione stessa del progetto è in taluni casi possibile grazie all'organico di potenziamento in Matematica e Fisica). Per l'iscrizione, requisito essenziale è (nella maggioranza dei casi) il superamento di un test di accesso con un punteggio almeno uguale alla soglia minima (stabilita da ogni singola scuola); inoltre, alcuni percorsi prevedono il versamento di un contributo economico (l'importo è variabile, da 0 euro a 120 euro) da parte delle famiglie degli studenti. Il progetto si avvale anzitutto di una forte e proficua collaborazione tra il mondo accademico ed il mondo scolastico, formalizzata in molti casi attraverso la stipula di un protocollo d'intesa tra le singole scuole e i Dipartimenti di Matematica coinvolti. Gli Istituti scolastici che desiderano farne parte manifestano infatti la loro adesione al progetto mediante la sottoscrizione di un protocollo d'intesa o di una convenzione tra gli stessi Istituti ed il Dipartimento di Matematica (o di Matematica e Fisica/Informatica/Eonomia, a seconda degli Atenei coinvolti) della provincia di appartenenza o di province vicine. Almeno uno o due docenti vengono nominati dalla singola scuola in qualità di referenti scolastici del progetto ed essi avranno il compito di fare da raccordo tra la scuola e l'Università. Proprio dei Dipartimenti di Matematica dell'Ateneo di riferimento è la responsabilità scientifica dei progetti locali. Il protocollo d'intesa impegna i docenti universitari a fornire una formazione adeguata e specifica ai docenti delle scuole sui contenuti da trattare con gli allievi, garantendo la compartecipazione di entrambe le parti nelle scelte metodologiche e di contenuto da adottare. La formazione dei docenti avviene attraverso la realizzazione di seminari e di convegni a tema (es., matematica e storia, matematica e arte, matematica e filosofia, matematica e letteratura, matematica e scienze), fruibili in presenza e in streaming; attraverso incontri di formazione periodici di formazione e co-progettazione (a cadenza mensile o quindicinale) che coinvolgono docenti del Liceo Matematico e i ricercatori del Dipartimento di Matematica di riferimento (Carullo et al., 2019). In tal modo è possibile concretizzare una stretta collaborazione tra i docenti universitari ed il mondo della scuola. Le attività sono progettate in relazione alla ricerca nazionale ed internazionale in Didattica della Matematica e in relazione alla rete territoriale in cui è inserita la singola scuola. In alcuni atenei (ad esempio, a Roma e Salerno) sono gli stessi docenti universitari a tenere alcune (o tutte) le lezioni nelle sezioni di liceo matematico. In altri (ad esempio, a Catania), i docenti universitari propongono ai docenti di scuola un numero limitato di attività per il successivo anno scolastico e, durante la formazione, fanno loro sperimentare queste attività; al termine della formazione, i docenti di scuola scelgono quali attività portare nelle classi. I docenti della scuola sperimentano in aula le attività messe a punto dal Team di lavoro, in orario curricolare o – più raramente – extracurricolare e forniscono periodicamente feedback sulle attività svolte. In taluni casi, questi feedback sono accompagnati dalla stesura di un diario di bordo. Le sezioni in questione sono nella maggioranza dei casi sezioni a sé, facenti parte di un curriculum di studi che trova spazio nella vigente legislazione scolastica (Liceo Scientifico in primis, seguito dal Liceo Classico, dal Liceo Linguistico e, in misura nettamente minore, dagli Istituti Tecnici e Professionali); meno frequentemente, si tratta invece di sezioni miste o classi aperte parallele delle quali fanno parte studenti appartenenti a diverse sezioni di un dato indirizzo di studi. Oggi sono coinvolte in tutta Italia circa n. 130 Scuole superiori di II grado, 19 Scuole secondarie di I grado, 7 Scuole primarie. Una certa apertura inizia a vedersi verso Scuole materne (alcune iniziative sono già state attuate dall'Ateneo di Salerno) e verso gli Istituti

Tecnici e Professionali (soprattutto, da parte dell'Università di Foggia), presenti in numero esiguo rispetto agli indirizzi liceali.

Data la varietà dei contesti locali interessati, ad ogni scuola, sulla base degli indirizzi coinvolti e considerando le esigenze del territorio di afferenza, viene dato spazio nella scelta o nella proposta di eventuali contenuti da trattare, sulla base delle tematiche affrontate in fase di formazione dei docenti del Liceo Matematico. Ad ogni modo, si mantiene il piano di studi dello specifico indirizzo di studi, coerentemente con le indicazioni nazionali (MIUR, 2010b, 2010c, 2010d), con approfondimenti e potenziamento di carattere laboratoriale. Come diretta conseguenza, le scuole promuovono a loro volta i percorsi di Liceo Matematico usando termini come "con curvatura matematica", "ad indirizzo matematico" oppure ancora "potenziato in matematica" - per dare l'idea di un percorso didattico in cui vengono approfondite le conoscenze degli studenti in matematica. In quest'ultimo caso, lo sguardo è rivolto sia ad argomenti curriculari, sia ad argomenti non previsti nei naturali curricola[81]. Ad esempio, nelle classi prime dei licei potenziati in matematica guidati dal gruppo di ricerca didattica di Torino sono state proposte diverse attività pensate per favorire il graduale passaggio dall'aritmetica all'algebra, ovvero dal senso del numero al senso del simbolo (es. criteri di divisibilità, quadrati magici, successioni numeriche, teoremi isoperimetrici) (Robutti & Arzarello, 2018). Se nelle classi seconde le attività proposte puntavano a favorire il passaggio dall'algebra al concetto di relazione (es. lettura di grafici, famiglie di rettangoli, moto del pendolo), nelle classi terze le attività erano pensate nell'ottica di favorire un graduale passaggio dal concetto di relazione a quello di funzione (es. sezioni coniche e paper folding, macchine matematiche per costruire le sezioni coniche). Oltre alle attività monodisciplinari, vi sono poi quelle attività interdisciplinari che coinvolgono, oltre a qualche ramo della matematica, anche la biologia, l'economia, la fisica, la storia, l'arte, l'italiano, ecc. In realtà, l'idea di partenza

[81] Il lavoro di Adesso, Capone, Fiore e Tortoriello (Adesso et al., 2019) racconta ad esempio un percorso interdisciplinare attorno ai teoremi di geometria sintetica (attualmente assenti nei manuali scolastici italiani). Nel corso dell'attività sono state simulate le antiche accademie scientifiche italiane del XVI-XVII secolo, per collocare l'attività in una precisa ambientazione storica e per indagare le possibili ricadute in termini motivazionali ed emozionali dell'attività stessa.

consiste nel ritagliare uno spazio didattico in più per la matematica e le scienze al fine di riflettere sui nuclei fondanti della matematica, di rielaborare contenuti e metodi propri della disciplina, di applicare la matematica alle altre discipline, nell'ottica di favorire dei collegamenti tra le cosiddette discipline "scientifiche" e le discipline "umanistiche". Tra le varie proposte didattiche, ne vengono qui riportate solo alcune a titolo esemplificativo, per meglio chiarire l'adozione di un approccio interdisciplinare per la didattica della matematica nei Licei Matematici. Si è scelto di descrivere alcune tra le più significative presenti in letteratura, dedicando ad esse il paragrafo successivo. Si evidenzia come, in ogni proposta didattica, la matematica riesca a trainare e, allo stesso tempo, unificare le discipline coinvolte nella diversità di proposte didattiche (Carullo et al., 2019).

4.3 *Alcuni esempi di attività interdisciplinari nei Licei Matematici*

Il progetto del Liceo Matematico nasce anzitutto dall'idea di creare un ponte culturale che colleghi la matematica e le altre discipline e, in senso più ampio, la cultura scientifica e la tradizione umanistica. Ad esempio, nella sezione di Catania è stato realizzato nell'a.s. 2017/18 un percorso didattico denominato "La lingua matematica" con l'obiettivo di studiare a fondo il concetto di teorema in matematica, promuovendo le capacità di dimostrazione e di argomentazione in alunni delle classi prime della scuola secondaria di secondo grado (Aquino et al., 2018). In accordo con Di Martino e Marcheschi, la ricerca in educazione matematica ha mostrato l'importanza di educare all'argomentazione in contesto matematico, non solo in quanto fondamentale per lo sviluppo della specifica educazione matematica dell'allievo; lavorare sull'argomentazione può invece costituire un contributo essenziale per l'educazione del cittadino maturo, consapevole, che può «dare un senso all'educazione matematica per tutti» (Di Martino & Marcheschi, 2018, p.56-57). Un caso studio, descritto in un recente contributo (Capone et al., 2020), si focalizza sugli aspetti linguistici e sui processi di rappresentazione semiotica nell'apprendimento della matematica, processi che stanno alla base della capacità di rappresentazione, ragionamento e comunicazione. L'approccio adottato nelle suddette proposte sembra essere multidisciplinare, in quanto le discipline Matematica e Italiano comunicano solo a livello di significato, mantenendo distinte le rispettive voci (Bakthin, 1981).

I ricercatori della sede di Parma, riprendendo l'approccio costruttivista, hanno collocato i moduli formativi del progetto sperimentale su cinque filoni: Geometria, Linguaggi, Applicazioni, Fisica, Arte e Scienza. La sede di Parma ha sin da subito dato al progetto un'impostazione transdisciplinare basata sulla coordinazione complessa di tutte le discipline, dove si rivela indispensabile integrare metodi e contenuti per definire opportuni schemi epistemologici e identificare obiettivi comuni. Il modulo di Fisica progettato per l'anno scolastico 2018/19, ad esempio, è stato pensato perché gli studenti facessero esperienza del metodo di indagine tipico della fisica, sul piano teorico, argomentativo e sperimentale; comprendessero la necessità di ricorrere al linguaggio matematico per formulare un problema in termini fisici; divenissero consapevoli del fatto che i dati elaborati sono significativi solo se correlati alla stima degli errori associati ai dati stessi. Nel modulo di Arte e Scienza, progettato per lo stesso anno, gli studenti hanno adottato un approccio matematico/fisico allo studio della visione e della prospettiva. Partendo dai contributi che la scienza (e, in particolare, la matematica) hanno dato allo sviluppo di alcune tecniche artistiche (es. prospettiva), si è voluto approfondire i concetti di proiezione, affinità, invariante e sezione conica e applicare la matematica alla costruzione rigorosa di immagini in 2D e in 3D. Gli scopi delle attività erano molteplici in quanto si è cercato di promuovere la capacità di visualizzazione nello spazio (nello spirito di Emma Castelnuovo) e di sottolineare l'importanza di un approccio teorico per garantire accuratezza e generalità nei metodi di rappresentazione prospettica. Sono stati inoltre ripresi problemi antichi (es. problema di quadratura nella Grecia Antica), metodi medievali e rinascimentali di rappresentazione piana di oggetti tridimensionali e mostrato l'uso di alcune macchine matematiche.

Un approccio interdisciplinare e transdisciplinare è quello che caratterizza anche lo studio dei modelli di dinamica delle popolazioni, promosso dalle sedi di Bari, Camerino e Palermo. Si tratta di modelli matematici che spiegano e prevedono l'evoluzione nel tempo degli individui che compongono una data popolazione. Nello studiare gli individui appartenenti ad una specie singola, si tiene spesso conto dello sviluppo degli individui e della fertilità degli stessi al variare dell'età; due specie in interazione tra loro possono competere per una risorsa comune oppure essere in rapporto preda/predatore; le relazioni multiple riguardano invece le molte specie distribuite all'interno di un ecosistema secondo diversi livelli trofici. Modellizzare un fenomeno naturale significa trovane una costruzione ideale del modo in cui il fenomeno si realizza, a partire da alcune caratteristiche fondamentali, dette variabili. Studiare i fenomeni naturali con l'aiuto di modelli matematici permette di poter ottenere previsioni quantitative e può risultare particolarmente utile nel prevedere l'evoluzione di un fenomeno su tempi lunghi; ad esempio, nella dinamica delle popolazioni ha particolare rilevanza prevedere se una popolazione può sopravvivere in determinati ecosistemi o quali condizioni possono favorire la sua estinzione. L'importanza di introdurre e approfondire gradualmente il concetto di modello matematico nella prassi didattica è più volte richiamata nelle Indicazioni Nazionali per i Licei (MIUR, 2010d), in riferimento a tutti gli indirizzi di studio; infatti, lo studio dei modelli matematici consente di rappresentare e descrivere i fenomeni nel mondo reale, comprendere l'importanza e l'uso di concetti propri dell'educazione matematica (e scientifica). Questo contribuisce, inoltre, allo sviluppo di una conoscenza interdisciplinare (OECD, 2019b) che identifichi i punti di connessione tra più discipline e integri conoscenze, metodi e contenuti propri di ciascuna disciplina (es. le equazioni differenziali in matematica, gli ecosistemi in biologia). Le teorie ed i concetti sviluppati all'interno di ciascuna oltrepassano in questo caso il confine naturale di ciascuna e interagiscono in misura ancora maggiore della sola interdisciplinarità. Si potrebbe parlare in tal senso di transdisciplinarità o di "super-interdisciplinarità" (Strathern, 2004, p.70), in quanto si persegue l'intento di giungere ad un linguaggio comune e alla costruzione di conoscenze spendibili tra le discipline (Collen, 2002), operando una sintesi globale (Lattuca, 2001). I confini tra le discipline convenzionali vengono così dissolti, in favore di una costruzione di significati entro contesti di vita quotidiana e problematiche reali: ciò è in accordo con la definizione di approccio transdisciplinare in ambito educativo elaborata di recente dall'UNESCO (2013).

Le attività proposte nei primi anni di sperimentazione presso il Liceo A.M. Enriques Agnoletti di Firenze (attivo dall'A.S. 2016/17) si caratterizzano per l'adozione di un approccio interdisciplinare ad ampio raggio. Nelle classi prime il modulo "Numeri e sistemi di numerazione" si apre prendendo in considerazione problemi classici dell'antichità e problemi che sono modelli di situazioni reali. I problemi, tratti da testi antichi, consentono di introdurre i diversi sistemi di numerazione utilizzati nel corso dei secoli (sumeri, babilonesi, egizi, arabo-indiani) e di inserire lo sviluppo dell'aritmetica in un contesto culturale più ampio, per meglio comprendere il contributo significativo che l'introduzione della numerazione indo-araba ha impresso allo sviluppo del commercio nel Mediterraneo. Lo studio, l'interpretazione e la comprensione degli enunciati dei problemi, scritti in linguaggio medievale, possono inoltre far riflettere gli allievi sulla varietà del linguaggio (antico o moderno, scientifico o letterario) e sul differente significato che una stessa parola può assumere a seconda del contesto in cui viene utilizzata. Qui l'approccio che emerge è pluridisciplinare e metadisciplinare. Per le classi terze era stato previsto un approccio monodisciplinare per lo studio delle coniche, una tematica tradizionalmente trattata per via analitica. L'obiettivo era quello di introdurre lo studio delle coniche per mezzo di situazioni problematiche significative per gli allievi, integrando i suggerimenti di Vailati con le proposte di Emma Castelnuovo e il Laboratorio di macchine matematiche dell'Università di Modena. Per conseguire questo obiettivo si è pensato di iniziare con la manipolazione di oggetti concreti (es. tracciare le coniche sfruttandone le proprietà invarianti che le caratterizzano, disegnare le coniche come inviluppo utilizzando la piegatura della carta, utilizzare le macchine per la costruzione delle coniche), lavorando in piccoli gruppi; in seguito gli studenti avrebbero dovuto trovare una relazione tra le coniche-luoghi e le coniche-sezioni e giungere ad una definizione unitaria di conica. Infine, avrebbero imparato a tracciare una conica e riconoscerne le proprietà mediante lo strumento "Geogebra".

Presso alcune scuole dislocate nelle sedi di Bari, Camerino, Catania, Catanzaro, Parma, Roma, Salerno e Udine sono stati previsti moduli di coding e pensiero computazionale: essi avrebbero introdotto gli allievi all'uso di linguaggi di programmazione per realizzare semplici programmi. In queste attività avrebbero imparato a formalizzare concetti articolati in un linguaggio strutturato, a padroneggiare le tecniche di calcolo, a migliorare l'elaborazione e strutturazione di processi deduttivi e di ragionamento, mettendo in pratica le conoscenze acquisite durante i percorsi didattici di logica e di informatica, come evidenziato da Carullo, Pugliese e Tortoriello (Carullo et al., 2019). Nelle classi di Avellino (le prime classi di Liceo Matematico in Italia), ad esempio, si è cercato di sviluppare un pensiero critico-matematico in forte nesso con contesti reali di elevata significatività. Gli studenti e le studentesse hanno sfruttato le competenze digitali, di creatività e anche di imprenditorialità acquisite nei moduli di logica e di informatica nel realizzare dapprima un'applicazione direttamente collegata a dei sensori: essa consente di ottenere un'analisi chimico-fisica di campioni di terriccio e quindi, a seconda dei risultati, scegliere un prodotto da coltivare piuttosto che un altro. Competenze più avanzate e affinate sono emerse per la realizzazione di un prototipo di mano robotizzata; questa può essere utilizzata in fase di riabilitazione post-operatoria, per aiutare l'articolazione delle dita di una mano (Carullo et al., 2019). L'approccio che emerge dalle suddette attività è sia pluridisciplinare, sia interdisciplinare, sia transdisciplinare. Una riflessione a parte viene data a due attività laboratoriali promosse dall'Università La Sapienza di Roma; entrambe si potrebbero caratterizzare quali attività multidisciplinari, in quanto le voci delle singole discipline non vengono mescolate né sintetizzate per la creazione di un nuovo linguaggio o una nuova disciplina, ma sapientemente armonizzate per dare luce a ciascuna. La prima attività [82] è stata promossa durante i seminari formativi rivolti ai docenti nell'anno accademico 2020/2021 e tratta proprio il tema della luce in Fisica. Si suppone sia stata pensata per una classe quinta di Liceo Matematico. Con essa si è cercato di rispondere alla domanda "La luce è un'onda o una particella?", ripercorrendo le tappe storiche del dualismo tra modello corpuscolare e modello ondulatorio e con l'ausilio di simulatori online di esperimenti di laboratorio; in aggiunta, sono stati discussi svariati esempi sull'uso della luce in Fisica delle particelle e in contesti di realtà (es. pannelli solari). La seconda attivitàche si è voluto riportare in questa sede è stata pensata per le classi prime e attuata in un Liceo Matematico nei pressi di Poggio Mirteto, in provincia di Rieti. Essa riguarda un'esperienza di Matematica e Scienze della Terra dal carattere multidisciplinare. L'obiettivo principale perseguito è quello di imparare ad orientare un mappamondo, in

[82] Per ulteriori informazioni, si rimanda alla pagina ufficiale: https://www.mat.uniroma1.it/sites/default/files/LM-21.01.22_Soffi.pdf.

modo che il suo asse risulti parallelo all'asse di rotazione della Terra e punti, di conseguenza, alla stella polare[83]. Per fare ciò, è richiesto l'uso di un mappamondo libero da sostegni, una base d'appoggio e materiali facilmente reperibili (nastro biadesivo, cartoncini, stuzzicadenti, macchina fotografica, un filo a piombo, una livella, squadre e, ovviamente, carta e matite), nello "stile" di Emma Castelnuovo. Nel corso dell'attività si vuole introdurre gli studenti allo studio delle Scienze della Terra e far sì che imparino – tra le altre cose - ad orientarsi usando i concetti di verticale e di orizzonte di un luogo; a conoscere il circolo di illuminazione e il suo movimento al passare del tempo, in relazione al verso di rotazione della Terra; a comprendere la differenza di orario tra un meridiano ed un altro (in altre parole, che l'ora non dipende dalla latitudine ma solo dalla longitudine); a saper distinguere le zone della Terra in cui è mezzogiorno o mezzanotte, in cui è l'alba oppure il tramonto; ad individuare le stagioni nei luoghi con diversa latitudine.

4.4 *Il laboratorio di matematica: una metodologia vincente per costruire conoscenze*

La metodologia d'intervento degli studi citati, comune alle tante scuole che hanno aderito al progetto nel corso degli ultimi 5 anni circa, è di tipo laboratoriale. Le tematiche, difatti, vengono spesso affrontate in un ambiente mentale (e, laddove possibile, anche fisico) che si distingue da quello in cui si svolgono le lezioni curricolari, in quanto gli studenti stessi si fanno *ricercatori*, scoprono, sperimentano, discutono e si relazionano con i pari e con i docenti, in un ambiente per loro libero e stimolante. L'approccio sociocostruttivista, sviluppatosi con l'approfondimento dell'opera di Vygotskij ad opera di illustri studiosi quali Jerome Bruner (1915-2016), ben si coniuga con l'idea di costruzione della conoscenza in una dimensione sociale e culturale; con l'idea, cioè, che il soggetto che

[83] Nelle slides reperibili alla pagina ufficiale: https://www.mat.uniroma1.it/liceo-matematico/gruppo4, è indicata le seguente procedura: ruotare il mappamondo in modo che lo zenit della propria città (individuata sul mappamondo) sia verticale alla superficie sferica; costruire con il cartoncino un triangolo rettangolo con un angolo acuto uguale alla latitudine L del luogo fissato; aiutandosi con il triangolo costruito, posizionare l'asse del mappamondo in direzione del meridiano locale (con il polo nord verso il nord geografico) e sollevare l'asse dalla parte del nord di un angolo L uguale alla latitudine del luogo. In altre parole, occorre sollevare l'asse del mappamondo in modo che poggi sull'ipotenusa del triangolo di cartoncino.

apprende costruisce conoscenza all'interno di contesti significativi, grazie all'interazione con gli altri attori sociali (i docenti, nel ruolo di 'esperti', ed i compagni), in vere e proprie comunità di indagine (Ligorio & Cacciamani, 2013). Gli studenti dei Licei Matematici operano in contesti per l'appunto significativi, che possono essere visti come delle comunità di indagine. Nonostante la flessibilità nell'organizzazione e nella scelta dei contenuti, ci sono delle linee comuni di intervento e dei principi nei quali si riconoscono le varie scuole che hanno aderito al progetto sperimentale: il consolidamento e l'approfondimento dei contenuti disciplinari di matematica; la forte impronta interdisciplinare delle attività sperimentali nelle quali la matematica ricopre il ruolo di collante culturale tra le discipline; l'uso di metodologie e tecnologie didattiche innovative; il carattere laboratoriale delle attività svolte; la forte collaborazione tra i docenti di scuola ed i docenti universitari. Per quanto qui non espressamente specificato, si rimanda al sito ufficiale https://www.liceomatematico.it/ ove è possibile anche reperire materiali dei seminari nazionali e dei convegni tematici tenuti in anni precedenti, i testi di alcuni protocolli d'intesa (e accordi di rete) stipulati tra scuole e università o tra Uffici Scolastici Regionali e i Dipartimenti universitari, le pubblicazioni che riguardano sperimentazioni in Licei Matematici, informazioni sul Gruppo UMI "Licei Matematici"[84].

Alla luce degli esempi riportati e di quanto finora discusso, si può dire che il fine ultimo che si propone il progetto è quello di sviluppare negli studenti, oltre alle consuete abilità e conoscenze procedurali, anche le capacità relative all'argomentazione e alla modellizzazione, un atteggiamento improntato alla collaborazione ed uno spirito critico. In altre parole, nello sperimentare le attività interdisciplinari nelle classi, si propone di contribuire allo sviluppo della *competenza matematica* degli studenti nel senso che viene meglio specificato nel paragrafo seguente. Sono questi i tratti salienti del Liceo Matematico, insieme ad una collaborazione stretta e proficua tra i docenti universitari e i

---

[84] Il Gruppo UMI sui Licei Matematici nasce nel 2020 all'interno dell'UMI e riunisce docenti universitari e docenti di Scuole superiori, impegnati insieme nella progettazione e realizzazione di nuove attività didattiche. L'obiettivo con cui è nato è essenzialmente quello di rafforzare il coordinamento fra le ricerche e le sperimentazioni svolte nelle varie sedi del paese (per approfondimenti, si suggerisce di visitare il sito ufficiale https://umi.dm.unibo.it/gruppi-umi-2/gruppo-umi-licei-matematici/).

docenti delle Scuole secondarie coinvolte nella progettazione e realizzazione delle attività nelle singole scuole.

4.5 *Finalità educative e didattiche del Liceo Matematico: ricadute sulla mathematica literacy degli studenti e sulla formazione dei futuri "cittadini"*

Quanto detto sinora è perfettamente in linea non solo con le idee di Morin, ma anche con le Indicazioni Nazionali per il curricolo (2010) nelle quali vengono suggeriti diversi temi ed approcci per favorire il collegamento, sul piano concettuale e dei metodi, tra la matematica ed altre discipline quali la chimica, la filosofia, la fisica, la storia, per fare qualche esempio. L'idea è cioè quella di superare la dicotomia tra cultura scientifica e cultura classica per concorrere ad una formazione completa ed equilibrata degli allievi, per arricchire il loro bagaglio culturale di "esperienze culturali" e di competenze spendibili nella vita personale e nella professione. I destinatari dell'azione didattica progettata su queste basi non vanno visti, pertanto, semplicemente in quanto allievi: essi sono già cittadini, o meglio, "cittadini in formazione". Il Liceo Matematico offre loro una via privilegiata per sviluppare quelle competenze di base essenziali per la formazione del cittadino quali il risolvere ed il porsi dei problemi, esprimere in modo adeguato una serie di informazioni, rappresentare e descrivere fenomeni reali, progettare e costruire modelli per descrivere la realtà, creare connessioni tra discipline diverse, tra conoscenze diverse.

Diventa essenziale, in tale contesto formativo, scegliere opportunamente i contenuti matematici da inserire nel percorso sperimentale in modo da elaborarli in conoscenze e poi in competenze [85] che oltrepassino il confine "naturale" della disciplina, ovvero siano spendibili in altri ambiti del sapere (Sbaragli, 2011). In accordo con D'Amore e Fandiño Pinilla (D'Amore e Fandiño Pinilla, 2003), «creando collegamenti tra conoscenze diverse, nasce l'idea di superamento della semplice conoscenza verso la competenza» e quest'ultima «ha una valenza affettiva e di atteggiamento così forte, da travalicare i

[85] La competenza è intesa dall'autrice Sbaragli (2011) come un processo che accompagna lo studente nel suo curriculum di studi; nel costruire una competenza, il soggetto si mette in moto intenzionalmente, impegna le sue conoscenze e abilità in relazione ad uno scopo. Tuttavia, la competenza non è il fine da perseguire, piuttosto è il "come" raggiungere un apprendimento duraturo e consapevole, che non emerga soltanto in un tempo ristretto o in un ciclo di studi.

contenuti disciplinari stretti» (D'Amore e Fandiño Pinilla, 2003, pp.333-334). Ciò si esplicita, ad esempio, attraverso un atteggiamento di curiosità, mosso dalla volontà e dal desiderio di usare le conoscenze possedute e di completarle con altre specifiche per raggiungere un certo scopo oppure portare a termine un dato compito. Ne è un esempio la sperimentazione descritta in un recente lavoro (Uttuso et al., 2019) durante la quale gli studenti di un Liceo Matematico di Palermo si sono cimentati nella traduzione di epigrafi del Museo Salinas di Palermo, risalenti all'epoca romana, integrando le conoscenze a loro note in lingua e letteratura latina con le conoscenze apprese sulla numerazione additiva usata dai Romani. Il concetto di competenza andrebbe pertanto ascritto più al processo di apprendimento che a quello di insegnamento (D'Amore e Fandiño Pinilla, 2003). Uno studio più recente di Sbaragli (2011) puntualizza inoltre come sia netta la distinzione tra *competenza in matematica* e *competenza matematica*, a partire dalla distinzione proposta da Fandiño Pinilla (Fandiño Pinilla, 2003). L'autrice intende la *competenza in matematica* come competenza individuale vista nello specifico ambito scolastico, in cui l'allievo entra in contatto con saperi ben specifici e si appropria di una parte di essi, formalmente o informalmente. Intende la *competenza matematica* come la capacità di un individuo di vedere ed interpretare la realtà matematicamente, dandole un *senso matematico*. Questa idea si ritrova anche in D'Andrea (D'Andrea, 2019), in cui si legge:

> *Ci si chiede spesso che differenza ci sia tra competenza in matematica e competenza matematica; la prima è intrinseca alla disciplina stessa, la seconda è, appunto, quanto qui delineato: il saper vedere e interpretare il mondo con gli strumenti che la matematica ci offre. Diventare competenti nella vita quotidiana, con gli occhi della matematica.*
>
> *(D'Andrea, 2019, p.132)*

Un esempio di costruzione di competenze matematiche nei Licei Matematici si ritrova in un recente lavoro di Robutti e Arzarello (Robutti & Arzarello, 2018). Nei licei potenziati in matematica guidati dal gruppo di ricerca di Torino viene sviluppato a tale scopo il *Metodo della Ricerca Variata* (MRV[86]) nei problemi con variazione. Questo metodo può essere

[86] Per ulteriori approfondimenti, si rimanda al testo Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M. (2004). The space of learning. In F. Marton, A. B. M. Tsui, P. P. M. Chik, P. Y. Ko, & M. L. Lo (Eds.). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 43-62.

strutturato in tre fasi (Robutti & Arzarello, 2018): nella prima si pongono gli allievi di fronte ad una situazione e si invitano gli stessi ad osservare, formulare domande, cercare risposte, congetturare e fornire una prima rappresentazione matematica di quanto discusso e condiviso in classe; nella seconda fase, si varia la situazione (si modifica o si nega qualche osservazione fatta) e si discute su cosa sia eventualmente cambiato; nell'ultima vengono prodotte nuove osservazioni, rappresentazioni, ulteriori domande e nuove risposte; gli allievi vengono avviati all'argomentazione matematica e spronati alla formulazione e validazione delle congetture fatte. Lo sviluppo del MRV in classe potrebbe sviluppare «un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi» (Robutti & Arzarello, 2018, p.118-119). Una più articolata definizione del concetto di competenza nell'ambito della matematica si ritrova in PISA 2018 (dove viene ripresa la stessa definizione presente in PISA 2015 e PISA 2012). Qui la competenza matematica, indicata come *mathematical literacy,* è definita come segue:

> *«La competenza matematica è quella capacità di un individuo di utilizzare e interpretare la matematica, di darne rappresentazione mediante formule, in una varietà di contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, fatti e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica ha nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate come richiesto a cittadini impegnati, che riflettono ed esercitano un ruolo costruttivo.»*
>
> *(OECD, 2019a, p.75, trad.).*

Non si può tuttavia parlare oggi di competenza matematica senza parlare di competenze-chiave per l'apprendimento permanente, tra le quali rientra anche la competenza matematica. All'interno del Quadro europeo delle qualifiche per l'apprendimento permanente datato 2018 (Consiglio dell'Unione Europea, 2018) si parla del conseguimento della competenza matematica, facendo riferimento alla padronanza dei contenuti matematici -senza trascurare affatto gli aspetti procedurali- e allo sviluppo del pensiero razionale al fine di usare gli strumenti matematici in svariati contesti:

> *Partendo da una solida padronanza della competenza aritmetico-matematica, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che sulla conoscenza. La competenza matematica*

comporta, a differenti livelli, la capacità di usare modelli matematici di pensiero e di presentazione (formule, modelli, costrutti, grafici, diagrammi) e la disponibilità a farlo.
(Consiglio dell'Unione Europea, 2018, p.9)

Qui si trovano anche delle chiare raccomandazioni che riguardano il conseguimento di specifiche abilità e l'atteggiamento verso la matematica, legati all'acquisizione di una competenza matematica:

La conoscenza necessaria in campo matematico comprende una solida conoscenza dei numeri, delle misure e delle strutture, delle operazioni fondamentali e delle presentazioni matematiche di base, la comprensione dei termini e dei concetti matematici e la consapevolezza dei quesiti cui la matematica può fornire una risposta.
Le persone dovrebbero saper applicare i principi e i processi matematici di base nel contesto quotidiano nella sfera domestica e lavorativa (ad esempio in ambito finanziario) nonché seguire e vagliare concatenazioni di argomenti. Le persone dovrebbero essere in grado di svolgere un ragionamento matematico, di comprendere le prove matematiche e di comunicare in linguaggio matematico, oltre a saper usare i sussidi appropriati, tra i quali i dati statistici e i grafici, nonché di comprendere gli aspetti matematici della digitalizzazione.
Un atteggiamento positivo in relazione alla matematica si basa sul rispetto della verità e sulla disponibilità a cercare le cause e a valutarne la validità.
(Consiglio dell'Unione Europea, 2018, p.9)

Si evince l'importanza non solo di "conoscere" la matematica ad un livello superficiale, ma di conoscerla ad un livello molto più profondo, così da saperla applicare consapevolmente in contesti di vita quotidiana come anche nella ricerca della verità, cioè in risposta a quesiti e problemi più o meno rilevanti. Tale conoscenza richiama l'approccio interdisciplinare discusso in precedenza, a livello metadisciplinare, pluridisciplinare e transdisciplinare. Secondo Pellerey (2004), nella definizione di competenza (in qualsivoglia campo disciplinare), include oltre ai fattori cognitivi anche i fattori affettivi e volitivi, ritenendo che l'individuo debba aprirsi «all'esterno, valorizzando la capacità di sfruttare le risorse disponibili» (Baccaglini-Frank et al., 2018, p.92). Egli definisce infatti la competenza come segue:

La capacità di far fronte a un compito o a un insieme di compiti, riuscendo a mettere in moto e a orchestrare le proprie risorse interne, cognitive, affettive e volitive e a utilizzare le risorse esterne disponibili in modo coerente e fecondo.
(Pellerey, 2004, p.12)

In questa sede, tuttavia, non si vuole approfondire il concetto di competenza matematica, per il quale vi è già una vasta letteratura di approfondimento. Si vuole solamente richiamare alcune interpretazioni del suddetto concetto per mettere in risalto come il Liceo Matematico, con la sua impronta didattica interdisciplinare, possa contribuire a potenziare la mathematical literacy degli studenti (Capone et al., 2016b). Del resto, per "vedere" la matematica nella vita quotidiana, per descrivere matematicamente il mondo, come auspicato nelle Indicazioni Nazionali (2010) e -in tempi più recenti- dal Consiglio dell'Unione Europea, non è sufficiente che gli studenti conoscano i contenuti fondanti della disciplina. È necessario, invece, che riescano a mettere in atto il proprio intero bagaglio culturale in contesti di apprendimento multidisciplinari nei quali è possibile fare esperienza delle diverse sfaccettature della matematica, come i percorsi di Liceo Matematico. In tal modo, l'apprendimento della matematica può divenire significativo, ricco, coinvolgente anche sul piano affettivo e motivazionale (Sbaragli, 2011). Sorge spontaneo, a questo punto, chiedersi come sia possibile sollecitare questa competenza matematica. Per riuscire nell'arduo intento, Frapolli e Sbaragli (Frapolli & Sbaragli, 2012) propongono di creare le condizioni affinché lo studente si senta libero di muoversi, di inventare, di scegliere, di creare:

> *Gli allievi devono essere stimolati a una continua verbalizzazione di idee, intuizioni e proposte; bisogna rimuovere la convinzione erronea che fare matematica consista nel trovare l'unica soluzione corretta e che questa vada trovata, rifuggendo gli errori, mediante l'applicazione e il trattamento di definizioni, formule e procedimenti standard di cui solo l'insegnante è depositario.*
>
> *(Frapolli & Sbaragli, 2012, p.2)*

4.6 *Rilevanza sociale e culturale del Liceo Matematico*

Alla luce di quanto espresso sopra, è importante sottolineare, inoltre, l'importanza del percorso didattico del Liceo Matematico sul piano culturale e sociale. Le ragioni sono molteplici: perché è volto a completare, in senso propriamente interdisciplinare, la formazione delle nuove generazioni come cittadini e come persone (Capone et al., 2017); perché intende valorizzare la matematica «come scienza formativa per la crescita e lo sviluppo dell'individuo» (Massotti, 2017, p.38); perché contribuisce a sviluppare nei giovani un'attitudine ad organizzare la conoscenza (Capone et al., 2016b); perché può incentivare un modo di pensare capace di *solidarizzare* conoscenze separate, capace di una visione d'insieme, che sarebbe pertanto «adatto a favorire il senso della responsabilità e della cittadinanza» (Morin, 2000, p.101). Ciò è confermato da un recente studio (Capone et al., 2017) pubblicato dalla rivista dell'UMI nel quale si legge:

> *Le finalità educative assumono quindi nel Liceo Matematico una rilevanza sociale: crediamo che una mente più aperta e più attenta a cogliere le connessioni tra matematica e applicazioni e tra matematica e cultura umanistica sia anche più pronta e matura ad affrontare l'impegno del "cittadino."*
>
> *(Capone et al., 2017, p.2)*

Il progetto del Liceo Matematico vuole, per l'appunto, creare le condizioni per cui gli studenti possano fare un'esperienza concreta e unica della matematica; possano sentirsi coinvolti in attività di apprendimento volte ad accrescere la loro formazione nel senso più ampio del termine; possano sviluppare un pensiero critico, una maggiore padronanza nell'uso del metodo scientifico e la capacità di confronto tra le discipline; possano sperimentare le molteplici sfaccettature della matematica in contesti di realtà come pure in altre branche del sapere; possano comprendere «l'importanza della dimensione culturale matematica, nel senso di habitus mentale» (Frapolli & Sbaragli, 2012, p.1). È questa anche l'idea di D'Andrea (D'Andrea, 2019) quando suggerisce di soffermarsi a considerare il ruolo che la matematica svolge nella società odierna a livello di educazione dei giovani. Questo è solo il primo passo per suscitare negli insegnanti di Matematica una maggiore consapevolezza del valore e dell'utilità della disciplina nella crescita formativa e professionale dei futuri cittadini. «Ciascun professore sostiene D'Andrea - dovrebbe insegnare la propria materia con la coscienza del fatto che essa è uno dei tanti modi per comprendere i mondi e quindi *aiutare il cittadino ad inserirsi in modo attivo nella società*» (D'Andrea, 2019, p.130). Ciò è vero, in modo particolare, anche per chi insegna la matematica in quanto «contribuisce in modo essenziale alla formazione della persona, dandogli gli elementi di quella scienza che è ormai fondamentale per tutta la tecnica e addirittura per la vita spicciola e quotidiana» (D'Andrea, 2019, p.128).

Nel lavoro di Carullo e altri (Carullo et al., 2019), viene presentato proprio il punto di vista dei docenti di un Liceo Matematico di Avellino, il primo dove è stato sperimentato per la prima volta il progetto nazionale del Liceo Matematico. I/le docenti intervistati/e hanno risposto ad un questionario strutturato sull'efficacia del progetto e sulle ricadute didattiche in relazione alla formazione ricevuta dai ricercatori universitari. L'esperienza è stata valutata al termine del ciclo didattico ed è risultata estremamente proficua secondo gli intervistati. Le parole espresse dagli autori del lavoro su citato conferiscono alla sperimentazione un valore plurimo, sul piano dell'educazione dei giovani e della formazione dei docenti.

> *Il L.M. sembra aver migliorato le prestazioni degli allievi in termini di vita reale, rendendoli consapevoli che la matematica non è fine a sé stessa ma è un modo per rileggere la realtà che ci circonda, per affrontare e per risolvere i problemi ad essa connessi. Il L.M. ha rappresentato in questi anni e continua a rappresentare inoltre l'occasione per implementare e diffondere le buone pratiche tra docenti, per favorire la proficuità di un'azione didattica interdisciplinare data dal confronto di docenti di diverse discipline. Finalmente è iniziato questo dialogo pluridisciplinare tanto desiderato che sarà il nostro punto di forza!*
>
> *(Carullo et al., 2019, p.289)*

La discussione degli autori non trascura la formazione ricevuta dai docenti; tutt'altro, ne enfatizza l'importanza sia in quanto ha «permesso di perseguire con maggiore efficacia gli obiettivi di indirizzo sul profilo in uscita di un allievo di Liceo Scientifico secondo le indicazioni nazionali ed il PECUP». Ciò è stato possibile a partire da una didattica laboratoriale e dalla scelta di compiere azioni didattiche centrate sul nesso fra umanesimo e scienza, fra tradizione umanistica e cultura scientifica. Gli/le allievi/e ne hanno beneficiato individuando le reciproche relazioni tra forme distinte del sapere e arrivando così a padroneggiare i vari registri linguistici. Del resto, scrivono gli stessi autori:

> *Per una scuola che voglia stare al passo coi tempi e rispondere in modo efficace ai bisogni formativi dello studente, in una società in continuo mutamento, è fondamentale promuovere una cultura in grado di mettere in evidenza l'importanza della formazione dei docenti.*
>
> *(Carullo et al., 2019, p.283)*

Fin dalla sua nascita, il Liceo Matematico punta ad intervenire sul potenziamento delle competenze matematiche, linguistiche, logiche e -nel senso più generale del termine-

"culturali" degli studenti, accendendo il loro la curiosità e l'immaginazione; sull'apprendimento della matematica attraverso tematiche interdisciplinari che possano stimolare una visione più "ampia" della disciplina; sul favorire i collegamenti tra la matematica e le altre discipline (storia, italiano, arte, musica, geografia, filosofia, biologia ad esempio), per contribuire all'unificazione dei saperi auspicata da Morin. Riguardo alle possibili ricadute del progetto, a medio e lungo termine, sul piano produttivo e occupazionale, forse è ancora presto per pronunciarsi. Di fatto, però, in una società come quella contemporanea in cui è richiesta una sempre maggiore capacità di padroneggiare ed analizzare le informazioni, interpretare fenomeni complessi e di interfacciarsi con problematiche multidimensionali e multidisciplinari, il Liceo Matematico vuole dare una risposta concreta cercando una sintesi tra cultura scientifica e cultura umanistica, tra scienza e umanesimo facendo leva sulla matematica quale *collante culturale* (Capone et al., 2017).

4.7 *Incipit del Liceo Matematico a Palermo con formazione docenti e fondamenta della sperimentazione*

Dalla sua nascita, l'iniziativa promossa inizialmente dall'Università di Salerno ha coinvolto più di duecento classi e più di quattromila studenti in tutto il territorio italiano ed è stata accolta con vivo interesse dai Dipartimenti di Matematica di altre dieci Università italiane. Una di esse è l'Università di Palermo, presso la quale si è svolta una parte notevole dell'attività di ricerca qui presentata. La sperimentazione in cui si inserisce il progetto di ricerca ha gettato le fondamenta nell'anno 2018, quando non vi era ancora alcuna sezione di Liceo Matematico a Palermo. Tra il mese di gennaio 2018 e il mese di maggio 2018 i futuri docenti del Liceo Matematico hanno partecipato ad un corso formativo della durata complessiva di 60 ore, messo a punto ed erogato dal Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Palermo in collaborazione con i Dipartimenti di Economia e Statistica, di Lettere e di Fisica dell'Ateneo. Le ore del corso son state così ripartite tra i Dipartimenti: la formazione curata dai docenti universitari del Dipartimento di Matematica e Informatica d'Ateneo comprendeva n.7,5 ore dedicate al modulo formativo "Matematica e Arte", n.7,5 ore al modulo "Matematica per la biologia", n.7,5 ore al modulo "Matematica e Letteratura" e n.7,5 ore al modulo "Matematica e Artefatti"; il Dipartimento di Economia e Statistica ha curato il modulo di "Statistica" della durata di n.7,5 ore; il Dipartimento di Lettere ha curato i moduli intitolati "Linguaggio ed epistemologia delle scienze umane e naturali" e "Matematica e Filosofia. Episodi da una storia esaltante", della durata di n.7,5 ore ciascuno; il Dipartimento di Fisica ha infine curato il modulo di "Matematica per la Fisica", anch'esso della durata di n.7,5 ore. Le ore di lezione seguite sono state valide come ore di aggiornamento per i partecipanti, la cui presenza per ciascun modulo si è attestata tra le venti e le settanta persone circa (ciascun partecipante ha avuto infatti la libertà di scegliere almeno tre moduli tra quelli proposti). Nel corso delle lezioni sono stati proposti ai docenti laboratori e seminari su una varietà di argomenti che spaziavano dalle tassellazioni nel Palazzo dell'Alhambra alle letture degli scritti di Galileo, dallo studio dei modelli epidemiologici al laboratorio di geometria dinamica, dalla crittografia agli esperimenti di termodinamica. Durante i laboratori e i seminari, difatti, è stato possibile approfondire le conoscenze sulle applicazioni della matematica in altre discipline e nella vita quotidiana, assistere a letture commentate di trattati d'arte (ad esempio, il trattato "De perspectiva pingendi" di Piero della Francesca, XV sec.), testi scientifici nella letteratura greco-romana e di opere letterarie ispirate a temi prettamente matematici (ad esempio, "Women, Art and Geometry in Southern Africa" di Paulus Gerdes, 1998). Il corso è stata anche un'occasione per partecipare a laboratori sull'uso delle TIC (ad esempio, il laboratorio sull'uso del software "Tinkercad" per progettare macchine matematiche, un artefatto utile allo sviluppo delle abilità di orientamento visuo-spaziale in uno spazio virtuale tridimensionale).

Questa ampia offerta formativa erogata dai docenti universitari ha fatto sperimentare ai docenti coinvolti alcune delle rappresentazioni mentali, dei concetti e preconcetti che gli studenti mettono in atto nell'approcciarsi ad un nuovo contenuto da apprendere; al contempo, ha tracciato la strada per le strategie, le metafore e le teorie dell'apprendimento che il docente potrebbe attuare per organizzare quel contenuto, per renderlo più accessibile a ciascuno studente ed adattarlo agli interessi e alle abilità di ciascuno. Si può dire che il corso di formazione ha formato i docenti sul piano dei contenuti ma anche sul piano pedagogico, alla luce del quadro teorico del PCK (cap. 2), senza tralasciare l'uso degli artefatti culturali in relazione agli specifici obiettivi educativi (Mariotti & Maffia, 2018), e alla luce del quadro teorico della mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009; Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Ogni docente ha partecipato con un vivo interesse ed entusiasmo, è stato guidato verso un'attenta riflessione sull'importanza del *Pedagogical Content Knowledge (*PCK) (Shulman, 1986) nell'insegnamento, sul ruolo del laboratorio di matematica nell'apprendimento e sulla necessità di una programmazione interdisciplinare, anziché multidisciplinare, che possa raccogliere i saperi e fonderli assieme. Alcuni dei docenti coinvolti in fase di formazione hanno messo in atto una collaborazione proficua dentro il contesto del Liceo Matematico in due scuole palermitane. Le suddette scuole sono state, insieme a molte altre scuole d'Italia, coinvolte in prima persona nella fase sperimentale del progetto. Questa è presentata nel capitolo seguente, a partire dalla definizione delle domande di ricerca che si è voluto indagare ed esplicitando la metodologia d'intervento scelta.

CAPITOLO V

Le domande di ricerca e la metodologia d'intervento

5.1 *Introduzione*

Nel presente capitolo si descrivono il contesto in cui si inserisce la ricerca sperimentale, le domande di ricerca ed il contributo che si offrire dando ad esse una risposta per mezzo della sperimentazione condotta. Nel primo paragrafo si fa riferimento alla vasta letteratura esistente sulla motivazione degli studenti verso l'apprendimento della matematica e ad alcuni studi che si sono occupati della relazione tra processi cognitivi e motivazione. Ad oggi, tuttavia, non è stato ancora indagato il rapporto tra la didattica interdisciplinare di un Liceo Matematico e la motivazione degli studenti verso l'apprendimento della matematica. Le prime ricerche sul Liceo Matematico si sono perlopiù focalizzate sullo sviluppo della mathematical literacy degli studenti (es. Capone et al., 2020; Aquino et al., 2018; Massotti, 2017; Capone et al., 2016a) o sulla formazione dei docenti (es. Branchetti et al., 2019; Cerroni et al., 2018); molta meno attenzione è stata riposta sugli aspetti motivazionali (es. Adesso et al., 2019). Questa tesi vuole offrire un contributo agli studi sulla motivazione per verso la matematica e, al contempo, alla discussione sui Licei Matematici, indagando se, in che misura e in che modo le lezioni interdisciplinari di un Liceo Matematico possano intervenire sulla motivazione di uno studente dirigendone il comportamento verso una regolazione intrinseca. L'assunto di partenza è costituito dal presupposto che il Liceo Matematico rappresenti un contesto capace di supportare l'autonomia e il senso di competenza dell'allievo/a e, dunque, capace di favorire lo sviluppo di una motivazione intrinseca alla luce della SDT (Deci & Ryan, 1985; Ryan & Deci, 2000). I destinatari pensati inizialmente per la ricerca sono gli studenti frequentanti il Liceo Matematico nell'anno scolastico 2018/19 ma, dopo un'attenta riflessione, si è scelto di selezionare i contesti di Liceo Matematico secondo opportuni criteri (cfr. paragrafo 3) e di volgere lo sguardo anche ai docenti coinvolti. Per avere il maggior numero possibile di dati, si è scelto di rivolgere la ricerca agli studenti di grado 9 e di indagare se e in che misura l'esperienza del Liceo Matematico avesse diretto la personale motivazione di ognuno verso l'autodeterminazione. Per fare ciò, è stato somministrato agli studenti del Liceo Matematico (di seguito, *sottocampione 1*) e ai coetanei della medesima scuola (di seguito, *sottocampione 2*) un test strutturato in due momenti distinti dell'anno scolastico 2018/19. Il confronto, a livello quantitativo, tra le risposte pervenute dai due sottocampioni nel primo momento e nel secondo momento (a conclusione dell'anno scolastico) avrebbe permesso di evidenziare eventuali differenze in termini di motivazione e rispondere alla prima domanda di ricerca. Altre due domande di ricerca sono scaturite quasi naturalmente e puntano a capire in che modo i riferimenti alla Storia della Matematica e il collaborative teaching attuato dagli insegnanti durante le lezioni improntate all'interdisciplinarità siano stati dei possibili fattori determinanti per una motivazione autodeterminata negli studenti del Liceo Matematico. Per avere delle informazioni più complete e più libere, si è scelto di somministrare al sottocampione 1 un secondo questionario, con domande aperte e chiuse, col quale indagare cosa avesse presumibilmente influenzato la loro motivazione verso la matematica. In ultimo, si è voluto indagare le eventuali ricadute -in termini professionali e formativi- del collaborative teaching nel gruppo di docenti di una parte rappresentativa del campione: ad essa è stata rivolta a chiusura dell'anno scolastico 2018/19 un'intervista diretta semi-strutturata contenente quesiti inerenti le attività co-pianificate, gli obiettivi attesi dagli alunni e quelli effettivamente raggiunti al termine dell'anno scolastico, i benefici che ne sono derivati per la professione svolta secondo aspetti emotivi (es. autostima), logistici (es. accesso a idee e materiali altrui), cognitivi (es. approfondimenti di tematiche curricolari e non), e le eventuali ricadute sugli studenti (es. maggiore interesse per la matematica, maggiore senso di autoefficacia e di competenza, maggior valore assegnato alla disciplina, maggiore curiosità verso gli argomenti trattati in matematica e/o in altre discipline). Per ciascuna domanda di ricerca si specificano la metodologia scelta e gli strumenti adottati (cfr. quarto paragrafo). Infine (cfr. quinto paragrafo), si esplicitano le fasi della ricerca condotta per elencazione, allo scopo di rendere più chiara e schematica la discussione degli esiti.

5.2 *Le domande di ricerca*

Nel capitolo precedente si è visto come la proposta didattica del Liceo Matematico, dall'impronta fortemente interdisciplinare e votata allo sviluppo della mathematical literacy negli allievi, racchiuda in sé le riflessioni sulla riforma del pensiero e dell'insegnamento teorizzata da Morin (2000). Tali riflessioni hanno suscitato profonde considerazioni nel mondo accademico tutto e, in particolare, richiamando uno studio già citato di D'Amore e Fandiño Pinilla (D'Amore e Fandiño Pinilla, 2003) sulle competenze quale obiettivo nella costruzione di conoscenza. Gli autori osservano che «la competenza ha una valenza affettiva e di atteggiamento così forte, da travalicare i contenuti disciplinari stretti», difatti:

> *quando si tratta di comporre competenze su contenuti diversi, anche "osando" al di là delle consuetudini della vita d'aula, dunque creando collegamenti tra conoscenze diverse, nasce l'idea di superamento della semplice conoscenza verso la competenza: ciò si esplicita non soltanto attraverso la constatazione della costruzione di una conoscenza, ma anche attraverso atteggiamento, volizione, gusto, desiderio,… non solo di far uso delle conoscenze possedute, ma anche di completare le conoscenze che si rivelano insufficienti nel corso del loro uso, dunque la volontà esplicita di completare conoscenze specifiche, per esempio attraverso l'appropriazione di taluni contenuti che mancano per raggiungere uno scopo.*
>
> *(D'Amore e Fandiño Pinilla, 2003, p.333)*

In altre parole, una didattica che esce fuori dagli schemi, fuori dai muri issati tra un sapere ed un altro, puntando più verso la convergenza che verso la separazione di saperi diversi, fa sì che gli studenti possano andare finanche oltre la costruzione di una semplice conoscenza ed acquisire competenze autentiche. Inoltre, le competenze raggiunte per mezzo di una didattica interdisciplinare chiamano in causa fattori affettivi dell'apprendimento (*atteggiamento, volizione, gusto, desiderio*). Ciò è confermato da un recente studio (An et al., 2016) sulla pedagogia matematica interdisciplinare[87] secondo il quale i vantaggi riscontrabili in lezioni interdisciplinari di matematica e musica sui processi di apprendimento-insegnamento toccano la sfera della motivazione degli studenti (incontrano gli interessi ed i bisogni degli studenti, suscitano curiosità ed immaginazione), delle competenze (conferiscono significato a contenuti e concetti matematici, facilitano i processi di comprensione e di problem solving attraverso le connessioni tra i saperi) e

[87] Lo studio è stato condotto con futuri maestri che hanno sperimentato la pedagogia matematica interdisciplinare nella co-progettato ed implementazione di una lezione interdisciplinare di matematica e di musica con un gruppo di studenti volontari delle elementari.

dell'autoefficacia. Seppur vi siano diversi studi in didattica della matematica sulla relazione tra processi cognitivi e motivazione (Turner et al., 1998; Zan et al., 2006), ad oggi, data la tenera età del Liceo Matematico, la ricerca non ha ancora indagato il rapporto tra la didattica interdisciplinare di un Liceo Matematico (tenuto conto delle linee generali, comuni alla vastità di Licei Matematici attivati in Italia sinora) e la motivazione degli studenti verso l'apprendimento della matematica. Questa tesi vuole offrire un contributo alla ricerca che consiste proprio nell'indagare questo rapporto, assumendo che il Liceo Matematico costituisca un contesto che supporta l'autonomia dell'allievo e la sua competenza. Ma una didattica interdisciplinare porta in seno la volontà di approfondire i legami tra la matematica e le altre discipline, di creare dei nessi tra umanesimo e scienza, di rintracciare i momenti storici in cui le loro strade si sono incrociate. La Storia della matematica potrebbe allora, *a fortiori*, promuovere il dialogo tra le discipline (come afferma Vailati) ed intervenire sulla motivazione degli studenti verso la matematica stessa (Cerroni, 2018b; Lim & Chapman, 2015b). Difatti, richiamando le raccomandazioni rivolte agli insegnanti da Castelnuovo (1907), tener conto del processo storico che ha condotto studiosi e scienziati ad indagare certi fenomeni o a porsi dei problemi, pur commettendo degli errori nel tentativo di trovare un perché e una possibile risoluzione, può favorire una predisposizione positiva dello studente verso la disciplina basata sulla curiosità, sul desiderio di sperimentare la matematica in situazioni concrete e, quindi, nel dialogo con le altre discipline per l'appunto. Alcuni ricercatori (Capone et al., 2016b) sostengono infatti che un'educazione che coniughi le culture cosiddette umanistica e scientifica trova la sua naturale espressione nella ricerca storica dei contenuti matematici e nel farli rifiorire in contesti "moderni", seguendo le attuali indicazioni ministeriali. A tal proposito, il lavoro di Colella (2016) può offrire un ulteriore spunto di riflessione. A conclusione dello studio da lei condotto sulle prospettive di genere in Didattica della Matematica, Colella (2016) individua alcuni atteggiamenti didattici volti sia a promuovere il successo formativo (in termini di competenze e auto-efficacia), sia a rimuovere il gap di genere. Condizione necessaria (ma non sufficiente) è che il/la docente che accoglie queste indicazioni metodologiche sia consapevole e mostri un'adeguata attenzione per le dinamiche di genere. L'autrice riflette, in particolare, sul fatto che la «contestualizzazione storica dei contenuti» di matematica può essere estremamente utile per *umanizzare* la matematica e «restituire una dimensione etica alle scienze e alla tecnologia»:

> *Può essere utile per ragazze e ragazzi una contestualizzazione storica dei contenuti capace di ridare un soggetto, e quindi un percorso umano, fatto di fatica, passione, impegno, errori e responsabilità sociale alla pratica scientifica. Un approccio, questo, che non deve essere scambiato con una semplice aggiunta della storia della matematica o della scienza all'insegnamento dei suoi contenuti, piuttosto un tentativo di restituire una dimensione etica alle scienze e alla tecnologia, in termine di processi, metodi di lavoro, e radicamento nel contesto socio-culturale di riferimento.*
>
> *(Colella, 2016, p.219)*

Un esempio concreto si può trovare in un recente contributo alla ricerca di Cinzia Cerroni (Cerroni, 2018a) che richiama la lunga tradizione della Storia della matematica nell'insegnamento. Qui viene presentato il percorso laboratoriale di Crittografia, più volte sperimentato nei laboratori del PLS (Piano Lauree Scientifiche) dell'Università di Palermo, quale percorso didattico dove l'interdisciplinarità e la Storia, fatta di avvenimenti e personaggi, costituiscono fattori chiave per stimolare l'apprendimento della matematica e contestualmente di altre discipline. Si legge infatti:

> *La crittografia si presta ad un percorso che segue l'evoluzione storica degli argomenti. Inoltre, la sua valenza interdisciplinare, stimola la motivazione allo studio di argomenti di matematica (quali la matematica dell'orologio, la statistica, la combinatoria, etc.) e a temi storici collegati (Seconda guerra mondiale, etc.).*
>
> *(Cerroni, 2018a, p.143)*

Le riflessioni riportate sinora hanno quindi fatto sorgere spontanea una prima domanda di ricerca:

Q_1: In che termini le lezioni interdisciplinari di un Liceo Matematico contribuiscono ad una motivazione autodeterminata verso l'apprendimento della matematica?

Il principale quadro teorico di riferimento è costituito dalla citata Self-Determination Theory (Deci & Ryan, 1985; Ryan & Deci, 2000). Secondo tale teoria, la motivazione può essere espressa in termini di graduale aumento dell'autodeterminazione di un individuo ed è distinta in tre tipologie principali: amotivazione, motivazione estrinseca e motivazione intrinseca. Ciascuna di esse riflette un comportamento più o meno autonomo o autoregolato. Da un primo tentativo di risposta è presto emerso che si trattava di una domanda fin troppo generica, data la varietà di contesti laboratoriali in cui il Liceo Matematico è stato attuato negli anni in tutta Italia. Questo ha condotto dapprima ad indagare ciò che caratterizza, ad un livello più profondo, la didattica interdisciplinare (ossia il collaborative teaching); poi, a selezionare i predetti contesti di Liceo Matematico attivati nell'anno scolastico in considerazione (2018/2019). Coerentemente con le considerazioni sopra riportate, si è scelto di indagare più da vicino quelle sezioni dove le lezioni interdisciplinari fossero tenute da docenti della scuola e allo scopo di creare dei veri e propri ponti culturali (non soltanto per potenziare le conoscenze e le competenze in matematica e/o in fisica). In altre parole, i contesti ai quali si rivolge la ricerca condotta sono nello specifico quei Licei Matematici ove è stato attuato il collaborative teaching tra i docenti (attuato in fase di co-programmazione e co-docenza delle lezioni interdisciplinari), nell'ottica di promuovere una formazione completa, equilibrata, ricucendo i lembi di una cultura spezzata in due «blocchi» (Morin, 2000). Tenendo presente che il primo anno di Liceo Matematico è l'anno che può fare la differenza sulla motivazione degli studenti, si è scelto di coinvolgere i soli studenti delle classi prime. In seguito, si è giunti all'elaborazione di tre domande di ricerca più dettagliate che non hanno ancora trovato risposta in letteratura dal momento che non è stato indagato il collaborative teaching nel contesto didattico di un Liceo Matematico:

Q_1: In che misura le lezioni interdisciplinari di un Liceo Matematico contribuiscono ad una motivazione autodeterminata verso l'apprendimento della matematica negli studenti di grado 9[88]?

Q_2: In che modo i percorsi interdisciplinari centrati sulla Storia della Matematica possono influenzare la motivazione verso la matematica in uno studente di grado 9 del Liceo Matematico?

[88] Si tratta degli studenti di 14-15 anni che frequentano il primo anno di una Scuola Secondaria Superiore di II grado.

Q_3: In che termini il collaborative teaching nel contesto del Liceo Matematico può intervenire sulla motivazione verso la matematica negli studenti di grado 9?

Con la prima domanda di ricerca si è voluto indagare su *quali* tipologie di motivazione (nella teoria dell'autodeterminazione) può intervenire il Liceo Matematico. La risposta attesa è che quest'ultimo possa intervenire sulla motivazione estrinseca o introiettata ed orientare lo studente verso una motivazione intrinseca ed un comportamento autoregolato. Nel caso in cui ciò avvenga, con la seconda domanda di ricerca si è voluto indagare se l'uso della Storia della Matematica possa costituire una delle ragioni, uno dei *perché* gli studenti del Liceo Matematico siano più orientati verso una motivazione intrinseca ad apprendere la matematica. La terza domanda di ricerca vuole indagare *come* il collaborative teaching, nella forma della co-progettazione e della co-docenza, abbia eventualmente costituito un fattore determinante per la motivazione all'apprendimento della matematica. Guardando poi ai docenti di Liceo Matematico, ci si è chiesti quali fossero le possibili ricadute della sperimentazione didattica sulla crescita formativa e professionale degli stessi docenti. Una quarta domanda di ricerca è stata quindi formulata in questi termini:

Q_4: Quali sono le possibili ricadute del collaborative teaching, attuato per realizzare lezioni interdisciplinari, sulla crescita formativa e professionale dei docenti del Liceo Matematico?

Il punto di vista da cui si vogliono esaminare le ricadute del collaborative teaching nel Liceo Matematico è quello dei docenti. Nella stessa direzione si colloca un recente lavoro (Carullo et al., 2019) nel quale si è cercato di indagare l'efficacia delle proposte didattiche di un Liceo Matematico e le ricadute di queste nella prassi didattica, nella didattica curricolare, nell'atteggiamento degli studenti, nello sviluppo delle loro competenze trasversali. Si precisa che sia i ricercatori dell'Università, sia i docenti di scuola hanno tenute le lezioni in ore pomeridiane. Dallo studio citato è emerso che, dal punto di vista dei docenti, le azioni didattiche interdisciplinari del quinquiennnio di Liceo Matematico sono risultate proficue ed efficaci. In riferimento agli studenti e alle studentesse delle classi coinvolte, questa proficuità è espressa dagli intervistati in termini di miglioramento delle competenze disciplinari e trasversali, maggiore motivazione allo studio, maggiore attenzione durante le ore curricolari di tutte le discipline. In riferimento agli stessi docenti intervistati, la maggioranza ritiene che le ore di Liceo Matematico siano state proficue «nell'ottica di cooperazione e lavoro di gruppo tra docenti» e che le prasseologie dei ricercatori abbiano influenzato quelle dei docenti «nell'utilizzo di nuove metodologie didattiche e nell'utilizzo della ricerca in didattica, di attività di laboratorio, di metodologia interdisciplinare» (Carullo et al., 2019, p.288). La ricerca condotta vuole, quindi, contribuire agli studi sul Liceo Matematico e sul collaborative teaching in quanto incrocia le due strade di ricerca, indagando le forme e le ricadute del collaborative teaching messo in atto nei percorsi improntati all'interdisciplinarità nei Licei Matematici.

5.3 *Fase preliminare: la scelta del campione*

Come accennato prima, non hanno preso parte alla ricerca tutti i Licei Matematici d'Italia ma solo quelli che avevano attivato almeno una classe prima (sezione a sé oppure sezione mista) e che erano caratterizzati dall'aver messo in atto il *collaborative teaching* tra i docenti, sia durante la co-programmazione di lezioni interdisciplinari, sia durante la co-docenza in aula (la co-docenza doveva interessare almeno due docenti del consiglio di classe). Pertanto, si è scelto di rivolgere l'attenzione a contesti molto affini tra loro, nei quali tale affinità era basata su tre parametri essenziali:

1) la modalità di erogazione della formazione (da docenti universitari a docenti delle scuole in una prima fase e da docenti delle scuole agli studenti durante le lezioni in aula);
2) i soggetti coinvolti nella co-progettazione (docenti universitari e docenti delle scuole)
3) l'impostazione interdisciplinare (volta specificamente alla creazione di collegamenti tra sapere umanistico e sapere scientifico) di tutte le tematiche affrontate in aula nella forma del co-teaching (con la compresenza in aula di almeno due docenti di discipline differenti l'una dall'altra).

A dicembre 2018 sono stati intervistati (mediante un'intervista strutturata, somministrata tramite Google Moduli) i referenti dei progetti di Liceo Matematico nelle Università di

Camerino, Catania, Cosenza, Firenze, Palermo, Parma, Pisa, Roma3, Salerno[89], Sapienza di Roma, Siena, Tor Vergata, Torino, e Udine. Ciò non è accaduto nei mesi di novembre o ottobre dello stesso anno per attendere l'inizio dei lavori nelle scuole (inizio non sempre coincidente con l'apertura dell'anno scolastico) e la definizione della progettazione didattica annuale. La prima parte dell'intervista si compone di tredici domande, volte a raccogliere informazioni sul numero e sulla tipologia di scuole afferenti i vari Dipartimenti di Matematica che hanno attivato almeno una classe prima di Liceo Matematico nell'anno scolastico 2018/19; il numero di ore aggiuntive; le attività [90], le modalità di programmazione e di erogazione dei percorsi didattici elaborati (tempi di realizzazione, metodologie didattiche, eventuale presenza di tematiche inerenti la Storia della Matematica, docenti che avrebbero tenuto le lezioni a scuola). La seconda parte dell'intervista si compone invece di quattro domande, volte ad indagare il contesto formativo che ha interessato i docenti delle suddette scuole e i docenti universitari che hanno erogato la formazione (numero di docenti scolastici che hanno partecipato alla formazione, numero di docenti che insegnano discipline diverse dalla matematica come ad esempio l'Italiano, la Storia o l'Arte). Le risposte sono pervenute tra dicembre 2018 e febbraio 2019. Gli atenei di Catania, Firenze, Palermo, Parma, Sapienza di Roma, Siena e Udine sono risultati affini, secondo i parametri descritti sopra. Gli atenei di Camerino, Cosenza, Roma3 e Torino sono risultati non affini alle precedenti per almeno una delle seguenti ragioni: la programmazione delle attività è stata elaborata a cura dei soli docenti universitari; la maggioranza delle ore di formazione per gli studenti è stata erogata dai docenti universitari. I referenti di Pisa, Potenza, Salerno e Tor Vergata non hanno dato risposta. Una volta ricevuti i contatti e-mail dei referenti scolastici dei progetti di Liceo Matematico afferenti ai Dipartimenti selezionati, è stata inviata a ognuno dei referenti

---

89 Si precisa che le Università di Bari, Caserta, Foggia, Padova e Perugia non sono state contattate per la ricerca in quanto gli istituti in convenzione con esse hanno attivato delle classi prime solo a partire dall'anno scolastico 2019/2020.

90 Si precisa, per completezza, che tutte le attività indicate dai referenti sono a sfondo interdisciplinare e che sono stati previsti collegamenti della matematica con i seguenti ambiti: Fisica, Arte, Storia, Italiano, Musica, Finanza, Economia, Modelli matematici in biochimica. Ulteriori collegamenti, meno comuni ma comunque degni di nota, riguardano social network, cinema, paradossi, urbanismo, cosmologia, sport, valutazione del rischio.

scolastici di progetto una mail con informazioni riguardo al progetto della tesi, all'indagine sperimentale che si stava per condurre e alle modalità con cui gli studenti avrebbero partecipato alla ricerca.

Nelle sezioni di Liceo Matematico individuate secondo i parametri espressi sarebbe stata indagata la motivazione degli studenti per l'apprendimento della matematica. Il campione di allievi frequentanti il primo anno di Liceo Matematico avrebbe costituito il campione sperimentale, mentre i coetanei di primo anno degli stessi istituti coinvolti avrebbero costituito il campione di controllo.

5.4 *La metodologia d'intervento e gli strumenti di indagine*

5.4.1 Metodologia e strumenti per rispondere alla prima domanda di ricerca

Tenendo conto di tutto ciò, per rispondere alla prima domanda di ricerca, si è deciso di focalizzare l'attenzione sulla motivazione del campione di studenti prima e dopo l'esperienza del primo anno di Liceo Matematico.

A tutti gli studenti dei trentasei Istituti dove è stata attivata almeno una classe prima nell'A.S. 2018/19, in convenzione con le Università sopra specificate che hanno collaborato alla presente ricerca sperimentale, è stato somministrato un test (Allegato n. 1) in modalità telematica con domande chiuse sulla motivazione all'apprendimento della matematica: una prima volta nel mese di marzo 2019 e una seconda volta nei mesi di maggio e giugno, a chiusura dell'anno scolastico (post-test). La scelta della somministrazione per via telematica anziché per via diretta (ovvero, per iscritto) è dettata dalla necessità di raggiungere istituti dislocati e di non gravare sui costi delle istituzioni scolastiche. È stata proposta una versione italiana dell'AMTMS (Lim & Chapman, 2014a, p.354) con la quale indagare in che misura i percorsi didattici attivati all'interno del Liceo Matematico possano favorire una *motivazione intrinseca*, ossia possano indirizzare gli studenti verso l'estremità autodeterminata del continuum della motivazione. In questa versione italiana si chiede di rispondere al quesito «Perché trascorri del tempo a studiare matematica?» utilizzando una scala di risposte di tipo Likert per indicare quanto le varie ragioni elencate (per le quali potrebbe essere importante studiare la matematica) corrispondono alle proprie. Il test (Lim & Chapman, 2014a, p.354) da cui si trae spunto è composto da cinque sottoscale, quanti sono i costrutti della motivazione nella prospettiva multidimensionale della Self-Determination Theory (Deci & Ryan, 1985): amotivazione, regolazione esterna, introiezione, identificazione, regolazione intrinseca. La terz'ultima sottoscala è composta da cinque item; le altre da quattro item. Prima di essere somministrato, il test è stato prima tradotto dalla lingua inglese alla lingua italiana, con la supervisione di un'insegnante di madrelingua inglese, e validato mediante analisi fattoriale esplorativa, come meglio descritto nel capitolo sesto. Nel rispetto della privacy di ogni studente, data la minore età degli intervistati, il questionario è del tutto anonimo e non contiene alcun dato personale che possa permettere all'intervistatore di individuare in modo univoco l'intervistato. I quesiti inerenti genere ed età degli intervistati, scuola di appartenenza e città di ubicazione della scuola sarebbero stati utili a descrivere in maniera più completa i risultati della ricerca; il quesito sul genere degli intervistati sarebbe stato inoltre utile per evidenziare eventuali differenze di genere in fase di analisi degli esiti. Gli item della scala (cioè le affermazioni) per le quali agli studenti è chiesto di esprimere se e in che misura sono in accordo con esse, sono qui riportate (il testo completo è presente come Appendice A):

Perché trascorri del tempo a studiare matematica?

1= Non corrisponde per nulla, 2 = Corrisponde in parte, 3= Corrisponde abbastanza

4= Corrisponde molto, 5= Corrisponde esattamente

Sinceramente non lo so. Sento che sto solo perdendo tempo a studiare matematica.	1	2	3	4	5
Perché voglio far vedere agli altri (ad esempio agli insegnanti, alla famiglia, agli amici) che vado bene in matematica.	1	2	3	4	5
Perché voglio mostrare a me stesso/a che posso essere bravo/a in matematica.	1	2	3	4	5
Non ne sono sicuro/a; non vedo come la matematica mi possa essere utile.	1	2	3	4	5
Perché senza un bel voto in matematica, non sarò capace di trovare un lavoro ben pagato in futuro.	1	2	3	4	5

Perché credo che la matematica migliorerà le mie competenze di lavoro.	1	2	3	4	5
Per il piacere che provo quando scopro cose nuove in matematica che non avevo mai imparato prima.	1	2	3	4	5
Per ottenere in futuro un lavoro più importante di chi non ha studiato matematica.	1	2	3	4	5
Per mostrare a me stesso che sono intelligente.	1	2	3	4	5
Per ottenere un lavoro ben pagato in futuro.	1	2	3	4	5
Per il piacere che provo quando mi sento completamente preso da ciò che i matematici hanno scoperto.	1	2	3	4	5
Perché quello che imparo adesso in matematica mi sarà utile per il corso universitario che mi piacerebbe fare poi.	1	2	3	4	5
Perché voglio sentire la soddisfazione personale di capire la matematica.	1	2	3	4	5
Perché studiare matematica mi servirà in futuro.	1	2	3	4	5
Per il piacere che provo quando conosco altre cose di matematica.	1	2	3	4	5
Perché voglio avere "la bella vita" più avanti.	1	2	3	4	5
Non lo so; non riesco a capire cosa sto facendo in matematica.	1	2	3	4	5
Perché penso che la matematica mi aiuterà a prepararmi meglio per quello che mi piacerebbe fare nella vita.	1	2	3	4	5
Non riesco a vedere perché sto studiando matematica e, francamente, non mi importa nulla.	1	2	3	4	5
Per il fatto che, quando vado bene in matematica, mi sento importante.	1	2	3	4	5
Per il piacere che provo quando imparo come funzionano le cose nella vita, grazie alla matematica.	1	2	3	4	5

La corrispondenza tra gli item e la scala di appartenenza[91] nel test somministrato è indicata di seguito (essa riflette la struttura fattoriale rilevata durante l'analisi fattoriale esplorativa):
Amotivazione: item 1, 4, 17, 19.

91 La sottoscala della regolazione integrata (estrinseca) non è tenuta in considerazione in quanto essa si manifesta solo in età adulta quando il sistema di valori ed i bisogni di un individuo incontrano quelli del contesto socioculturale al quale appartiene. La struttura a cinque fattori coincide, del resto, con quella proposta da Deci e Ryan (1985).

Regolazione esterna: item 5, 8, 10, 16.
Introiezione: item 2, 3, 9, 13, 20.
Identificazione: item 6, 12, 14, 18.
Regolazione intrinseca: item 7, 11, 15, 21.

Nella versione somministrata, gli item di risposta possibili sono cinque, indicizzati in una scala da 1 a 5:
1= Non corrisponde per nulla
2 = Corrisponde in parte
3= Corrisponde abbastanza
4= Corrisponde molto
5= Corrisponde esattamente.

Come suggerito in un contributo di Vallerand e Ratelle (2002), nel presente studio viene usato un indice unico, per ridurre il numero di variabili necessarie a rappresentare le diverse tipologie di motivazione. Di conseguenza, per raggiungere un dato livello di motivazione, viene attribuito un peso a ciascuna sottoscala: un peso positivo alle sottoscale che indicano un comportamento autodeterminato, un peso negativo alle rimanenti. Nello specifico, viene qui attribuito un peso di +2 alla scala della regolazione intrinseca, in quanto rappresenta il livello più alto di autodeterminazione; un peso di +1 viene dato alla sottoscala dell'identificazione; un peso pari a -1 viene attribuito alla sottoscala dell'introiezione; un peso pari a -2 viene attribuito alla sottoscala della regolazione esterna in quanto rappresenta fra tutte il livello più basso di autodeterminazione. In accordo con Vallerand e Ratelle (Vallerand & Ratelle, 2002), alla amotivazione viene attribuito peso nullo, ovvero non è considerata nel computo dell'indice. Moltiplicando, per ciascuna sottoscala, il punteggio medio ottenuto per il peso corrispondente alla sottoscala considerata, si ottiene un indice della motivazione autodeterminata dell'individuo. Quest'indice serve come indicatore dell'orientamento motivazionale complessivo di una persona; tanto più è positivo (rispettivamente, negativo) quanto più rappresenta una regolazione autodeterminata, autonoma (rispettivamente, controllata).

L'elemento di novità presente nello studio condotto, rispetto alla letteratura esistente, consiste nel misurare la motivazione verso l'apprendimento della matematica a studenti di grado 9, anziché studenti di grado 11-12 (come nel caso dell'AMTMS da cui si trae spunto) oppure universitari (come nel caso dell'AMS), e nel leggere i dati in relazione alla formazione interdisciplinare offerta dal Liceo Matematico in Italia. Il questionario è stato somministrato tramite Google Moduli i primi di marzo 2019. Tenendo conto dei tempi necessari alle singole scuole per divulgare il questionario tra gli studenti, le risposte sono pervenute nell'arco temporale di un mese circa. Si precisa che gli studenti non sono stati pagati e che in ogni momento è stato garantito l'anonimato oltre che la riservatezza delle informazioni rilevate. Non è stato dato un tempo ben definito per rispondere al test, dal momento che non è stato somministrato per via diretta (cioè, in presenza) ma per via telematica. Gli studenti coinvolti nella prima somministrazione sono stati circa trecento, nella seconda invece più di quattrocento. Il risultato atteso era che la motivazione verso l'apprendimento della matematica nel sottocampione di studenti del Liceo Matematico fosse maggiormente intrinseca rispetto al resto del campione, ovvero che il Liceo Matematico avesse fatto sbocciare quelle caratteristiche molto positive dell'essere umano che sono la curiosità, la costruttività, la fiducia nelle proprie capacità ed un maggiore piacere e coinvolgimento nell'apprendere la matematica. Questo avrebbe confermato quanto emerso da un importante studio (Ryan & Deci, 2000) nel quale si evidenzia che i contesti sociali possono sia incrementare, sia affievolire la motivazione intrinseca. Contesti sociali che supportano i bisogni di autonomia e di competenza della persona facilitano le espressioni vitali della tendenza naturale dell'uomo alla crescita, ossia quelle caratteristiche già menzionate che si riferiscono per l'appunto alla motivazione intrinseca.

5.4.2 Metodologia e strumenti per rispondere alla seconda e alla terza domanda di ricerca

Per rispondere alla seconda ed alla terza domanda di ricerca si è scelto di coinvolgere gli studenti al termine del primo anno di Liceo Matematico in un questionario con domande aperte e chiuse (Appendice B) sul rapporto e l'atteggiamento degli studenti verso la matematica prima e dopo aver vissuto l'esperienza del Liceo Matematico (sulla base dei parametri indicati da Lim & Chapman, 2013a). Si precisa che è stato prima condotto uno studio pilota nel corso del quale è stato somministrato in modalità telematica (tramite Google Moduli) a 62 studenti frequentanti le classi seconde di Liceo Matematico della provincia di Catania (scelta in quanto è stato immediato avere un confronto diretto con i docenti delle scuole coinvolte nella città di Catania e provincia); sulla base delle risposte registrate, il questionario è stato poi modificato leggermente per rendere le richieste più esplicite ed evitare di riscontrare delle risposte non del tutto attinenti alle domande poste. Il questionario modificato è stato somministrato in modalità telematica (mediante Google Moduli) e in forma anonima agli studenti d'Italia giunti al termine del primo anno di Liceo Matematico. Anche in questo caso, tutti gli studenti del campione pilota e tutti coloro che hanno risposto al questionario modificato non hanno ricevuto alcun compenso per partecipare alla ricerca; è stato sempre garantito loro l'anonimato ed il trattamento delle informazioni ricevute per i soli fini di ricerca. Non è stato quantificato un tempo di risposta, data la modalità telematica di somministrazione, ma è stato chiesto loro di rispondere entro quindici giorni dalla comunicazione del link per la compilazione.

Esso si compone di quattro parti. La prima parte contiene delle informazioni generali (età, genere, scuola frequentata) utili a caratterizzare il campione di studenti pur non contenendo alcun fattore di identificazione. Nella seconda parte, costituita da due domande, si chiede all'intervistato/a di esprimere le ragioni per cui ha intrapreso il percorso didattico del Liceo Matematico e di descrivere l'esperienza vissuta per consigliarla o meno ad un amico o un'amica (in modo che, proiettandosi sulla scelta di una persona cara, la risposta possa essere più spontanea). La terza parte si compone di sei domande aperte e quattro domande chiuse, tutte centrate sull'esperienza personale del Liceo Matematico e su alcuni aspetti affettivi legati all'esperienza vissuta: quale era il rapporto dell'allievo/a con la matematica prima di iniziare il Liceo Matematico e, nel caso in cui ritenga che questo rapporto sia cambiato nel corso dell'anno scolastico, in che termini descriverebbe questo cambiamento (interesse, piacere, valore assegnato alla disciplina, emozioni, voglia di apprendere, stimolo della curiosità,…); quale attività l'ha colpito/a in modo particolare e quali contenuti trattati durante le lezioni ha eventualmente approfondito con uno studio autonomo; in che misura e in che modalità ritiene che il Liceo Matematico abbia influito positivamente sulla sua motivazione per l'apprendimento della matematica; in che modo ritiene che il percorso sperimentale possa influire sul rapporto di uno studente con la matematica o cambiarne la visione della matematica; se pensa che le lezioni interdisciplinari siano state utili per ampliare la sua formazione culturale. La quarta parte vuole quasi provocare l'intervistato/a in quanto chiede se rifarebbe la scelta di iscriversi al Liceo Matematico, alla luce delle esperienze didattiche alle quali ha partecipato, e cosa avrebbe modificato oppure aggiunto al percorso didattico che si apprestava a terminare. Nelle note al questionario, si chiede di comunicare eventuali suggerimenti per migliorare la struttura del questionario qualora si voglia ripetere l'indagine con un differente campione. Si è scelto inoltre di non citare espressamente la Storia della Matematica nei quesiti posti, proprio per lasciare che fossero gli studenti stessi a notare un'eventuale importanza del ruolo da questa rivestito nel creare connessioni tra più discipline, nel far emergere l'utilità della matematica nello sviluppo delle scienze, della tecnologia e della storia del pensiero e nel rilevare qualche cambiamento nella motivazione verso la matematica. Il questionario di cui sopra non è presente in nessuno studio precedente. È stato elaborato solamente ai fini della presente ricerca; esso ha reso più ricca la raccolta dei dati della ricerca, in quanto con esso si è voluto dar voce direttamente agli studenti di Liceo Matematico del campione. Le loro risposte sono state analizzate qualitativamente e quantitativamente.

5.4.3 Metodologia e strumenti per rispondere alla quarta domanda di ricerca

Come è già stato osservato, dare ai docenti delle occasioni per aumentare la propria PCK e sviluppare nuove competenze consente di avere a lungo termine dei riscontri positivi sull'apprendimento degli studenti in matematica (Schoenfeld, 2002). Una di queste occasioni è stata riscontrata proprio nella didattica collaborativa messa in atto nel contesto dei LM di Palermo, nei quali docenti di diversi dipartimenti hanno lavorato insieme verso obiettivi condivisi dall'intero consiglio di classe. Prendendo spunto da uno studio (Egodawatte et al., 2011) sugli effetti della collaborazione tra docenti sul miglioramento dell'apprendimento in matematica degli alunni di grado 9, si è scelto di ampliare il campione di ricerca estendendolo anche ai docenti, così da rispondere alla quarta domanda di ricerca. Si è dovuto tener conto, ad ogni modo, di alcuni fattori: anzitutto, l'arco temporale relativamente breve a disposizione; in secondo luogo, l'essere a conoscenza dei percorsi formativi dei docenti e degli studenti dei Licei Matematici di Palermo. Pertanto, si è scelto di estendere la ricerca ai soli docenti dei Licei Matematici di Palermo, che comunque si possono a ragione considerare una parte rappresentativa dell'intero campione dei docenti coinvolti nella sperimentazione didattica. La scelta è motivata dall'aver seguito da vicino le attività del nascente Liceo Matematico nel Palermitano, dalla formazione degli insegnanti fino allo svolgimento delle lezioni in aula. Questo avrebbe permesso di compiere un'analisi sicuramente più completa delle risposte registrate. Nello specifico, si tratta di due classi prime di Liceo Matematico nella città di Palermo: una sezione mista con alunni di classe prima iscritti all'indirizzo del Liceo Classico presso il Liceo Classico Statale "Vittorio Emanuele II" ed una sezione del Liceo Scientifico "Benedetto Croce". Le due sezioni si trovano in istituti diversi, inseriti in contesti socioeconomici e culturali di livelli differenti: medio-alto per il Liceo Classico, medio-basso per il Liceo Scientifico. In entrambe le classi, ad ogni modo, si è riscontrata la presenza di un gruppo di docenti molto qualificati e che hanno partecipato con interesse, entusiasmo e professionalità alla realizzazione del Liceo Matematico. Lo strumento di indagine che si è scelto di adottare è l'intervista semistrutturata, la cui impostazione consente di affrontare alcuni punti chiave con gli intervistati lasciando all'intervistatore la possibilità di modificare le domande o porre ulteriori domande a seconda delle risposte registrate. Le domande dell'intervista sono riportate di seguito e presenti anche tra gli allegati. (Appendice C).

Background docente
Nome
Titolo di studio
Conseguito presso
Quale materia insegna attualmente?
Da quanto tempo lavora in questa scuola?

Da quanti anni insegna?

Perché è diventato/a un/una insegnante?

A) *Sfide e successo*

A1) In base alla Sua esperienza, com'è cambiato il contesto scolastico negli ultimi anni e quali cambiamenti ritiene siano in atto?

A2) Quali sfide si è posta la Sua scuola proponendo il Liceo Matematico come percorso di studi?

B) *Successo degli studenti e obiettivi del docente*

B1) Secondo Lei, cosa considerano gli studenti del Liceo Matematico come un "successo in matematica"?

B2) Come descriverebbe i Suoi obiettivi d'insegnamento verso la classe del Liceo Matematico?

C) *Collaborazione tra docenti*

C1) è stata attuata una collaborazione tra i docenti del Liceo Matematico per co-pianificare e/o co-insegnare durante le ore del Liceo Matematico?

C2) Aveva collaborato prima con altri docenti (non necessariamente del Suo dipartimento) per co-pianificare e/o co-insegnare?

C3) Secondo Lei, come può la collaborazione tra docenti influenzare l'atteggiamento degli alunni verso la matematica?

C4) Quali benefici ha ricevuto dalla collaborazione con altri colleghi del Suo stesso dipartimento?

C5) Tale collaborazione ha influenzato la comunicazione tra Voi docenti? Se sì, in che termini?

C6) Quali benefici ha ricevuto dalla collaborazione con i colleghi di altri dipartimenti? (Es. accesso a idee, materiali, strategie e abilità altrui, pianificazione lezione, percezione della qualità del proprio insegnamento, sviluppo professionale, gratificazione professionale, …)

C7) Secondo Lei, quali benefici hanno ricevuto gli studenti (o riceveranno in futuro) da tale collaborazione intra- e interdipartimentale?

C8) Eventuali riflessioni o osservazioni sulle ricadute (percepite o sperate) delle "lezioni interdisciplinari" del Liceo Matematico nella Sua scuola sia sui docenti che hanno collaborato e cooperato, sia sugli studenti del Liceo Matematico.

D)In relazione ai singoli "temi" trattati durante l'anno scolastico 2018/19, si chiedono le seguenti informazioni:

- Contenuti
- Obiettivi prefissati
- Modalità di svolgimento (attività, strumenti/artefatti usati o da usare, …)

- eventuali risposte positive o negative degli alunni
- obiettivi eventualmente raggiunti ed eventuali modifiche da apportare alla futura programmazione.

Lo strumento adottato nello studio precedente (Egodawatte et al., 2011) è stato necessariamente modificato per adattarlo al contesto scolastico italiano e, nello specifico, al contesto socio-culturale in cui si trovavano i docenti intervistati. I risultati di questa ricerca condotta con i docenti sono descritti in parte nel contributo portato all'ICMI Study 25 (International Commission on Mathematical Instruction), svoltosi presso l'Università di Lisbona tra il 4 e il 7 febbraio 2020, in parte sono descritti nel contributo al GiMat 2019 svoltosi presso il DMI di Palermo. Quasi al termine delle attività didattiche (tra l'ultima settimana di maggio 2019 e la prima settimana di giugno 2019), sono state condotte le interviste individuali semistrutturate (Appendice C) con i singoli docenti delle due sezioni di Liceo Matematico della città. Le interviste sono state audioregistrate in una stanza riservata appositamente adibita, così da garantire la massima riservatezza a ciascun docente intervistato e la qualità del formato audio. Le risposte sono state poi trascritte affinché si potesse procedere con la codifica delle stesse. I dati rilevati dalle interviste, una volta analizzati sul piano quantitativo e soprattutto quantitativo, avrebbero completato lo studio condotto con gli studenti del campione di ricerca e avrebbero permesso di dare una risposta più esaustiva alle prime tre domande di ricerca. Gli scopi delle interviste erano, infatti, molteplici: indagare le modalità di collaborazione, attuate prima e durante il LM, tra i docenti di ogni sezione; indagare in che termini questa collaborazione avesse influenzato i fattori affettivi e, di conseguenza, anche la qualità del processo di insegnamento-apprendimento della matematica in quella classe; indagare gli eventuali benefici prodotti nel primo anno di didattica collaborativa sia sui docenti sia sugli studenti. Le domande sono state poste ai docenti in quanto il focus della ricerca era la collaborazione tra essi, le modalità e le ricadute di quest'ultima dal punto di vista dei docenti, in quanto educatori attenti ai bisogni di autonomia e di competenza dei loro studenti. Nell'elaborare le domande si è tenuto conto degli spunti emersi dalla formazione dei docenti universitari del DMI di Palermo, sia a livello di contenuti didattici interdisciplinari sia, soprattutto, nella scelta delle strategie pedagogico-didattiche da adottare. Il corso di formazione ha di fatto permesso ai futuri docenti del Liceo Matematico di sperimentare prima ancora degli studenti i legami tra le discipline, tra la Matematica e l'Arte o la Biologia o la Fisica per fare qualche esempio, e di individuare nuovi "approcci pedagogici" alla matematica, intervenendo anche sul PCK dei docenti. Grazie alla formazione ricevuta, i docenti hanno attuato le lezioni interdisciplinari consapevoli che sperimentare i ponti culturali tra le discipline può di certo influenzare alcuni fattori motivazionali, quali l'atteggiamento di curiosità o il desiderio di apprendere (che rientrano nella *motivazione intrinseca*), la disposizione personale nei confronti della matematica (che rientra nella *motivazione introiettata*), l'applicazione di conoscenze possedute che vadano oltre i contenuti disciplinari e siano rilevanti per le esperienze di vita reale (che rientra nella *motivazione identificata*), come confermato da studi precedenti (An et al., 2016). Inoltre, si ritiene che le lezioni interdisciplinari possano intervenire sulla "visione della matematica" e favorire la percezione della matematica come una scienza che è insita in altre e che ha percorso un cammino lungo millenni insieme all'umanità.

L'intervista rivolta al campione di docenti cui accennato sopra è stata suddivisa in cinque parti. La prima sequenza di domande riguarda il background del docente (titolo di studio conseguito, materia/e di insegnamento, anni di insegnamento, ecc.): questa prima parte mira a raccogliere informazioni sull'esperienza lavorativa del docente e sulle ragioni per le quali ha intrapreso la strada dell'insegnamento. La seconda sequenza di domande mira a indagare il contesto scolastico in esame (senza indicare le caratteristiche da descrivere, per far sì che le risposte fossero il più possibile libere e non influenzate dalle parole chiave nella domanda), i termini in cui vi avessero eventualmente registrato dei cambiamenti nell'ultimo decennio e le sfide pedagogiche che la scuola si era posta nel proporre il Liceo Matematico ai suoi futuri studenti. La terza sequenza di domande è centrata sugli obiettivi d'insegnamento di ogni docente verso la classe e sulla percezione del "successo in matematica" da parte degli studenti. In uno studio recente di Di Martino (2017), l'autore osserva che i docenti di matematica in-servizio, impegnanti in incontri di formazione, indicano più spesso tra gli obiettivi «la volontà di appassionare i ragazzi alla disciplina» e il fornire agli studenti gli strumenti utili – in termini di conoscenze e di processi di pensiero- per affrontare problemi di varia natura (Di Martino, 2017, p.23). Il risultato atteso per questa parte è che i docenti intervistati facciano riferimento agli obiettivi affettivi ed anche agli obiettivi legati allo sviluppo del pensiero critico e razionale, nonché della mathematical literacy degli studenti. La quarta parte, la più corposa, è centrata sulle forme di collaborazione con i colleghi, sui benefici prodotti dalla didattica collaborativa attuata (ad esempio, nella percezione della qualità del proprio insegnamento o nell'avere accesso a strategie e materiali didattici altrui) e sulle eventuali "ricadute"[92] riscontrate (o sperate) sugli studenti. Il risultato atteso è che venga confermato quanto emerso da un precedente studio (Egodawatte et al., 2011) nel quale si fa riferimento al co-teaching quale opportunità di sviluppo personale e professionale per i docenti i quali, attraverso tale forma di collaborazione, acquisiscono maggiore sicurezza nelle proprie capacità, si sentono meno "isolati" e possono imparare l'uno dall'altro l'arte di insegnare. Quanto alle ricadute sugli studenti, il risultato atteso è che siano stati raggiunti obiettivi di insegnamento in linea con i principi generali del Liceo Matematico (cfr. Capitolo IV): lo sviluppo di una *forma mentis* specifica della disciplina, lo sviluppo della mathematical literacy degli studenti e obiettivi di natura affettiva e motivazionale (appassionarsi alla disciplina, studiarla con piacere, affrontare situazioni problematiche nuove con spirito critico e una sana curiosità intellettuale). La quinta parte mira ad indagare quanto è stato elaborato nei workshop e quanto è stato concretizzato in classe, lasciando spazio ad eventuali modifiche da apportare alla futura programmazione (contenuti trattati, obiettivi prefissati e obiettivi raggiunti, strumenti/artefatti utilizzati, metodologie didattiche adottate, eventuale feedback ricevuto dagli alunni, attività da proporre in futuro).

5.5 *Le fasi della ricerca condotta*

A partire da questi presupposti, il progetto di ricerca qui descritto si inserisce nel lavoro del gruppo di ricerca in Didattica della Matematica di Palermo, impegnato dal 2017

[92] Il termine è lasciato volutamente generico, senza riferimento agli aspetti formativo-didattici o a quelli motivazionali

nel progetto nazionale del Liceo Matematico ed è stato articolato in tre momenti specifici, di seguito brevemente riassunti:

- **primo momento**: definizione dei quadri teorici di riferimento mediante lo studio della letteratura esistente sui temi dell'*affect*, della *motivazione* degli studenti verso l'apprendimento della matematica (aspetti estrinseci ed intrinseci della mtivazione, legame tra la *motivazione* e le emozioni degli studenti), del *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) del docente (utile all'individuazione dei legami che intercorrono tra il PCK di un docente da un lato, gli aspetti affettivi e motivazionali dello studente dall'altro), della mediazione semiotica (per esaminare il potenziale didattico degli artefatti usati durante le lezioni interdisciplinari) e del *collaborative teaching* (per esaminare le ricadute delle forme di didattica collaborativa sulla motivazione del campione di studenti e sullo sviluppo professionale dei docenti del sottocampione);
- **secondo momento**: ricerca sul campo e somministrazione degli strumenti di indagine scelti;
- **terzo momento**: analisi degli esiti (Capitolo VI), mediante strumenti di analisi quantitativa e qualitativa, riflessione sui termini in cui il Liceo Matematico può intervenire sulla motivazione verso l'apprendimento della matematica negli studenti e riflessione su "come" la Storia della Matematica possa contribuire a fornire una visione "non alterata" della matematica, ovvero una visione della matematica non come disciplina a sé stante ma come disciplina coniugata e in interdipendenza con tutte le altre.

Per quanto riguarda il secondo momento, la ricerca sul campo è stata articolata in più fasi:
Fase 1: somministrazione in modalità telematica di un pre-test a domande chiuse sulla motivazione all'apprendimento della matematica mediante Google Moduli (Appendice A)

Fase 2: somministrazione in modalità telematica di un post-test a domande chiuse sulla motivazione all'apprendimento della matematica mediante Google Moduli (Appendice A)

Fase 3: somministrazione in modalità telematica di un test di autovalutazione, mediante Google Moduli, con domande aperte e chiuse, rivolto agli studenti di primo anno dei Licei Matematici italiani e inerente all'atteggiamento verso la matematica prima e dopo il Liceo Matematico (sulla base dei parametri indicati in Lim & Chapman, 2013a) (Appendice B).

Fase 4: intervista semistrutturata condotta in presenza, singolarmente, con ciascun docente dei Licei Matematici di Palermo e inerente: i contenuti trattati nei vari incontri tematici del LM; le modalità di collaborazione tra gli stessi soggetti coinvolti; le ricadute sul piano affettivo e formativo negli studenti, sul piano professionale dei docenti (Appendice C).

Infine, seppur non previsto inizialmente in risposta alle domande di ricerca, è stato co-progettato per l'anno scolastico 2018/19 il Modulo di "Giochi matematici e scacchi" insieme alla referente scolastica del progetto di Liceo Matematico presso il Liceo Classico Statale "Vittorio Emanuele II" di Palermo. In aula ha condotto le lezioni la referente scolastica insieme ad altri docenti del consiglio di classe, mentre la scrivente è stata presente nel ruolo di osservatrice. Il modulo è stato co-progettato per la sezione di Liceo Matematico presso il Liceo Classico "Vittorio Emanuele II" di Palermo in linea con i principi generali del Liceo Matematico. Dopo un'attenta analisi dei tempi a disposizione e delle finalità del progetto di ricerca, si è scelto di modulare le attività nel seguente modo: quattro ore sarebbero state destinate all'attuazione di un mini-laboratorio di scacchi, un'ora sarebbe stata dedicata ad un'attività centrata sulla relazione lineare tra due variabili e un'ora sarebbe stata destinata al gioco NIM e alla somministrazione di un questionario di gradimento sull'intero modulo di giochi matematici e scacchi. Il mini-laboratorio di scacchi ha avuto durata quattro ore ed è stato realizzato in due momenti distanti nel tempo: due incontri nel mese di gennaio 2019, a distanza di una settimana l'uno dall'altro, e un incontro nel mese di aprile 2019. Esso ha avuto come obiettivo cardine quello di motivare gli studenti ad apprendere la matematica attraverso il gioco: introdurli al mondo degli scacchi avrebbe favorito il perseguimento di obiettivi di apprendimento quali il potenziare le abilità logiche e di ragionamento, matematiche e visuo-spaziali degli studenti, la loro capacità di attenzione e concentrazione, la memoria di lavoro e il pensiero anticipatorio. Si tratta di abilità che sono strettamente legate all'acquisizione dei contenuti matematici, ma che sono anche trasversali a vari settori del curriculum scolastico, in linea con gli obiettivi comuni dei Licei Matematici. Per fare ciò si è scelto di preparare delle attività, da svolgere in piccoli gruppi di due o tre persone, basate su alcune domande stimolo con le quali esortare la classe ad adottare un ragionamento logico. La progettazione del modulo e le attività proposte non sono descritte in questo lavoro, poiché le schede di lavoro proposto hanno puntato sul raggiungimento degli obiettivi didattici prefissati. I risultati motivazionali conseguiti sono comunque emersi grazie agli strumenti adottati nella ricerca e sono discussi, insieme agli altri esiti, nel capitolo seguente.

CAPITOLO VI

Analisi degli esiti

6.1 Introduzione

In questo capitolo si presentano i risultati emersi dall'analisi quantitativa (relativamente alle Fasi 1 e 2) e qualitativa (nelle Fasi 3 e 4) dei dati raccolti, a seconda dello specifico strumento di ricerca utilizzato di volta in volta. Si ricorda che il questionario sulla motivazione (Appendice A) è stato inviato a mezzo e-mail ai referenti scolastici di progetto di tutte le scuole afferenti ai Dipartimenti di Matematica delle Università di Catania, Firenze, Parma, Palermo, Roma (La Sapienza), Siena, Udine. Nella mail si è indicato lo scopo della ricerca, il responsabile del trattamento dati, lo strumento di indagine e le modalità attraverso cui somministrare il questionario agli studenti delle classi prime. Nello specifico, la compilazione del questionario è avvenuta in modalità telematica per mezzo di Google Moduli: agli studenti dei vari Istituti è stato comunicato (tramite circolare o pubblicazione nella bacheca online della scuola) il link a cui accedere per la compilazione, precisando che le risposte sarebbero state raccolte in forma del tutto anonima e che non avrebbero avuto alcuna influenza sul loro rendimento scolastico in Matematica. Al termine dell'anno scolastico 2018/19 è stato chiesto agli stessi Istituti di collaborare alla ricerca consentendo una seconda compilazione del questionario sopra citato e la compilazione di un ulteriore questionario con domande aperte e chiuse (Appendice B) rivolto ai soli studenti iscritti in un percorso di Liceo Matematico. Le comunicazioni agli studenti sono avvenute secondo le stesse modalità della prima somministrazione del questionario. La compilazione del questionario e del questionario è stata telematica ma va precisato che, per garantire l'anonimato a tutti gli studenti, non è stato possibile individuare quali studenti avrebbero compilato lo stesso questionario una prima ed una seconda volta. Questa scelta è stata dettata dalla mancanza di tempo utile a raccogliere tutte le autorizzazioni da parte dei genitori/tutori per compilare il questionario inserendo dati sensibili (email, nome e cognome); ciò avrebbe senza dubbio garantito un confronto tra le risposte fornite da uno stesso studente nei due momenti dell'anno scolastico ma non avrebbe assicurato la buona riuscita della ricerca in quanto il campione si sarebbe ridotto drasticamente oppure il questionario sarebbe stato somministrato in due momenti troppo ravvicinati.

Per rendere chiara la trattazione, viene fatta anzitutto una premessa di carattere teorica sulla statistica descrittiva e inferenziale allo scopo di inquadrare gli esiti delle prime due fasi della ricerca all'interno degli strumenti offerti dalla statistica e rilevare la significatività degli esiti della ricerca. Segue la validazione, mediante analisi fattoriale, del questionario adottato per le suddette fasi. Alle premesse di carattere prettamente statistico, segue infine l'analisi le risposte ai vari questionari somministrati, facendo riferimento alle singole fasi indicate nel capitolo precedente e, dunque, alle domande di ricerca alle quali si è cercato di rispondere:

Q_1: In che misura le lezioni interdisciplinari di un Liceo Matematico contribuiscono ad una motivazione autodeterminata verso l'apprendimento della matematica negli studenti di grado 9?

Q_2: In che modo i percorsi interdisciplinari centrati sulla Storia della Matematica possono influenzare la motivazione verso la matematica in uno studente di grado 9 del Liceo Matematico?

Q_3: In che termini il collaborative teaching nel contesto del Liceo Matematico può intervenire sulla motivazione verso la matematica negli studenti di grado 9?

Q_4: Quali sono le possibili ricadute del collaborative teaching, attuato per realizzare lezioni interdisciplinari, sulla crescita formativa e professionale dei docenti del Liceo Matematico?

Gli esiti della ricerca sono discussi in riferimento ad ogni singola fase: nelle prime due, viene fatto un continuo confronto tra gli studenti del Liceo Matematico e gli studenti di altri corsi, per mettere in luce eventuali differenze nei risultati motivazionali raggiunti da ciascun sottocampione; nella terza fase si discutono gli esiti del questionario rivolto al termine dell'anno scolastico 2018/2019 ai soli studenti del Liceo Matematico; nella quarta fase di discutono gli esiti delle interviste rivolte ai docenti di due classi di Liceo Matematico. Gli esiti sono discussi con le lenti teoriche costituite dalle teorie di riferimento introdotte nei primi tre capitoli della tesi, nello specifico: la SDT, il laboratorio di matematica e il quadro dell'interdisciplinarità, senza tralasciare il quadro normativo italiano per l'insegnamento della matematica nel II ciclo di istruzione né altre ricerche sperimentali sull'uso della Storia della Matematica per un insegnamento e apprendimento efficace della matematica.

6.2 *Elementi di statistica descrittiva e inferenziale per la validazione del test somministrato nelle prime due fasi dello studio*

I dati raccolti per studiare il "fenomeno" in oggetto, quale potrebbe considerarsi quello del Liceo Matematico, costituiscono una mole di dati grezzi che si è reso necessario sintetizzare per descriverne le caratteristiche relative al campione coinvolto, generalizzare – eventualmente – all'intera popolazione di studenti del Liceo Matematico e trarre delle conclusioni per il lavoro svolto. Per fare ciò si è fatto ricorso alla *statistica descrittiva*[93] il cui scopo è quello di descrivere fenomeni collettivi che riguardano una *popolazione* utilizzando caratteristiche che la possano descrivere e rappresentare sinteticamente. Con il termine *popolazione* non si intende soltanto un gruppo di individui, ma si può indicare anche un insieme di soggetti giuridici (scuole o enti pubblici, ad esempio), animali, oggetti materiali (piante, foglie, …) (Vitale, 2002, p.2). Ad ogni modo, una popolazione si compone di *unità statistiche* o *unità di rilevazione* (Vitale, 2002, p.2). Per popolazione si intende dunque un insieme di unità statistiche su cui è possibile rilevare una o più caratteristiche di interesse. Un'indagine statistica serve a studiare la distribuzione di una o più caratteristiche, dette *caratteri* o *variabili statistiche*, all'interno di una popolazione. I caratteri si distinguono in *qualitativi* (o *mutabili*) e *quantitativi* (o *variabili*) (Vitale, 2002, p.6). I primi indicano una qualità dell'individuo (es. forma di una foglia, il titolo di studio conseguito) pertanto sono espressi mediante aggettivi, sostantivi e altre espressioni verbali

[93] Un'introduzione alla statistica descrittiva è stata fatta a partire dal testo (Di Ciaccio, A., & Borra, S. (1996). *Introduzione alla statistica descrittiva*. McGraw-Hill Libri Italia).

e possono assumere *modalità* distinte: ad esempio, il carattere qualitativo "sesso" può assumere due modalità distinte, "femminile" e "maschile". Un carattere quantitativo (ad esempio, il peso, l'altezza, l'età, il numero di componenti un nucleo familiare) si può esprimere mediante un valore numerico che è discreto se tale valore è intero, continuo se invece il carattere assume valore in un intervallo reale. I valori continui di un carattere, studiati in un'indagine statistica, vengono tuttavia sempre discretizzati: uno strumento di misura, infatti, presenta sempre risultati con un numero finito di cifre decimali.

Può essere utile studiare le distribuzioni di frequenze di un dato carattere all'interno di una popolazione e riportare tali frequenze in forma grafica (es. areogramma, istogramma di frequenze) o tabulare. Si considerano in tal caso le *frequenze assolute* e *relative* di un dato carattere (Vitale, 2002, p.18). La *frequenza assoluta* non è altro che il numero degli individui che presentano un certo valore (se il carattere è quantitativo) o una certa modalità (se il carattere è qualitativo); essa indica semplicemente quante volte si manifesta un certo carattere nella popolazione in esame. Se le modalità sono indicizzate da un indice k, allora la frequenza assoluta della modalità k-esima è indicata con f_k. Se la popolazione è composta da N individui e il carattere studiato si presenta in *n* modalità distinte, allora risulta $\sum_{k=1}^{n} f_k = N$. Le frequenze assolute non sempre sono confrontabili; ciò accade, ad esempio, quando si hanno due popolazioni con un numero differente di individui. Ad ogni frequenza assoluta f_k. viene associata allora una *frequenza relativa* p_k che si calcola dividendo la frequenza assoluta per il numero totale degli individui della popolazione: $p_k = \frac{f_k}{N}$. È chiaro che $0 \leq p_k \leq 1$e, essendo p_k definito tramite un rapporto privo di unità di misura, è spesso espresso in percentuale. Inoltre, si osserva che $N = \sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n} (p_k \cdot N) = (\sum_{k=1}^{n} p_k) N \xRightarrow[di\ conseguenza]{} \sum_{k=1}^{n} p_k = N$. Quando si svolge un'indagine statistica su una popolazione possono essere studiati più caratteri. Per ciascuna unità statistica, viene rilevata la modalità che si realizza per ciascun carattere. Se le modalità sono in tutto *n*, allora è buona norma che la popolazione sia composta da un numero *N* di individui in modo che $N \gg n$. Se la popolazione è troppo vasta per essere studiata nella sua interezza, viene estratto da essa un *campione,* ovvero un insieme finito di unità statistiche che si può ritenere rappresentativo dell'intera popolazione. Le caratteristiche vengono in tal caso rilevate o misurate all'interno del campione; i risultati di queste misurazioni costituiscono i *dati* per l'analisi statistica. Quando ci vuole studiare la distribuzione delle modalità di un solo carattere, senza preoccuparsi di come queste possano essere correlate con le modalità di altri caratteri della popolazione, si parla di *analisi statistica univariata*. Se il carattere oggetto dell'analisi è qualitativo, le informazioni sulle frequenze relative delle modalità di quel carattere sono sufficienti per un'analisi adeguata dei dati; in tal caso, si possono usare grafici quali and esempio l'istogramma di frequenza, il Dotplot o il box-plot. Se il carattere è quantitativo, si ricorre a degli *indici* di sintesi, singoli valori numerici che da soli possono riassumere caratteristiche importanti della distribuzione: la tendenza centrale, la variabilità o dispersione, la forma della distribuzione. A seconda di ciò che si vuole rilevare, si distinguono tre diverse tipologie di indici: gli *indici di posizione*, gli *indici di variabilità* e gli *indici di forma* (Vitale, 2002, pp.25,26). In questa sede vengono definiti i soli indici utili all'interpretazione dei dati raccolti nella ricerca.

6.2.1 *Indici di posizione*

Gli indici di posizione (Vitale, 2002; Cowen, 1998) sono anche detti *indici di tendenza centrale* e forniscono un'idea dell'ordine di grandezza del carattere analizzato nella distribuzione. Se ricavati tramite espressioni algebriche, si parla di *medie algebriche* (es. media aritmetica e la media quadratica). Se sono ricavati prendendo in esame la posizione dei dati all'interno di una data distribuzione, si parla invece di *medie di posizione* (moda, mediana, quantili). Supponendo di studiare un carattere X su una popolazione di N individui e supponendo di aver rilevato *N* valori $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$, la *media aritmetica* degli N valori è definita da: $\mu = \frac{y_1, y_2, y_3, \dots, y_N}{N}$. Si tratta di un concetto intuitivo che indica quanta parte del fenomeno è attribuibile in media ad ogni singola unità statistica. Questi valori in realtà non sono tutti distinti, ma spesso si ripetono. Supponendo che il carattere (discreto) *X* assuma *n* modalità distinte $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ (con $n \ll N$), aventi frequenza assoluta, rispettivamente, $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$, l'espressione precedente si riscrive come segue: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{N}$. Ricordando che $\sum_{i=1}^{n} f_i = N$, ne segue che $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$.

La media aritmetica si può anche esprimere nella forma di media aritmetica ponderata, usando le frequenze relative $\frac{f_i}{N}$ come i *pesi* p_i attribuiti a ciascuna delle modalità x_i:

$$\mu = x_1 \frac{f_1}{N} + x_2 \frac{f_2}{N} + \cdots + x_n \frac{f_n}{N} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

Considerato un qualunque valore y_i assunto dal carattere *X*, si definisce *scarto dalla media* la differenza $y_i - \mu$. Si dimostra che la somma di tutti gli scarti dalla media è nulla, cioè che $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu) = 0$. Il quadrato dello scarto della media è invece definito come $(y_i - \mu)^2$. La somma dei quadrati degli scarti $y_i - \mu$ è minima; in altre parole, calcolando la somma dei quadrati degli scarti da un qualsiasi altro valore si ottiene sempre una somma maggiore.

La modalità del carattere *X* che presenta la frequenza f_i massima è definita *moda* e si indica con x_{MO}. Se la distribuzione presenta un'unica moda, si dice *unimodale*; se si hanno due, tre o più modalità con la stessa frequenza massima, si parla invece di distribuzioni *bimodali*, *trimodali* o *multimodali*. La *mediana* è data dal termine che divide la distribuzione di frequenze in due parti, in modo che ciascuna contenga lo stesso numero di termini. Per individuarla, si dispongono le modalità in ordine crescente, ottenendo una sequenza ordinata, non strettamente crescente, di valori che possibilmente si ripetono. Se il numero N di valori è dispari, allora la mediana è individuata dal valore che occupa la posizione $\frac{N+1}{2}$. Se N è pari, la mediana si ottiene come media aritmetica dei due valori centrali, ovvero della coppia di valori che occupano la posizione $\frac{N}{2}$ e $\frac{N}{2} + 1$. Dalla definizione si comprende che la mediana, indicata con x_{Me} è un punto centrale intorno al quale si ripartiscono i valori di una distribuzione; essa è maggiore o uguale al 50% dei dati della distribuzione ed è minore o uguale al 50% dei dati della distribuzione. Il concetto di mediana può essere generalizzato individuando altri indici, detti *quantili*, che suddividono la distribuzione in parti contenenti lo stesso numero di dati. Ad esempio, si definiscono *quartili* (Vitale, 2002, p.48) i seguenti valori che suddividono la distribuzione in quattro intervalli di uguale numerosità:

- il *primo quartile* Q_1 è quel valore al di sotto del quale cade ¼ (25%) dei valori della distribuzione e al di sopra del quale cade la parte rimanente;

- il *secondo quartile* Q_2 è superiore alla metà (50%) dei valori della distribuzione e inferiore alla parte rimanente (cioè, è proprio la mediana);
- il *terzo quartile* Q_3 è quel valore al di sotto del quale cadono ¾ (75%) dei valori della distribuzione e al di sopra del quale cade la parte rimanente.

Insieme a tali valori, si usa indicare con Q_0 il valore minimo della distribuzione e con Q_4 il valore massimo. In modo simile, si possono definire 99 percentili che ripartiscono la distribuzione in cento parti, una per ogni punto percentuale. Riassumendo, gli indici di posizione forniscono informazioni circa l'intensità del fenomeno, indicando valori medi significativi compresi tra il valore minimo e il valore massimo di una distribuzione.

6.2.2 *Indici di variabilità*

Per capire come i valori si distribuiscono intorno a questi indici, si usa considerare gli indici di variabilità che forniscono una stima di come varia il fenomeno intorno agli indici di posizione. Il più semplice indice di variabilità è il *campo (o intervallo) di variazione* o *range* (Vitale, 2002, p.58), ottenuto come differenza tra il valore massimo y_{max} e il valore minimo y_{min} della distribuzione [94]. Esso risente dei valori anomali che differiscono di molto da tutti gli altri valori e non dà comunque nessuna informazione su come siano distribuiti i dati al suo interno. Altri indici di variabilità o di dispersione sono invece riferiti alla media aritmetica e vengono definiti a partire da quadrati di differenze. La *varianza* (Vitale, 2002, p.59) è un indice di dispersione ottenuto come somma dei quadrati degli scarti dalla media:

$$d = \sum_{i=1}^{N}(y_i - \mu)^2.$$

Dividendo d per il numero di gradi di libertà (il numero N di individui meno uno), si ottiene la *varianza campionaria*, un indice del grado di "oscillazione" dei valori rispetto alla tendenza centrale:

$$\sigma^2 = \frac{d}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2}{N-1}.$$

---

[94] Considerando la distribuzione delle modalità di un dato carattere, Vitale (2002) definisce il range in termini di differenza fra la più grande e la più piccola modalità di quel carattere.

La varianza permette di mettere a confronto due distribuzioni di valori di uno stesso carattere. Tuttavia, per come è definita, non presenta la stessa unità di misura dei valori della distribuzione e pertanto non la si può confrontare direttamente con la media aritmetica. A tal proposito, si usa un altro indice di dispersione pari alla radice quadrata della varianza; si tratta dello *scarto quadratico medio* (Vitale, 2002, p.62):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2}{N-1}}.$$

Per confrontare tra loro le variabilità di due o più popolazioni (o anche solo due o più variabili), può essere utile ricorrere al *coefficiente di variabilità* $c_{var} = \frac{\sigma}{|\mu|} \cdot 100$, espresso in termini percentuali. In linea generale, si possono distinguere tre casi:

- se $c_{var} \gg 100\%$, i valori della distribuzione sono mediamente molto lontani dalla media aritmetica e, dunque, si può affermare che si tratti di una distribuzione "molto dispersa";
- se $c_{var} \approx 100\%$, i valori della distribuzione sono mediamente distanti dalla media aritmetica per un valore che è paragonabile alla media stessa;
- se $c_{var} \ll 100\%$, i valori della distribuzione sono mediamente poco distanti dalla media aritmetica e, dunque, la distribuzione è in tal caso "poco dispersa" o "molto raccolta".

6.2.3 *Indici di forma*

Un'ulteriore categoria di indici, gli *indici di forma* (Vitale, 2002), è utile a descrivere il profilo o la forma di una distribuzione secondo alcuni aspetti quali la simmetria. Per studiarli e darne un significato in relazione alla distribuzione, si consideri anzitutto una rappresentazione in cui sull'asse delle ascisse sono riportate le modalità x_i di un dato carattere quantitativo *X* e sull'asse delle ordinate le rispettive frequenze f_i. La distribuzione del carattere *X* si dice *simmetrica* qualora presenti un asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate. In tal caso, se l'asse passa per la modalità x, allora la distribuzione assumerà lo stesso valore in corrispondenza delle modalità $x - \delta$ e $x + \delta$. Spesso, tuttavia, ciò non accade e si ha piuttosto una distribuzione *asimmetrica* la cui curva presenta una *coda* più lunga o più marcata verso destra o verso sinistra (Vitale, 2002, p.71). L'indice di asimmetria di Fischer permette di quantificare l'asimmetria di una curva. Considerato un insieme di N dati $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$, con media aritmetica μ e deviazione standard σ, tale indice si calcola come segue: $\gamma_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\frac{y_i-\mu}{\sigma})^3$. I rapporti tra parentesi sono adimensionali, pertanto l'indice γ_1 è un numero puro. Se nella distribuzione sono presenti valori che si discostano molto dalla media solo negativamente o solo positivamente, allora l'indice cresce in valore assoluto indicando un'alta asimmetria. Più elevato è il valore dell'indice γ_1, maggiore è l'asimmetria della distribuzione. Inoltre, l'indice conserva il segno, indicando qualitativamente il tipo di asimmetria. Per chiarire questo concetto, si riportano delle curve a titolo esemplificativo (Figura 6).

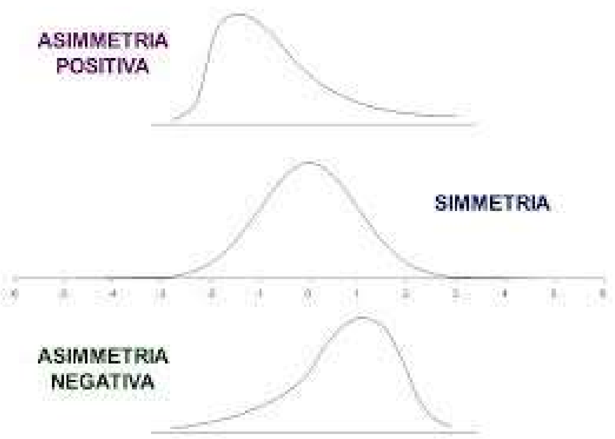

Figura 6. Esempi di curve di distribuzione. Dall'alto verso il basso, curva di distribuzione asimmetrica con coda verso destra; curva simmetrica; curva di distribuzione asimmetrica con coda verso sinistra.

Se $\gamma_1 > 0$ (rispettivamente $\gamma_1 < 0$), allora la curva di distribuzione è asimmetrica con una coda più marcata verso destra (rispettivamente, verso sinistra), cioè con valori molto maggiori (rispettivamente, minori) della media aritmetica; i valori minori (rispettivamente, maggiori) della media si discostano poco da quest'ultima. Se si tratta invece di una distribuzione simmetrica, risulta $\gamma_1 = 0$ (non è vero il viceversa) (Vitale, 2002).

6.2.4 *Il box-plot*

Quando si vogliono confrontare i dati misurati di uno stesso carattere in due popolazioni diverse, risulta particolarmente efficace usare uno strumento grafico quale il box-plot, introdotto da Tukey nel 1970[95]. Esso indica la tendenza centrale, la variabilità e la forma di una data distribuzione. Gli elementi statistici che lo compongono sono i seguenti (Vitale, 2002, p.48,49):

1. il *primo quartile* (Q_1), minimo valore osservato dopo aver riordinato i dati e tale che almeno un quarto dei dati siano minori o uguali ad esso;
2. il *secondo quartile* o *mediana*[96] (Q_2), minimo valore osservato dopo aver riordinato i dati e tale che almeno la metà dei dati siano minori o uguali ad esso;
3. il *terzo quartile* (Q_3), minimo valore osservato dopo aver riordinato i dati e tale che almeno i tre quarti dei dati siano minori o uguali ad esso;
4. la *distanza* o *scarto interquartile* (IQR) definita da $Q_3 - Q_1$ che rappresenta l'ampiezza dell'intervallo nel quale ricade il 50% dei dati osservati e fornisce informazioni sulla variabilità dei dati[97];
5. il campo di variazione o *Range* (R), differenza tra il valore massimo Q_4 ed il valore minimo Q_1 dei valori della distribuzione;
6. il *punto inferiore*, posizionato a Q_1 -1,5*($Q_3 - Q_1$);
7. il *punto superiore,* posizionato a Q_3 +1,5*($Q_3 - Q_1$);
8. i "valori anomali" della distribuzione (o *outliers*), i valori x che soddisfano una delle seguenti condizioni: $x < Q_1 - 1{,}5*(Q_3 - Q_1)$ oppure $x > Q_3 + 1{,}5*(Q_3 - Q_1)$;
9. il *valore minimo* Q_0 osservato nel set di dati (che non identifica un valore anomalo);
10. il *valore massimo* Q_4 osservato nel set di dati (che non identifica un valore anomalo)

[95] Per ulteriori approfondimenti, si veda Tukey, J. W. (1970), *Exploratory Data Analysis (Limited Preliminary Edition)*, Vol. 1, Reading, MA: AddisonWesley, Chapter 5.

[96] In un box-plot, la mediana fornisce informazioni sulla tendenza centrale di una distribuzione di dati.

97 La differenza interquartile costituisce una misura della variabilità dei dati della distribuzione: maggiore è il suo valore, maggiore è la variabilità dei dati intorno al valore centrale nel set di dati osservati.

Si fa presente che nel determinare i quartili (eccetto il secondo quartile) è stata esclusa la mediana. Inoltre, si ha che il valore minimo della distribuzione è maggiore o uguale a Q_1 - $1,5*(Q_3 - Q_1)$; il valore massimo della distribuzione è minore o uguale a $Q_3 +1,5*(Q_3 - Q_1)$. Sul piano prettamente grafico, il box-plot contiene:

• un rettangolo (box) la cui altezza (coincidente con il valore di IQR) fornisce una misura della variabilità della distribuzione dei dati (ovvero, del carattere indagato) intorno al centro della distribuzione;

• una linea orizzontale interna alla scatola, che indica la posizione del centro della distribuzione (ovvero, la posizione della mediana);

• un punto interno alla scatola, che indica il valore della media aritmetica della distribuzione;

• due segmenti (detti "baffi") esterni al box che partono dalla scatola e si prolungano verso l'alto e verso il basso e che indicano la dispersione dei valori inferiori al primo quartile e superiori al terzo quartile non classificati come outliers.

La distribuzione dei dati viene suddivisa dai quartili in quattro parti distinte: la prima contiene i valori da Q_0 a Q_1, la seconda contiene i valori da Q_1 a Q_2, la terza contiene i valori da Q_2 a Q_3, la quarta ed ultima parte contiene i valori da Q_3 a Q_4. Ciascuna parte contiene circa il 25% dei dati del set considerato; il box contiene dunque il 50% dei dati che si distribuiscono intorno alla mediana. Il grafico seguente riassume la configurazione finale del box-plot (Figura 7).

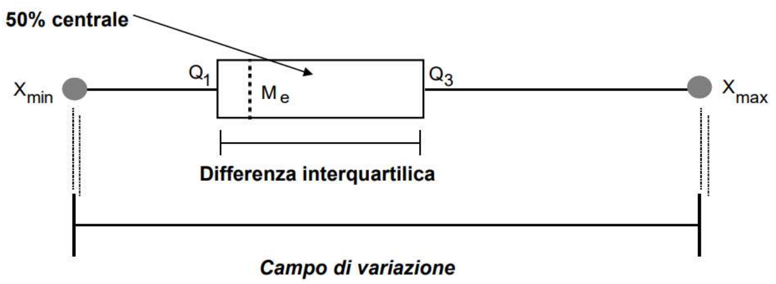

Figura 7. Elementi principali di un box-plot.

Inoltre, dal box-plot si evince l'eventuale simmetria (rispettivamente, asimmetria) di una distribuzione. Infatti, se una distribuzione è *simmetrica*, cioè se la variabile assume valori equidistanti dal centro di simmetria con uguale frequenza, allora il primo e il terzo quartile sono equidistanti dalla mediana. Se invece la distribuzione dei dati presenta maggiore frequenza dei valori inferiori alla mediana, risulta mediana<media aritmetica e si ha una *asimmetria positiva*; qualora la distribuzione dei dati presenti maggiore frequenza dei valori superiori alla mediana, risulta media aritmetica<mediana e si ha una *asimmetria negativa.* Si potrebbe dire che un box-plot costituisce una rappresentazione "stilizzata" dei valori di una distribuzione.

6.2.5 Distribuzioni di frequenza bivariate

Quando si vogliono studiare due caratteri di una popolazione, qualitativi o quantitativi discreti, si ha a che fare con distribuzioni di frequenza *bivariate*. Secondo quanto detto in precedenza, è possibile calcolare separatamente per ciascuna delle due variabili gli indici di statistica descrittiva sopra menzionati (media, varianza, deviazione standard ecc…). In questo modo è possibile avere un'ottima descrizione di ciascuna variabile singolarmente; non è possibile però avere informazioni sulle relazioni esistenti tra le due variabili, né sapere come si comporta una variabile man mano che l'altra cambia di valore. È quindi utile avere a disposizione degli indici statistici che descrivano in qualche modo le relazioni esistenti tra le due variabili. Principalmente, esistono due tipi di relazioni:

1) *variazione congiunta*: si verifica quando al variare di una variabile cambia il valore dell'altra in modo abbastanza analogo, ma tuttavia poter stabilire un nesso causale tra le variabili;

2) *dipendenza*: si verifica quando una variabile (detta dipendente) è funzione dell'altra (detta indipendente). In questo caso si può stabilire un nesso diretto causa-effetto tra le variabili in virtù del quale una variazione del primo carattere comporta una variazione dell'altro carattere che è contestualmente analizzato.

Quando si tratta di studiare due caratteri quantitativi, la dipendenza viene indicata come *correlazione* tra le variabili; essa viene in genere studiata tramite strumenti e metodologie che sfruttano la proprietà delle variabili si essere espresse mediante valori numerici. Un indicatore statistico per descrivere il grado di variazione congiunta di due variabili è il *coefficiente di correlazione r*. Data una popolazione di *N* unità sperimentali, sulle quali sono stati rilevati due caratteri *X* e *Y*, indicate con $x_i$le modalità del primo carattere e con y_i le modalità del secondo carattere, il coefficiente di correlazione per la coppia di variabili (*X, Y*) è dato da: $r = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_x)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mu_y)^2}}$ (Vitale, 2002, p.135).

La quantità al numeratore è detta *covarianza*; al denominatore si osserva la presenza delle devianze della variabile *X* e della variabile *Y*. Il coefficiente di correlazione varia tra –1 e +1 (si omette la dimostrazione): un valore pari a +1 indica una perfetta correlazione positiva (le due variabili aumentano o diminuiscono insieme), un valore pari a -1 indica una perfetta correlazione negativa (se una variabile aumenta, l'altra diminuisce e viceversa). Valori intermedi indicano debole correlazione o assenza di correlazione, nello specifico:

- se $-1 < r < -0.7$ (rispettivamente, $+1 < r < +0.7$), si parla di una forte correlazione negativa (rispettivamente, positiva);
- se $-0.7 < r < -0.3$ (rispettivamente, $+0.7 < r < +0.3$), si parla di una debole correlazione negativa (rispettivamente, positiva);
- se $-0.3 < r < +0.3$, vi è invece assenza di correlazione.

6.2.6 Cenni di statistica inferenziale

Le tecniche e gli strumenti di statistica descrittiva sinora menzionati assolvono ad uno dei principali compiti assegnati della Statistica: descrivere e rappresentare in maniera sintetica le informazioni contenute in un certo insieme di valori, relativamente ad un problema o popolazione che si vuole studiare. Essi forniscono difatti una sintesi semplice della popolazione (o del campione estratto dalla popolazione) e delle misure raccolte, operata per mezzo di numeri o grafici significativi. Se la statistica descrittiva interviene nella descrizione e rappresentazione di ciò che si osserva, o ciò che i dati evidenziano nei loro tratti essenziali, la *statistica inferenziale* usa le informazioni raccolte per trarre delle conclusioni di carattere più generale, che vadano oltre i dati di un singolo studio e che siano piuttosto riferibili all'intera popolazione. In altre parole, un'inferenza statistica è un processo induttivo che, a partire dall'analisi svolta su un campione statistico, vuole dedurre delle proprietà più generali che riguardano i parametri (indici o valori significativi) della popolazione: i comportamenti dei caratteri analizzati in riferimento alla popolazione intera. Le affermazioni della statistica inferenziale si possono suddividere in due tipologie:

- stima, quando si vuole indicare un valore verosimile per un certo parametro della popolazione e indicarlo con un valore ben definito (stima puntuale) o con un intervallo che verosimilmente include il valore vero di quel parametro;
- verifica di ipotesi, quando si vuole indicare quale tra due specifiche ipotesi sul parametro (nulla o alternativa) si possa ragionevolmente accettare.

Nei problemi che prevedono la verifica di un'ipotesi si valutano due ipotesi opposte tra loro riguardo una popolazione[98]. Si fa generalmente un'assunzione circa il valore di un parametro θ della distribuzione (ad esempio, il valore medio) di un carattere X della popolazione. Tipicamente, si ipotizza che il parametro assuma un valore prefissato θ_0; tale ipotesi viene indicata come *ipotesi nulla* (H_0). La sua negazione è l'*ipotesi alternativa* (H_1), ossia l'ipotesi che $\theta \neq \theta_0$. Obiettivo della verifica di ipotesi è cercare se ci sono abbastanza evidenze contro l'ipotesi nulla. Si parla di stime dei parametri anziché di parametri (media e deviazione standard campionaria) in quanto si tratta di valori plausibili per un parametro della popolazione, calcolabili attraverso misurazioni effettuate sul campione. Attraverso le stime dei parametri è possibile stimare il profilo della distribuzione della popolazione e, in secondo luogo, costruire degli intervalli di confidenza per i parametri. Ad esempio, se si vuole stimare il valore della media μ di una popolazione, si può usare la seguente formula: $\mu = \bar{x} \pm t_{\alpha,N-1} \cdot s_{\bar{x}}$, dove $\bar{x}$ è la media stimata, $s_{\bar{x}}$ è la stima dell'errore standard e $t_{\alpha,N-1}$ è una costante di proporzionalità che può essere ricavata

[98] Per ulteriori approfondimenti, si rimanda al testo di Cowan (Cowan, 1998).

a partire da una tabella prefissata, individuando il livello di probabilità α prescelto e il numero di gradi di libertà (numerosità del campione diminuita di una unità). Se, ad esempio, $\alpha = 0{,}05$ (cioè con una probabilità di errore del 5%), allora l'intervallo $\left[\,\bar{x} - t_{\alpha,N-1} \cdot s_{\bar{x}};\ \bar{x} + t_{\alpha,N-1} \cdot s_{\bar{x}}\,\right]$ contiene in vero (sconosciuto) valore della media del carattere X della popolazione da cui il campione è stato estratto. Questa affermazione la si può accettare entro un margine di errore del 5%.

È necessario puntualizzare che l'inferenza è possibile solamente se il campione è rappresentativo, ovvero se risulta composto da un numero sufficiente di unità estratte casualmente dalla popolazione, in modo che ogni unità abbia la stessa probabilità di tutte le altre di essere inclusa nel campione. Ciononostante, nulla assicura che la distribuzione del campione rappresenti il vero modello della popolazione.

Le osservazioni fatte si inseriscono nella ricerca in didattica della matematica quando tale ricerca è sperimentale, ossia coinvolge una popolazione (es. studenti delle scuole pubbliche italiane di grado 8, insegnanti di scuola primaria, …) in un esperimento scientifico. Essendo molto spesso una popolazione vasta, con un numero di individui che difficilmente possono essere tutti raggiunti se non a costi troppo elevati e in intervalli di tempo eccessivamente lunghi, si ricorre spesso ad un campione rappresentativo della popolazione. Gli esiti del progetto sperimentale vengono valutati mediante misure effettuate sul campione. Quest'ultimo è estratto casualmente tra tutti gli individui simili che si sarebbero potuti considerare nel corso della sperimentazione. Le unità sperimentali prescelte, entrate a far parte del progetto sperimentale che si vuole analizzare, costituiscono ciascuna una *replica* o *replicazione*. L'insieme delle replicazioni costituisce il campione su cui effettuare le successive analisi statistiche. Dalla sperimentazione condotta si cerca poi di trarre delle conclusioni più generiche, valide per l'intera popolazione da cui il campione è stato estratto (stima dei parametri della popolazione). In generale, si ha che, dato un campione, le statistiche descrittive calcolate per questo campione (media, varianza, deviazione standard, correlazione ecc..) possono essere estese alla popolazione da cui è stato estratto casualmente il campione, ritenendole a ragione delle stime puntuali. La precisione della stima dipende sia dalla variabilità della misura sia dal numero di unità coinvolte nella sperimentazione. Alla stima puntuale va associata infatti una banda di incertezza che tiene conto di un ulteriore indice, detto *errore standard*: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, dove σ è la deviazione standard, n è il numero di repliche e $\bar{x}$ è la stima della media μ. Ne deriva che l'errore standard aumenta all'aumentare della deviazione standard e diminuisce all'aumentare del numero delle ripetizioni, annullandosi quando questo tende ad infinito. Pertanto, si può considerare ragionevolmente l'errore standard $\sigma_{\bar{x}}$ come un errore di stima associato alla media.

6.2.7 Il test t di Student

Nella sperimentazione didattica, tuttavia, si ha spesso interesse a considerare non una sola popolazione (o, eventualmente, un campione rappresentativo di essa), bensì due popolazioni (in genere, individuati come *gruppo sperimentale* e *gruppo di controllo*) per scoprire se differiscono per uno o più caratteri o variabili presi in esame. Dal momento che ogni popolazione può essere descritta dalla sua media (pur tenendo conto dell'errore di stima della media), è utile capire se l'eventuale differenza rilevata tra le medie è significativa (cioè effettiva, reale) oppure dovuta al caso e, dunque, non significativa. A tale fine, è necessario tenere in considerazione due aspetti:

1) l'ampiezza della differenza tra le medie: più la differenza tra le due medie è alta, maggiore è la probabilità che essa sia significativa;

2) l'ampiezza dell'errore standard: più è elevata la variabilità dei dati e quindi l'errore di stima, minore è la probabilità che le differenze osservate tra le medie siano significative.

Questi due aspetti sono stati utilizzati per definire il cosiddetto *test t di Student* (o *T-test*) per campioni indipendenti, uno strumento di statistica inferenziale che permette di capire quanto la differenza tra le medie di due campioni indipendenti[99] stima la differenza tra le medie "reali" delle due popolazioni:

---

[99] I due campioni si intendono "indipendenti" qualora non sussista alcuna relazione tra le unità statistiche del primo e del secondo campione, ovvero quando le unità che rientrano in una modalità della variabile indipendente non rientrano anche nell'altra modalità.

$$t = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2})}{s_{\overline{X_1} - \overline{X_2}}}.$$

Esso è dato dal rapporto tra la differenza tra le medie dei due campioni e l'errore standard della differenza tra due medie. Quest'ultimo si calcola a partire dalla media ponderata delle deviazioni standard dei due campioni: $s_{\overline{X_1} - \overline{X_2}} = \sqrt{\bar{s}\,\frac{N_1+N_2}{N_1 N_2}}$, dove $\bar{s} = \frac{SS_1+SS_2}{N_1+N_2-2}$ è la varianza mediata dei due campioni, ottenuta sommando le devianze dei due campioni e dividendole per la somma dei rispettivi gradi di libertà. Se N_1ed N_2 sono le numerosità dei due campioni a confronto, allora tale somma è effettivamente data da $(N_1 - 1) + (N_2 - 1) = N_1 + N_2 - 2$. Secondo quanto detto in precedenza, è chiaro che tanto più è elevato il valore del T-test, quanto più è bassa la probabilità di sbagliare affermando che la differenza tra le due medie è significativa. La probabilità d'errore[100] (α) che si è disposti ad accettare va fissata all'inizio della sperimentazione ed è in genere pari al 5% $(\alpha = 0{,}05)$ o all' 1% $(\alpha = 0{,}01)$. Fissata la probabilità d'errore che si ritiene accettabile, si fa riferimento infine ad una tavola di valori critici della distribuzione di *t*. Considerando un numero di gradi di libertà pari a $N_1 + N_2 - 2$, sia t_c il valore critico di *t* ottenuto in corrispondenza di $N_1 + N_2 - 2$ gradi di libertà con probabilità d'errore α fissata. Se $|t| < |t_c|$, è possibile accettare l'*ipotesi nulla* H_0 e affermare che le due medie $\overline{X_1}$ e $\overline{X_2}$ non sono significativamente diverse tra di loro; detto altrimenti, la differenza tra le due medie è dovuta al caso. Se invece $|t| > |t_c|$, è possibile rifiutare l'ipotesi nulla H_0 ed accettare l'ipotesi alternativa H_1; ciò significa affermare che la differenza tra le due medie $\overline{X_1}$ e $\overline{X_2}$ è significativa. Nel fare l'una o l'altra affermazione, si ha una probabilità di errore inferiore alla soglia di errore stabilita a priori. Nel caso in cui i due campioni in oggetto rappresentino uno il gruppo sperimentale e l'altro il gruppo di controllo, il T-test permette di verificare se le medie dei due campioni indipendenti, in relazione ad una certa variabile, differiscono in modo significativo tra di loro, ovvero se la sperimentazione condotta sul gruppo sperimentale ha avuto un qualche effetto significativo (entro una certa probabilità di errore).

Affinché si possa applicare il T-test, occorre verificare le seguenti condizioni:

[100] La probabilità di errore è la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando in realtà quest'ultima è vera.

- la variabile dipendente deve essere quantitativa (in modo da poterne ricavare una media aritmetica per ciascun campione);
- la variabile indipendente deve essere qualitativa e dicotomica (cioè, deve presentare due sole modalità, ad esempio maschio/femmina, si/no);
- le unità statistiche devono essere tra loro indipendenti;
- la variabile quantitativa non deve avere valori anomali;
- le varianze dei due campioni devono essere tra loro omogenee[101];
- la variabile quantitativa deve essere distribuita normalmente[102].

6.2.8 Il p-value

Per capire se accettare o rifiutare l'ipotesi nulla, ovvero se i risultati ottenuti sono statisticamente significativi, si ricorre al calcolo del *p-value*; un valore di probabilità che indica quanto sarebbe improbabile osservare gli stessi dati nel caso in cui l'ipotesi nulla fosse vera. Se l'ipotesi nulla è che le medie dei due campioni sono uguali tra di loro (e, di conseguenza, la differenza osservata nei dati sarebbe dovuta solo all'errore campionario) mentre l'ipotesi alternativa è che le medie dei due campioni sono diverse tra loro (cioè, che la differenza tra le medie sia diversa da zero), allora il *p-value* rappresenta la probabilità di ottenere una differenza tra i valori delle due medie ampia almeno come quella osservata quando l'ipotesi nulla è vera. Trattandosi di una probabilità, esso assume valori compresi tra 0 e 1. Più il *p-value* è basso (vicino a 0), più il risultato osservato si può considerare statisticamente significativo; più è elevato (vicino a 1), più il risultato osservato non è statisticamente significativo. Detto altrimenti, la probabilità che i risultati di un dato studio siano riproducibili (ovvero, che si arrivi alle medesime conclusioni) è tanto più elevata

---

[101] Lo si può verificare attraverso un software statistico mediante, ad esempio, il test di Levene (se tale test dovesse risultare significativo, allora non si potrebbe accettare l'omogeneità dei campioni e verrebbe meno una condizione essenziale per l'applicabilità del T-test).

[102] In genere, questa condizione viene meno per campioni poco numerosi (contenenti meno di trenta unità statistiche).

quanto più è basso il *p-value.* Pertanto, il *p-value* dà più informazioni rispetto alla probabilità di errore prima citata.

Nel lavoro qui descritto, il T-test è stato utile a confrontare l'indice SDI medio (variabile dipendente, di tipo quantitativo) nel campione costituito dagli studenti del gruppo sperimentale (del Liceo Matematico, nell'anno scolastico in cui si è svolta la sperimentazione) con quello nel campione costituito dagli studenti del gruppo di controllo (studenti di altri corsi per cui si assume che differiscano dal gruppo sperimentale per la sola sperimentazione didattica del Liceo Matematico). La variabile indipendente qui identifica l'appartenenza o meno al gruppo sperimentale e, di conseguenza, è di tipo dicotomico.

6.2.9 Il Chi-quadro

Il T-test è molto utile quando si ha a che fare con caratteri quantitativi, cioè con variabili misurate su una scala continua, per i quali sia possibile calcolare delle statistiche descrittive (es. media). Quando invece si vogliono analizzare variabili qualitative (interesse, motivazione, paura, ansia) l'unico dato che si può rilevare è la frequenza degli individui che presentano una certa modalità. Dovendo confrontare tra loro una serie di frequenze, non si può usare il T-test, si fa riferimento ad un indice assoluto, detto Chi-quadro e indicato con χ^2. Esso è definito come segue: $\chi^2 = \sum \frac{(f_0 - f_a)^2}{f_a}$, dove f_0 indica la frequenza osservata ed f_a indica la frequenza attesa nel caso in cui l'ipotesi nulla sia verificata. Come nel caso del T-test, il valore ottenuto per il $\chi 2$ va confrontato con i valori tabulati, per l'opportuno livello di probabilità e per un numero di gradi di libertà pari al numero dei confronti indipendenti. Se il valore di $\chi 2$ calcolato risulta superiore a quello tabulato $\chi_c 2$ significa che l'ipotesi nulla non può essere accettata; altrimenti, se $\chi 2 < \chi_c 2$, si accetta l'ipotesi nulla.

6.2.10 L'alpha di Cronbach

Un ulteriore indice statistico utile per l'analisi degli esiti della ricerca qui discussa è l'*alpha di Cronbach*[103] (indicato con il coefficiente α). Esso deve il suo nome al suo ideatore, il pedagogista statunitense Lee Cronbach, il quale lo propose per la prima volta nel 1951 per valutare in maniera oggettiva la validità di test psicologici e pedagogici. Secondo la Teoria Classica del Test, una qualunque misurazione effettuata tramite test contiene una componente vera ed una di errore. Per valutare questo errore in modo oggettivo, si ricorre a misure di affidabilità o attendibilità, quali l'alpha di Cronbach. Essa costituisce attualmente l'indice statistico più diffuso per valutare l'affidabilità delle scale o dimensioni di un questionario, cioè per valutare oggettivamente quanto sia possibile raggruppare un gruppo di item del questionario; se più item vogliono misurare, ad esempio, la dimensione dell'ansia o dello stato di salute di una persona, infatti, si suppone che i punteggi rilevati per questi item siano simili tra loro. Tale indicatore si può usare nell'analisi di questionari in cui sono presenti variabili numeriche o assimilabili (come nel caso delle variabili su scala di Likert) ed assume valore compreso tra 0 e 1. Più il valore di α aumenta (ed è prossimo a 1), maggiore è l'affidabilità all'interno di una dimensione. A seconda dell'ambito in cui viene usato, le soglie oltre le quali si ottiene un'elevata affidabilità sono generalmente 0,7 o 0,8. Se si ottenesse un valore molto elevato, potrebbe essersi verificato un errore nel calcolo o nella costruzione degli item; alcuni item potrebbero, infatti, rivelarsi ridondanti e, dunque, bisognerebbe valutare se eliminarne alcuni e ridurre la lunghezza del questionario. La rimozione di un item porterebbe ad una migliore affidabilità della dimensione che si sta analizzando ma, qualora il valore dell'alpha di Cronbach aumenti, occorre valutare attentamente se eliminare o no quell'item. Quando gli item che compongono una dimensione non sono espressi tutti su una stessa scala (ad esempio, alcuni su una scala di Likert a 5 punti, altri su una scala a 7 punti), è consigliabile riportare un alpha standardizzato, calcolato su variabili standardizzate. L'alpha di Cronbach risulta influenzata, come accennato sopra, da tutto ciò che agisce sulla

[103] Per ulteriori approfondimenti, si veda il testo originale Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika, 16*(3), 297-334.

componente di errore. Come diretta conseguenza, questo indice di affidabilità dipende da vari fattori che possono portarne ad una distorta interpretazione. I principali sono i seguenti:

- le caratteristiche del campione analizzato e la sua rappresentatività;
- il numero di item che compongono la dimensione (più è grande, più aumenta l'alpha di Cronbach);
- l'unidimensionalità della scala che si intende analizzare (se gli item considerati per il calcolo dell'alpha misurassero più dimensioni, si potrebbe ottenere un valore di alpha sottostimato);
- l'eterogeneità tra le varianze dei punteggi veri degli item (maggiore eterogeneità comporta una sottostima del valore di alpha);
- il grado di indipendenza degli errori (in un'analisi ottimale, gli errori dovrebbero essere del tutto casuali e non sistematici).

Gli indici sinora commentati (alpha di Cronbach, Chi-quadro, p-value, T-test e gli indici di statistica descrittiva) possono essere calcolati facilmente da un software statistico, quale ad esempio il software *SPSS* (Statistical Program for Social Sciences) che è stato usato in questo lavoro di tesi (altri software in uso sono *R, STATA, SAS, JAMOVI*). Questo software è risultato utile in fase di analisi fattoriale del test usato nelle prime due fasi della ricerca. Per completezza, viene fatto cenno in questo paragrafo all'analisi fattoriale, specificando di cosa si tratta, come viene effettuata e a quale scopo.

6.2.11 L'analisi fattoriale esplorativa e confermativa

L'analisi fattoriale è un insieme di tecniche statistiche molto spesso usato per la validazione di questionari, ovvero per capire se un questionario o test misura effettivamente ciò per cui il ricercatore l'ha costruito (Taherdoost et al., 2014). Trova ampio uso nei campi della statistica, delle scienze sociali, del commercio, dell'educazione e della psicologia (Taherdoost et al., 2014) e serve ad individuare eventuali "fattori" o "variabili latenti" (non direttamente misurabili, come l'intelligenza, l'ansia, la motivazione, …), possibilmente tra loro indipendenti, con le quali giustificare le similarità che accomunano una serie di variabili (Contò & fiore, 2010, p.418). La sua introduzione si deve al lavoro dello psicologo Charles Edward Sperman[104] che nei primi del Novecento volle misurare in modo analitico l'intelligenza umana. Ancora oggi, molto spesso viene usata in psicometria per lo studio analitico della mente umana. L'aggettivo "fattoriale" con cui è stata definita deriva dal fatto che in statistica vengono chiamate "fattori" (o anche, componenti o dimensioni) le variabili latenti sopra menzionate. Un'analisi fattoriale può essere condotta a scopi *esplorativi* o *confermativi*. Nel primo caso, si parla di analisi fattoriale *esplorativa* (EFA, Exploratory Factor Analysis) e nel secondo di analisi fattoriale *confermativa* (CFA, Confirmatory Factor Analysis) (Contò & Fiore, 2020). L'EFA serve a rilevare l'eventuale presenza di variabili latenti (sconosciute al ricercatore) che sono in relazione con le variabili osservate (note al ricercatore), allo scopo di ridurre il numero complessivo di variabili in un insieme più piccolo (Taherdoost et al., 2014). Nell'analisi EFA, infatti, i fattori vengono estrapolati a partire dai dati e si genera in tal modo una nuova struttura fattoriale, non formulata a priori, pur tenendo in considerazione un certo grado di affidabilità dei dati nell'indurre ipotesi su una struttura plausibile (Contò & Fiore, 2020). Requisito fondamentale è che le variabili latenti non superino in numero le variabili osservate; il numero di soggetti destinatari del test dovrebbe essere sufficientemente elevato (secondo alcuni studi, dovrebbe essere almeno un centinaio) ma in ogni caso non sia inferiore al numero di variabili osservate. Di contro, la CFA si usa quando si conoscono già le relazioni tra le variabili e si vuole piuttosto confermare tale struttura fattoriale formulata a priori per i dati raccolti (Contò & Fiore, 2020). Essa si effettua mediante l'uso di modelli di equazioni strutturali, vincolate alle variabili che appartengono già ad un determinato fattore. Nell'analisi fattoriale confermativa, come affermano Contò e Fiore (2020), è il ricercatore che pone dei vincoli sul proprio modello e verifica la coerenza del proprio modello con i dati osservati. Per capire se la struttura è confermata dai dati a disposizione, vanno calcolati e interpretati alcuni indici di adattamento, come ad esempio il Chi-quadro e altri indici che qui non vengono menzionati perché non pertinenti allo studio in oggetto. Tali indici descrivono in che misura il modello ben si adatta ai dati a

[104] Per ulteriori approfondimenti, si rimanda al testo originale Spearman, C. (1904). "General intelligence", objectively determined and measured. *American Journal of Psychology 15*, pp. 201-293.

disposizione del ricercatore, ovvero, quanto bene il modello sia in grado di descrivere le osservazioni. Le tecniche usate per EFA e CFA sono dunque molto diverse, sia tenuto conto della differenza degli scopi perseguiti, sia per il tipo di modellizzazione matematica adottata.

L'EFA viene effettuata in maniera sequenziale, seguendo una ben precisa scaletta i cui passi fondamentali sono (Contò & Fiore, 2020; Taherdoost et al., 2014):

1) valutazione delle assunzioni: si cerca di capire se l'EFA è il metodo statistico più appropriato per raggiungere lo scopo dello studio (si considera sia l'adeguatezza delle variabili, sia la valutazione della fattorializzabilità della matrice di correlazione);
2) estrazione dei fattori: si sceglie la procedura di estrazione e il metodo per decidere il numero di fattori che si vogliono considerare;
3) rotazione dei fattori: si seleziona il metodo di rotazione che si ritiene più appropriato per ottenere una soluzione finale interpretabile;
4) interpretazione e validazione della soluzione fattoriale a cui si è giunti.

In primo luogo, dall'analisi fattoriale di un insieme di variabili osservate (ad esempio, gli item di un questionario), si ottiene una matrice di correlazione con la quale vengono determinate le relazioni tra le variabili osservate e le variabili latenti (Taherdoost et al., 2014). Si verifica anzitutto l'adeguatezza della matrice di correlazione[105]: essa dovrebbe infatti avere alte correlazioni (con coefficiente almeno 0,30 [106]) e ciò può essere evidenziano ricorrendo al calcolo del determinante (se è grande/piccolo, le correlazioni

[105] Per ulteriori approfondimenti, si rimanda al testo Burton, L. J., & Mazerolle, S. M. (2011). Survey instrument validity part I: Principles of survey instrument development and validation in athletic training education research. *Athletic Training Education Journal, 6*(1), 27-35.

EDUCATION JOURNAL 6(1): 27-35.

[106] Alcuni ricercatori indicano tre categorie di correlazione tra gli item di una scala: minimale, se il coefficiente di correlazione tra due qualsiasi itel della scala è almeno 0,30; importante, se è almeno 0,40; concreto, se invece è uguale o superiore a 0,50. Se le correlazioni sono inferiori a 0,30 allora si dovrebbe riconsiderare il metodo EFA e valutare se applicarne un altro più appropriato. In ultimo, se la matrice di correlazione è l'identità, non vi è alcuna relazione tra gli item (si veda Hair et al., 1995).

sono basse/alte) o al calcolo di indici quali l'indice di Kaiser-Meyer-Olkin (KMO[107]) e il test di sfericità di Barlett[108]. Il test di adeguatezza campionaria KMO consente di mettere a confronto la grandezza delle correlazioni osservate rispetto alle correlazioni parziali (Contò & Fiore, 2020). L'indice KMO, che varia tra 0 e 1, dovrebbe essere maggiore di 0,60. In particolare, Contò e Fiore (Contò & Fiore, 2020) riportano schematicamente l'interpretazione che fornisce la letteratura: l'indice KMO è da ritenersi eccellente se è strettamente maggiore di 0,90; buono se è compreso fra 0,80 e 0,90; accettabile se è compreso fra 0,70 e 0,80; mediocre se è compreso fra 0,60 e 0,70). Qualora sia invece inferiore a 0,60 è sconsigliabile procedere con l'analisi fattoriale. Il test di sfericità di Barlett verifica l'ipotesi nulla che la matrice di correlazione sia una matrice identità: tale test deve dare un valore di Chi-quadro significativo, in quanto valori di significatività inferiori a 0,05 indicherebbero che la matrice di correlazione è significativamente diversa da una matrice di identità, rifiutando così l'ipotesi nulla (Contò & Fiore, 2020; Taherdoost et al., 2014). Se la verifica va a buon fine, ovvero se il KMO indica l'adeguatezza del campione e il test di sfericità di Bartlett indica che la matrice di correlazione degli articoli non è una matrice identità, allora si può procedere con l'estrazione dei fattori e la successiva rotazione (Taherdoost et al., 2014). In questa fase, è possibile osservare come le variabili sono correlate tra loro e se alcuni gruppi interni di variabili sono più correlate tra loro rispetto ad altre; si controlla la significatività statistica e si ipotizza, di conseguenza, il numero di fattori da estrarre (Contò & Fiore, 2020).

Per estrarre i fattori, esistono diversi metodi, tra cui: l'analisi delle componenti principali[109] (PCA – *Principal Component Analysis*), la fattorizzazione dell'asse principale, il metodo di massima verosimiglianza, i minimi quadrati generalizzati e altri non citati in questo lavoro

---

[107] Per ulteriori approfondimenti, si veda il testo originale (Kaiser, H. F. (1970). A Second-Generation Little Jiffy. *Psychometrika 35*(4): 401-415).

[108] Per ulteriori approfondimenti, si veda il testo originale (Bartlett, M. S. (1950). Tests of significance in factor analysis. *British Journal of statistical psychology, 3*(2), 77-85).

[109] La PCA è una tecnica di riduzione delle dimensioni (nonché del numero degli item): essa valuta le relazioni tra i dati e riduce il numero di variabili; ciò rende più semplice l'interpretazione dei dati senza tuttavia perdere troppa informazione.

(Contò & Fiore, 2020; Costello & Osborne, 2005). Taherdoost e altri ricercatori evidenziano come nella ricerca le differenze tra i primi due metodi citati, che sono anche i metodi più comuni, siano ritenute pressoché marginali. Nella scelta del metodo più opportuno intervengono vari criteri di natura statistica, interpretativa e metodologica. Al termine della fase di estrazione dei fattori, la scelta del numero di fattori da considerare risulta fondamentale per il passo successivo, cioè per la rotazione degli assi principali. Tale decisione può essere presa sfruttando differenti criteri, tra i quali il criterio di Kaiser[110] (in base al quale si considerano tutti e soli i fattori che hanno autovalori maggiori di 1) e il criterio di Cattell[111], o analisi dello scree-plot, che stabilisce il numero di fattori per via grafica. Il primo criterio, seppur molto usato per la sua semplice base teorica e per la sua facilità d'uso, non è stato comunque esente da critiche riguardanti principalmente la tendenza del criterio a sottostimare o sovrastimare il numero di fattori (Taherdoost et al., 2014). Nel secondo criterio si usa lo scree-plot di Cattell, un grafico decrescente[112] degli autovalori che rappresenta in ascissa i fattori in successione, in ordinata i rispettivi autovalori: in base al criterio di Cattell, il numero di fattori da conservare è uguale al numero di componenti che si osservano fino a quando la curva di appiattisce, o meglio, il numero di punti dati al di sopra del flesso (incluso il punto di flesso stesso). Nella logica che sta dietro al metodo di Cattell, il punto di flesso costituisce una sorta di punto di rottura che separa i fattori importanti (al di sopra del flesso) dai fattori minori (al di sotto del flesso). Oltre all'ispezione dello scree-plot (il grafico degli autovalori), Contò e Fiore (2020) indicano altri metodi utili per la scelta del numero di fattori, tra cui l'esame degli autovalori della matrice di correlazione, la percentuale di varianza spiegata da ognuna delle componenti principali calcolabili, la percentuale cumulata di varianza spiegata dalle componenti. Gli autovalori sono infatti legati alla quota di variabilità che è "spiegata" dal

---

[110] Per ulteriori approfondimenti, si veda il testo originale (Kaiser, H. F. (1960). The application of electronic computers to factor analysis. *Educational and psychological measurement, 20*(1), 141-151).

[111] Per ulteriori approfondimenti, si veda il testo originale (Cattell, R. B. (1966). The scree test for the number of factors. *Multivariate behavioral research, 1*(2), 245-276).

[112] Il grafico è "decrescente" in quanto gli autovalori assumono valori sempre minori man mano che dal primo fattore ci si sposta verso l'ultimo.

fattore; l'esito atteso è che gli autovalori selezionati siano in grado di spiegare una percentuale di variabilità complessiva degli item del questionario superiore ad una soglia fissata. Questa soglia dipende dallo specifico campo di ricerca in cui si opera, ad esempio: nelle scienze naturali, è fissata generalmente al 95%, mentre nelle scienze umane è in genere abbassata al 50%-60% (Hair et al., 1995).

Il risultato viene poi sottoposto a rotazione con vari metodi. La rotazione dei fattori consiste nella traslazione dei fattori nello spazio fattoriale rispetto all'originaria posizione ed ha come obiettivo quello di rendere la soluzione fattoriale più facilmente interpretabile (Contò & Fiore, 2020). Ciò che cambia è la percentuale di varianza spiegata dal singolo fattore, percentuale che non risulterà più omogenea. (Contò & Fiore, 2020). Si distinguono cinque diversi metodi di rotazione, raggruppabili nelle seguenti due tipologie:

i. metodi che usano rotazioni ortogonali (il più usato è il Varimax); la rotazione degli assi fattoriali rende interpretabili le dimensioni latenti (o fattori), mantenendo l'indipendenza fra i fattori;
ii. metodi che usano rotazioni oblique: la rotazione obliqua permette un migliore adeguamento degli assi fattoriali alle variabili osservate (quindi, una migliore interpretabilità dei dati) ma non mantiene l'indipendenza statistica fra i fattori[113].

Tra i metodi di rotazione obliqua vi è il metodo di obliquità minima (Oblimin), che fissa le inclinazioni degli assi e, quindi, la loro intercorrelazione. Dopo un certo numero di iterazioni, si ottiene in tal modo la matrice del modello con numero di righe pari agli item del questionario e tante colonne quanti sono i fattori estratti. Le variabili (o item) osservate che correlano tra loro si trovano su righe che hanno ovunque valore nullo eccetto che in una sola colonna: le variabili correlate sottendono il fattore corrispondente a quella colonna. Ai fini dell'interpretazione del risultato, i parametri più importanti da valutare sono (Contò & Fiore, 2020):

- la varianza "spiegata" da tutti i fattori considerati, singolarmente e complessivamente;

[113] Detto in altri termini, la rotazione obliqua produce strutture con costrutti che sono correlati tra loro (Taherdoost et al., 2014).

- la saturazione (*factor loading*), che indica quanto è forte la relazione tra ogni fattore e la variabile misurata; saturazioni molto basse (se standardizzate, con valori assoluti inferiori a 0,30 o 0,40) indicano che si possa escludere la relazione tra una variabile e un fattore, semplificando quindi la struttura del modello;
- la comunalità[114], che descrive quanto della varianza di una variabile osservata viene spiegato dalla varianza del fattore che satura tale variabile.

Lo studio della percentuale di varianza spiegata e delle comunalità delle variabili favoriscono la comprensione della soluzione cui si è pervenuti; le saturazioni fattoriali della soluzione ruotata aiutano infine ad assegnare un'etichetta ai fattori che sono emersi dall'analisi (Contò & Fiore, 2020). È bene precisare che assegnare un nome ai fattori selezionati è un processo soggettivo nonché teorico: esse, difatti, dovrebbero riflettere l'intento teorico e concettuale del ricercatore (Taherdoost et al., 2014). Ad esempio, un fattore può includere quattro variabili che sono tutte collegate all'ansia provata durante un compito di matematica soddisfazione dell'utente; un'etichetta appropriata per quel fattore potrebbe essere in quel caso "ansia verso la matematica". Henson e Roberts (Henson & Roberts, 2006) ritengono che per fornire un'interpretazione significativa, un fattore deve saturare almeno due o tre variabili, mentre la dimensione del campione può essere relativamente piccola. Dopo aver stabilito la struttura fattoriale, ossia quali fattori saturino quali variabili, è possibile che sia rilevata una struttura multifattoriale; in tal caso, spesso si esegue una nuova EFA per ciascun fattore. Un fattore con meno di tre item viene considerato secondo alcuni ricercatori (Costello & Osborne, 2005) un fattore debole e instabile; un fattore robusto dovrebbe avere almeno cinque item.

6.3 *Esiti dell'analisi fattoriale sul test somministrato nella Fase 1 e nella Fase 2*

In questo paragrafo vengono descritti gli esiti dell'analisi fattoriale esplorativa (EFA), effettuata mediante l'uso del software statistico SPSS a partire dai 21 item somministrati agli studenti del sottocampione 1 e del sottocampione 2. Per rendere più scorrevole la

[114] La comunalità esprime, in altri termini, quanto ogni variabile è spiegata bene da un fattore.

trattazione, si è scelto di indicare con il termine “dataset 1” le risposte al test somministrato nella Fase 1, con il termine “dataset 2” le risposte fornite al test somministrato nella Fase 2. Il dataset 1 è stato analizzato al fine di determinare quanti e quali siano i fattori presenti e, sulla base di quanto emerso, usare la medesima struttura fattoriale sul dataset 2; in secondo luogo, si è cercato di formulare delle inferenze statistiche sulle due popolazioni messe a confronto: la popolazione di studenti di primo anno del Liceo Matematico e la popolazione di studenti coetanei di altri corsi. Innanzitutto, per valutare la bontà dell’analisi fattoriale per il dataset 1, si è fatto riferimento agli indicatori KMO ed il test di sfericità di Bartlett.

Tabella 1 Test di KMO e Barlett. I valori sono stati calcolati dal software SPSS.

Misura di Kaiser-Meyer-Olkin di adeguatezza del campionamento.		,859
Test della sfericità di Bartlett	Appross. Chi-quadrato	3047,264
	gl	210
	Sign.	,000

Il valore ottenuto per l’indice KMO è di 0,859 (Tabella 1), quindi risulta essere molto buono. Per quanto riguarda invece la sfericità si ha che $p - value < 0{,}001$ (Tabella 1); pertanto, il test è significativo. Di conseguenza, si è potuto procedere con l’estrazione dei fattori. La tecnica di estrazione scelta è l’analisi delle componenti principali (PCA). È stata inoltre applicata una rotazione di tipo Oblimin per migliorare l’interpretabilità dei risultati ottenuti.

Tabella 2 Comunalità con la quale si esprime quanto della varianza della variabile osservata (prima colonna a sinistra) viene spiegato dalla varianza del fattore che satura tale variabile. I valori sono indicati nell’ultima colonna a destra. I valori sono stati calcolati dal software SPSS.

Comunalità

	Iniziale	Estrazione
1) Sinceramente non lo so. Sento che sto solo perdendo tempo a studiare matematica.	1,000	,513

2) Perché voglio far vedere agli altri (ad esempio agli insegnanti, alla famiglia, agli amici) che vado bene in matematica.	1,000	,499
3) Perché voglio mostrare a me stesso/a che posso essere bravo/a in matematica.	1,000	,720
4) Non ne sono sicuro/a; non vedo come la matematica mi possa essere utile.	1,000	,500
5) Perché, senza un bel voto in matematica, non sarò capace di trovare un lavoro ben pagato in futuro.	1,000	,604
6) Perché credo che la matematica migliorerà le mie competenze di lavoro.	1,000	,600
7) Per il piacere che provo quando scopro cose nuove in matematica che non avevo mai imparato prima.	1,000	,759
8) Per ottenere in futuro un lavoro più importante di chi non ha studiato matematica.	1,000	,595
9) Per mostrare a me stesso che sono intelligente.	1,000	,709
10) Per ottenere un lavoro ben pagato in futuro.	1,000	,681
11) Per il piacere che provo quando mi sento completamente preso da ciò che i matematici hanno scoperto.	1,000	,710
12) Perché quello che imparo adesso in matematica mi sarà utile per il corso universitario che mi piacerebbe fare poi.	1,000	,646
13) Perché voglio sentire la soddisfazione personale di capire la matematica.	1,000	,557
14) Perché studiare matematica mi servirà in futuro.	1,000	,728
15) Per il piacere che provo quando conosco altre cose di matematica.	1,000	,768
16) Perché voglio avere "la bella vita" più avanti.	1,000	,632
17) Non lo so; non riesco a capire cosa sto facendo in matematica.	1,000	,700
18) Perché penso che la matematica mi aiuterà a prepararmi meglio per quello che mi piacerebbe fare nella vita.	1,000	,700
19) Non riesco a vedere perché sto studiando matematica e, francamente, non mi importa nulla.	1,000	,766
20) Per il fatto che, quando vado bene in matematica, mi sento importante.	1,000	,511
21) Per il piacere che provo quando imparo come funzionano le cose nella vita, grazie alla matematica.	1,000	,603

Metodo di estrazione: Analisi dei componenti principali.

Dalla Tabella 2 è possibile notare come le comunalità (ovvero la percentuale di varianza spiegata della singola variabile) siano superiori o uguali al 50% (ovvero a 0,50). Si tratta di un risultato soddisfacente. L'analisi fattoriale ha inoltre estratto cinque fattori con autovalore maggiore di 1. I fattori estratti sono in grado di spiegare circa il 64% della variabilità complessiva degli item originali (Tabella 3).

Tabella 3 Estrazione degli autovalori. I valori sono stati calcolati dal software SPSS.

	Autovalori iniziali		
Componente	Totale	% di varianza	% cumulativa
1	5,927	28,224	28,224
2	3,186	15,173	43,396
3	1,936	9,217	52,613
4	1,368	6,513	59,126
5	1,084	5,160	**64,286**
6	,742	3,533	67,818
7	,707	3,366	71,185
8	,681	3,243	74,428
9	,646	3,076	77,503
10	,566	2,697	80,200
11	,547	2,607	82,807
12	,508	2,418	85,225
13	,489	2,329	87,554
14	,421	2,007	89,561
15	,399	1,899	91,459
16	,360	1,714	93,173
17	,342	1,630	94,804
18	,327	1,558	96,362
19	,284	1,352	97,714
20	,245	1,167	98,881
21	,235	1,119	100,000

Metodo di estrazione: Analisi dei componenti principali.

Secondo il criterio di Kaiser, pertanto, il test somministrato avrebbe una struttura fattoriale a 5 fattori. Ciò ha trovato conferma anche nello scree-plot di Cattel, col quale è visualizzare graficamente l'andamento degli autovalori (Figura 3).

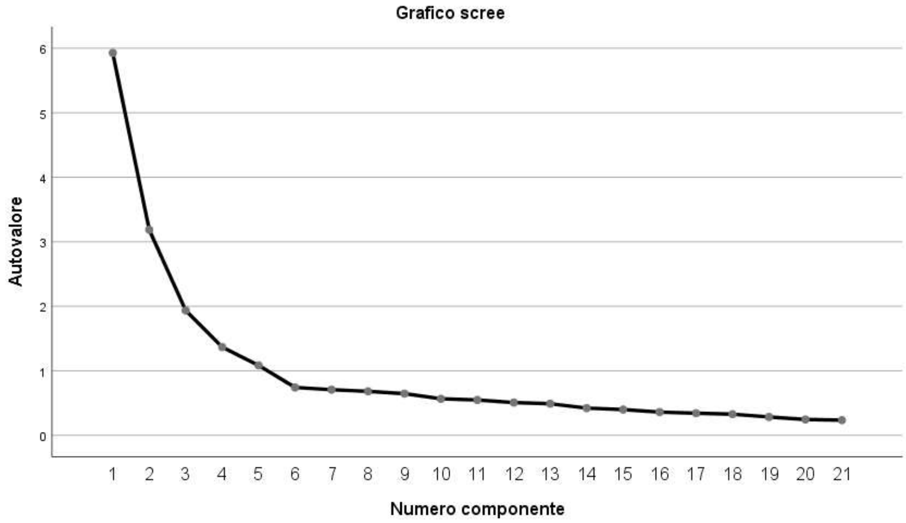

Figura 8 Lo scree-plot riporta l'andamento degli autovalori in relazione alle rispettive componenti.

Nello scree-plot si può effettivamente osservare la presenta di un punto di flesso in concomitanza del quinto fattore e ciò giustifica ulteriormente la scelta di estrarre i primi cinque fattori. La matrice del modello, ovvero la matrice dei loadings ruotata (dove è indicato quanto ogni fattore satura le variabili ad esso associate) è indicata nella Tabella 4.

Tabella 4 Matrice del modello. I valori sono stati calcolati dal software SPSS.

	Componente				
	1	2	3	4	5
18) Perché penso che la matematica mi aiuterà a prepararmi meglio per quello che mi piacerebbe fare nella vita.	,789				
12) Perché quello che imparo adesso in matematica mi sarà utile per il corso universitario che mi piacerebbe fare poi.	,760				
14) Perché studiare matematica mi servirà in futuro.	,746				
6) Perché credo che la matematica migliorerà le mie competenze di lavoro.	,598				
19) Non riesco a vedere perché sto studiando matematica e, francamente, non mi importa nulla.		,917			
17) Non lo so; non riesco a capire cosa sto facendo in matematica.		,865			

4) Non ne sono sicuro/a; non vedo come la matematica mi possa essere utile.		,519			
1) Sinceramente non lo so. Sento che sto solo perdendo tempo a studiare matematica.		,496			
15) Per il piacere che provo quando conosco altre cose di matematica.			,865		
11) Per il piacere che provo quando mi sento completamente preso da ciò che i matematici hanno scoperto.			,860		
7) Per il piacere che provo quando scopro cose nuove in matematica che non avevo mai imparato prima.			,836		
21) Per il piacere che provo quando imparo come funzionano le cose nella vita, grazie alla matematica.			,661		
3) Perché voglio mostrare a me stesso/a che posso essere bravo/a in matematica.				-,850	
9) Per mostrare a me stesso che sono intelligente.				-,792	
20) Per il fatto che, quando vado bene in matematica, mi sento importante.				-,545	
2) Perché voglio far vedere agli altri (ad esempio agli insegnanti, alla famiglia, agli amici) che vado bene in matematica.				-,540	
13) Perché voglio sentire la soddisfazione personale di capire la matematica.			,408	**-,484**	
5) Perché, senza un bel voto in matematica, non sarò capace di trovare un lavoro ben pagato in futuro.					-,789
16) Perché voglio avere "la bella vita" più avanti.					-,722
10) Per ottenere un lavoro ben pagato in futuro.					-,715
8) Per ottenere in futuro un lavoro più importante di chi non ha studiato matematica.					-,634

Metodo di estrazione: Analisi dei componenti principali.
Metodo di rotazione: Oblimin con normalizzazione Kaiser.

Si osserva qui come la struttura sia perfettamente identificata e si possa così assegnare un'opportuna etichetta a ciascun fattore:

1. Il primo fattore, costituito dagli item 6, 12, 14, 18, è denominato *Identificazione*.
2. Il secondo fattore, costituito dagli item 1, 4, 17, 19, è denominato *Amotivazione*.
3. Il terzo fattore, costituito dagli item 7, 11, 15, 21, è denominato *Regolazione intrinseca*.
4. Il quarto fattore, costituito dagli item 2, 3, 9, 13, 20, è denominato *Introiezione.*
5. Il quinto fattore, costituito dagli item 5, 8, 10, 16, è denominato *Regolazione esterna*.

Si osservi come, a differenza di quanto emerso dallo studio da cui questo lavoro trae spunto (Lim & Chapman, 2014a), l'item 13 risulta più correlato al fattore della Regolazione introiettata anziché al fattore dell'Introiezione (Tabella 4). Ciò non deve sorprendere il lettore, dal momento che il test è stato somministrato a studenti italiani che parlano una lingua diversa ed appartengono ad una differente cultura. Per ricercare eventuali correlazioni tra i fattori estratti, si è scelto di costruire la matrice di correlazione dei componenti, mediante l'uso del medesimo software: come si può osservare, i fattori estratti risultano essere leggermente correlati tra loro (Tabella 4).

Tabella 5 Matrice di correlazione dei componenti. I valori sono stati calcolati dal software SPSS.

Componente	1	2	3	4	5
1	1,000	-,286	,345	-,169	-,185
2	-,286	1,000	-,241	-,042	-,147
3	,345	-,241	1,000	-,262	-,096
4	-,169	-,042	-,262	1,000	,277
5	-,185	-,147	-,096	,277	1,000

Metodo di estrazione: Analisi dei componenti principali.
Metodo di rotazione: Oblimin con normalizzazione Kaiser.

Al fine di comprendere in che misura le scale scelte fossero affidabili, cioè se gli item fossero tra loro correlati, è stato usato come indice di affidabilità l'indice alpha di Cronbach su ciascun fattore. Il valore ricavato è stato confrontato con quello l'alpha di Cronbach avrebbe assunto nel caso di eliminazione di uno degli item della scala (cioè, del fattore). A titolo esemplificativo, si riportano le tabelle con i valori alpha relativi al primo fattore.

Tabella 6 Statistica di affidabilità sul primo fattore. I valori sono stati calcolati dal software SPSS.

Statistiche di affidabilità

Alpha di Cronbach	N. di elementi
,842	4

L'indice alpha ha un valore pari a 0,842, quindi è molto alto.

Tabella 7 Statistiche elemento-totale in riferimento agli item del primo fattore (prima colonna a sinistra). L'ultima colonna della tabella indica come cambierebbe l'indice alpha se fosse eliminato uno degli item. I valori sono stati calcolati dal software SPSS.

Statistiche elemento-totale

	Media scala se viene eliminato l'elemento	Varianza scala se viene eliminato l'elemento	Correlazione elemento-totale corretta	Alpha di Cronbach se viene eliminato l'elemento
6) Perché credo che la matematica migliorerà le mie competenze di lavoro.	11,14	9,687	,611	,827
12) Perché quello che imparo adesso in matematica mi sarà utile per il corso universitario che mi piacerebbe fare poi.	11,03	8,437	,664	,808
14) Perché studiare matematica mi servirà in futuro.	10,98	8,717	,736	,774
18) Perché penso che la matematica mi aiuterà a prepararmi meglio per quello che mi piacerebbe fare nella vita.	11,06	8,841	,703	,788

Come si può facilmente osservare (Tabella 6), in nessun caso eliminando un item tra quelli correlati al fattore 1 si otterrebbe un valore dell'alpha di Cronbach maggiore di 0,842 (Tabella 5). Pertanto, si è scelto di non eliminare nessuno degli item del fattore 1. Per i fattori 2 e 4 è stato rilevato un valore alpha pari a 0,741; per il terzo fattore, alpha = 0,859; per il quinto e ultimo fattore alpha = 0,791. Per brevità non si riportano le tabelle relative agli altri fattori in quanto esse sono in qualche misura simili alla precedente. In nessun caso, infatti, l'eliminazione di un item di ciascuna scala singolarmente avrebbe permesso di ottenere un valore alpha di Cronbach più elevato del valore calcolato inizialmente. Riassumendo, i valori dell'alpha di Cronbach risultano compresi tra 0,741 (*amotivazione, introiezione*) e 0,859 (*regolazione intrinseca*), suggerendo una buona consistenza interna per tutte le cinque sottoscale. Pertanto, non è stato eliminato alcun item del test e i fattori sono stati così individuati a partire dalle variabili originali, ossia i 21 item originali. Alla validazione del test sopra citato mediante analisi fattoriale, fa seguito la discussione sugli esiti della ricerca nei paragrafi successivi.

6.4 *Fase 1: esiti*

La trattazione degli esiti della ricerca si apre con la definizione del campione al quale si rivolge la prima fase della ricerca, secondo quanto specificato dai referenti universitari e nei primi tre quesiti (genere, età, eventuale appartenenza ad un corso di Liceo Matematico). Le risposte raccolte dal questionario somministrato agli studenti sono state analizzate quantitativamente per mezzo del software Microsoft Office Excel e, in parte, tramite il software SPSS.

Nell'anno scolastico 2018/19, sono state attivate n.37 classi prime di Liceo Matematico nei sette atenei coinvolti nella ricerca, di cui n.12 a Catania, n.1 a Firenze, n.3 a Parma, n.2 a Palermo, n.17 a Roma (con afferenza a La Sapienza di Roma), n.1 a Siena e n.1 a Udine. L'indirizzo di studi indicato dai referenti universitari con maggiore frequenza è il Liceo Scientifico ad indirizzo tradizionale, seguito dal Liceo Classico e dal Liceo Scientifico ad indirizzo Opzione Scienze Applicate; gli indirizzi indicati invece con minore frequenza sono il Liceo Linguistico, il Liceo delle Scienze Umane e l'Istituto Nautico. Le risposte sono pervenute da due istituti della provincia di Catania, dall'unico istituto in provincia di Firenze e dai due istituti della provincia di Palermo. Le risposte pervenute sono in numero 351. Si è scelto di escludere da esse quelle nelle quali gli item di risposta erano stati indicati tutti con uno stesso numero (in quanto ritenute non attendibili) e quelle incomplete di cinque o più item di risposta. Una sola risposta è stata annullata in quanto 13/21 item di risposta erano rimasti non compilati dallo studente in questione. Il campione residuo analizzato risulta così formato da n.350 studenti, di cui n.89 frequentanti il Liceo Matematico e n.261 invece no. Il primo sottocampione (indicato come 'sottocampione 1') si compone di n.45 maschi e n.44 femmine, provenienti dal Liceo Galileo Galilei di Catania, dal Liceo Classico Vittorio Emanuele II e dal Liceo Scientifico Benedetto Croce di Palermo, dal Liceo Scientifico Enrico Fermi di Paternò (in provincia di Catania), dal Liceo A.M. Enriques Agnoletti di Sesto Fiorentino (in provincia di Firenze). Il secondo sottocampione (indicato come 'sottocampione 2') si compone di n.171 maschi e n.90 femmine, provenienti dagli Istituti di Palermo e di Paternò (CT). L'età dichiarata dalla maggioranza del campione è di 14 anni, seguita in ordine decrescente da 15 anni, 13 anni, 16 e 17 anni. Sei studenti non dichiarano l'età. In particolare, dichiarano di avere compiuto 14 anni circa l'83% del sottocampione 1 (Figura 4) e circa l'81% nel sottocampione 2 (Figura 5); a seguire, circa l'8 % del sottocampione 1(Figura 4) ed il 12% del sottocampione 2 (Figura 5) dichiarano di avere compiuto 15 anni. Ridotte parti di ogni sottocampione dichiarano di avere una differente età o non la dichiarano affatto. La distribuzione del campione per fasce d'età in ogni sottocampione è indicata nelle figure seguenti; le percentuali sono arrotondate all'ultima cifra intera.

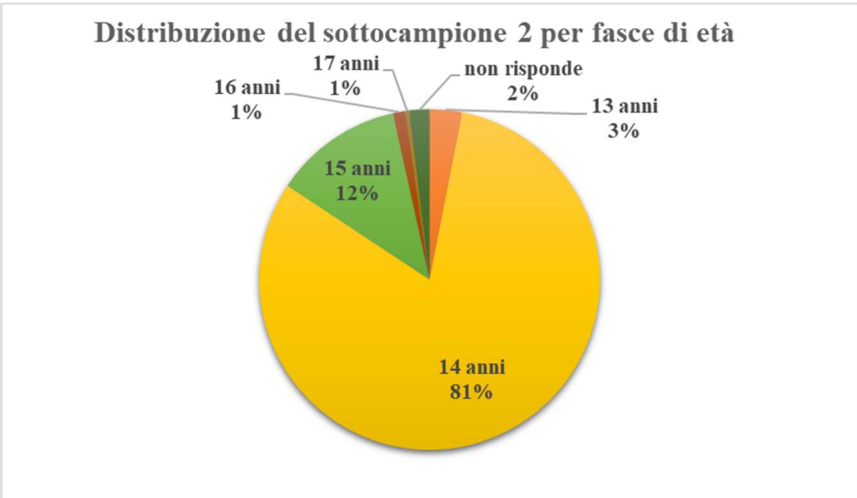

Figura 9 Suddivisione degli studenti del sottocampione 2 coinvolto nella Fase 1 in fasce d'età; la distribuzione è indicata in termini percentuali, arrotondate all'ultima cifra intera.

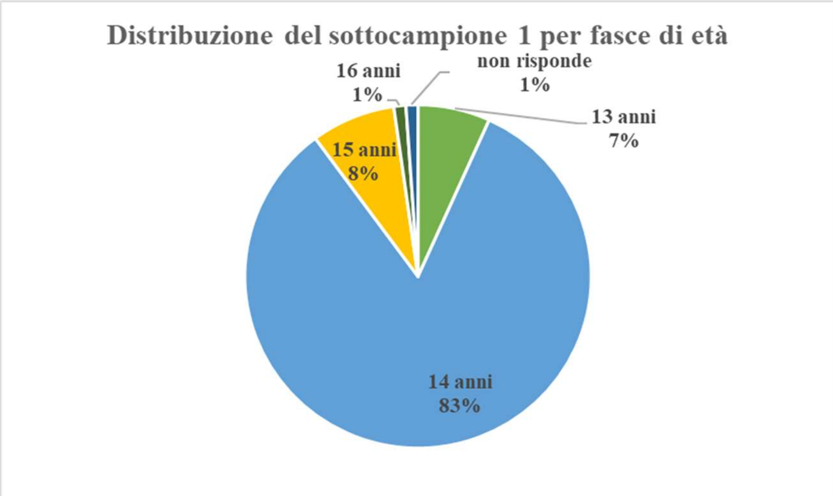

Figura 10 Suddivisione degli studenti del sottocampione 1 coinvolto nella Fase 1 in fasce d'età; la distribuzione è indicata in termini percentuali, arrotondate all'ultima cifra intera.

Le risposte alla domanda «Perché trascorri del tempo a studiare la matematica?» sono state analizzate quantitativamente sulla base di uno strumento ampiamente diffuso nella SDT: il *Relative Autonomy Index* (RAI), meglio noto come *Self-Determination Index* (SDI). Per ulteriori approfondimenti si rimanda ad altri contributi (Levesque et al., 2004; Grolnick & Ryan, 1989). Come già messo in atto in studi precedenti (Vallerand & Ratelle, 2002), tale indice viene computato attribuendo a ciascun item di risposta uno specifico peso, in accordo con il corrispondente livello di auto-determinazione. Ai quattro item rappresentanti la motivazione intrinseca viene attribuito il peso +2, in quanto corrispondenti al livello maggiore di auto-determinazione; ai quattro item corrispondenti alla motivazione identificata viene attribuito un peso +1. Agli item che rappresentano una motivazione introiettata viene dato peso -1; agli item che rappresentano una motivazione esterna viene dato un peso pari a -2 in quanto corrispondono al livello minore di autodeterminazione. Alla amotivazione viene attribuito un peso nullo per le ragioni già espresse nel capitolo precedente. I punteggi delle singole sottoscale così pesati si sommano a formare l'indice SDI. Esso si può interpretare come il grado di autonomia (ovvero, di comportamento autoregolato) dell'autodeterminazione degli studenti. Lo strumento grafico scelto per descrivere i risultati ottenuti nei due sottocampioni è il box-plot o diagramma a scatola e baffi in quanto si tratta di una rappresentazione sintetica utile alla rappresentazione dei comportamenti del campione in esame.

Per l'analisi quantitativa dei dati, si è scelto di analizzare la distribuzione dell'indice SDI per sottocampione e per genere, e la distribuzione delle risposte per singola sottoscala della motivazione. Affinché si potesse mettere in evidenza l'andamento di ciascuna distribuzione e rilevare parametri significativi, i valori dell'indice SDI ricavati sono stati approssimati ~~all'ultima cifra intera nei primi due casi,~~ alla seconda cifra decimale ~~nel terzo caso~~. Nell'ultimo caso, in particolare, approssimare i valori alla prima cifra intera avrebbe fatto emergere una invera distribuzione uniforme, dal momento che le risposte al questionario sono fornite secondo una scala di Likert da 1 a 5. Dal confronto tra la media e la mediana di ogni distribuzione è stata messa in luce l'eventuale situazione di asimmetria. Nella figura seguente (Figura 6) è riportata la distribuzione dell'indice SDI nella Fase 1 nel sottocampione di studenti di primo anno del Liceo Matematico mediante diagramma con scatola e baffi.

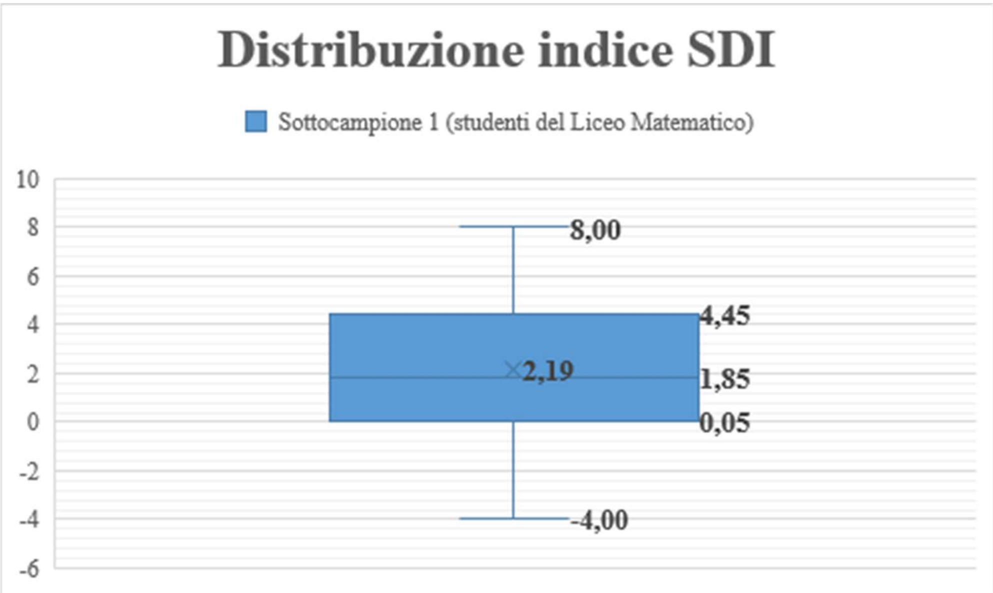

Figura 11. Diagramma a scatola e baffi per indice SDI nella Fase 1 nel sottocampione 1. Sull'asse verticale è indicato il punteggio SDI.

Il primo quartile è $Q_1 = 0,05$, il terzo quartile è $Q_3 = 4,45$ (Figura 6). Almeno il 50% delle risposte rilevate si trova nell'intervallo tra il primo ed il terzo quartile la cui ampiezza (o distanza interquartile) è $IQR=Q_3 -Q_1=4,40$. La linea orizzontale al centro dell'intervallo indica il valore centrale della distribuzione dei dati, ossia il secondo quartile (o mediana) il cui valore è $Q_2 = 1,85$ (Figura6). Si osserva che la mediana è leggermente inferiore alla media aritmetica dei valori, pertanto la distribuzione presente una asimmetria positiva. Ciò è confermato dal valore dell'indice di Fischer che è pari a 0,0743. Gli estremi, rispettivamente, superiore e inferiore si possono osservare alle estremità dei baffi del diagramma: $Q_0 = -4,00$ è il valore minimo, di poco maggiore del punto inferiore -6,55 ottenuto come $Q_1 - 1,5*(Q_3 - Q_1) = 0,05 - 1,5*(4,40)$ e arrotondato alla seconda cifra decimale; $Q_4 = 8,00$ è il valore massimo, minore del punto superiore 11,05 ottenuto come 4,45 + 1,5*(4,40) e arrotondato alla seconda cifra decimale Figura 6). Si osserva quindi una lieve asimmetria nei baffi: in particolare, il baffo inferiore ha lunghezza $|Q_1 - Q_0| = 4,05$, il baffo superiore ha lunghezza $|Q_4 - Q_3| = 3,60$. Vi è dunque una distribuzione lievemente più diffusa nel baffo inferiore. L'intervallo di variazione R (o Range) è 12, ottenuto come modulo della differenza tra il valore massimo $Q_4 = 8,00$ ed il valore minimo $Q_0 = -4,00$. Si ha quindi una notevole variabilità dei dati, con una media aritmetica che si attesta sui 2,19 punti. Non sono presenti valori anomali, in quanto nel diagramma non compaiono punti isolati. Nella figura seguente (Figura 7) è riportata la distribuzione dell'indice SDI nella Fase 1 nel sottocampione 2 mediante diagramma con scatola e baffi.

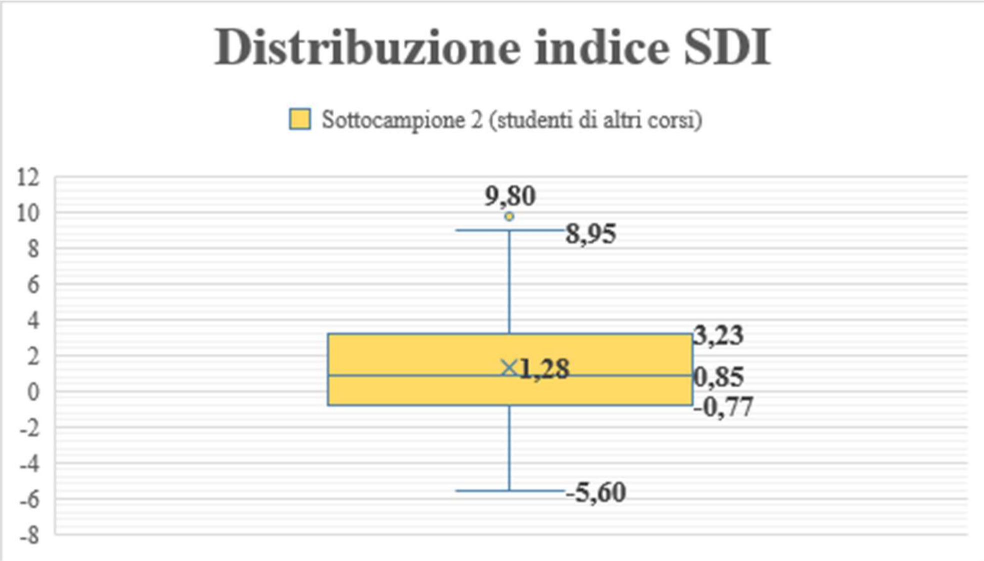

Figura 12. Diagramma a scatola e baffi per indice SDI nel sottocampione 2. Sull'asse verticale è indicato il punteggio SDI.

Il primo quartile è Q_1 = -0,77, il terzo quartile è Q_3 = 3,23 (Figura 12). La distanza interquartile, ottenuta come differenza tra i valori del terzo e del primo quartile, è 5. La linea orizzontale al centro dell'intervallo indica il valore centrale della distribuzione dei dati, ossia il secondo quartile, il cui valore è Q_2 = 0,85 (Figura 12). La media aritmetica della distribuzione è 1,28 ed è maggiore della mediana di 0,43 unità; pertanto, la distribuzione risulta asimmetrica positiva ovvero le modalità superiori alla mediana sono più distanti tra loro (più diversificate). Ciò trova conferma nell'indice di asimmetria di Fischer che in questo caso è uguale a 0,2423. L'estremo superiore e, rispettivamente, inferiore si possono osservare alle estremità dei baffi del diagramma: -5,60 è il valore minimo, 8,95 è il valore massimo (Figura 12). Si ha pertanto una asimmetria nei baffi: il baffo inferiore è lungo 6,37 (valore ottenuto dalla differenza tra Q_1 e il valore minimo -5,60); il baffo superiore è lungo 5,72 (valore ottenuto dalla differenza tra il valore massimo 8,95 e Q_3). Il campo di variazione R (o Range) è 14,55, ottenuto come modulo della differenza tra il valore massimo 8,95 ed il valore minimo -5,60. Il punto inferiore è pari a -6,73, ottenuto come differenza tra Q_1 e 1,5*5. Il punto superiore è pari a 10,73, ottenuto come somma tra Q_3 e 1,5*5. È presente un solo valore anomalo 9,80; la sua presenza si nota nel punto isolato al di sopra dei baffi (Figura 12).

Il grafico si differenzia dal precedente in quanto mostra una maggiore variabilità dei dati (dovuta ad un Range leggermente più ampio del precedente di n.0,60 punti). Ciò implica che le due distribuzioni assumono valori su intervalli diversi e, in particolare, gli indici SDI per studenti del Liceo Matematico sono più raggruppati rispetto al secondo sottocampione. Dal confronto tra i due grafici emerge una speculare asimmetria nei baffi ed una asimmetria nel solo box-plot riferito al sottocampione 2. Quest'ultimo presenta infatti una maggiore dispersione dei dati compresi tra 11 (valore della mediana) e 44. Si sottolinea in aggiunta che ciascun quartile dell'indice SDI nel sottocampione 1, eccetto Q_4, assume un valore più elevato del corrispondente quartile dell'indice SDI nel sottocampione 2. La maggiore dispersione dei dati riferiti al sottocampione 2 ed i valori inferiori dei quartili rispetto ai corrispondenti nel sottocampione 1 si possono spiegare pensando che le ragioni che spingono uno studente a studiare la matematica variano molto, in generale, da un individuo all'altro e per quanti non si iscrivono ad un Liceo Matematico potrebbero confluire in una motivazione mossa più da cause esterne alla persona (ad esempio, un riconoscimento da parte del docente o dei genitori) che da cause interne (ad esempio, la fiducia nelle proprie capacità, l'atteggiamento costruttivo e di piacere nell'apprendere la matematica).

Sulla base della distinzione tra regolazione autonoma (individuata da un indice SDI positivo) e regolazione controllata (individuata da un indice SDI negativo o nullo) quali meccanismi di regolazione del comportamento e della motivazione di un individuo, è stata elaborata la seguente tabella a doppia entrata (Tabella 8) nella quale sono indicati in termini percentuali gli studenti dei due sottocampioni aventi una regolazione autonoma o, rispettivamente controllata. Si nota che solo una esigua percentuale di studenti di ogni sottocampione presenta, secondo lo strumento di analisi adottato, una regolazione controllata, ovvero mossa perlopiù da cause esterne all'individuo. Tale percentuale è ancor più ridotta nel sottocampione 1 (24%) rispetto al sottocampione 2 (34%) (Tabella 8). Circa il 30% del campione totale mostra una regolazione controllata; tale percentuale è dovuta in misura maggiore agli studenti non iscritti in un Liceo Matematico (Tabella 8).

Tabella 8 Per ciascun campione considerato (colonna sinistra), si indicano le percentuali di studenti coinvolti nella Fase 1 aventi una regolazione autonoma (colonna centrale) e una regolazione controllata (colonna destra).

	% studenti con regolazione autonoma (SDI > 0)	% studenti con regolazione controllata (SDI ≤ 0)
Regolazione studenti sottocampione 1	76%	24%
Regolazione studenti sottocampione 2	66%	34%
Regolazione studenti del campione	68%	32%

Per confrontare la distribuzione dell'indice SDI nei due sottocampioni, si è scelto di procedere confrontando anche il valore medio che tale variabile ha assunto nel dataset 1 (Tabella 9).

Tabella 9 Statistiche descrittive relative alla variabile SDI per il dataset 1. I valori sono stati calcolati dal software SPSS.

Statistiche gruppo

	Studente_recode	N	Media	Deviazione std.	Media errore standard
SDI	Sottocampione 1	89	2,1949	2,84698	,30178
	Sottocampione 2	261	1,2828	2,88736	,17872

Dalla tabella (Tabella 9) è possibile notare come la media della variabile SDI sembri essere maggiore nel gruppo sperimentale (sottocampione 1) rispetto al gruppo di controllo (sottocampione 2) del dataset 1. Tuttavia, al fine di determinare se tale differenza sia o meno statisticamente significativa, si è reso necessario effettuare un T-test a campioni indipendenti. L'ipotesi nulla H_0 del T-test a campioni indipendenti è che le medie siano uguali nei due sottocampioni; l'ipotesi alternativa H_1 è che le medie differiscano significativamente. L'ipotesi nulla andrebbe dunque rifiutata qualora il *p-value* risulti essere inferiore alla soglia di 0,05; in tal caso, si potrebbe affermare che la differenza tra le medie è significativa con una probabilità di errore pari al 5%. Si precisa che, coerentemente con quanto specificato nel paragrafo precedente, è stato possibile effettuare il test t di Student in quanto il test di Levene per verificare l'ipotesi nulla di varianze uguali nei due sottocampioni ha dato riscontro positivo.

Tabella 10 T-test a campioni indipendenti calcolato in riferimento al dataset 1. I valori sono stati calcolati dal software SPSS.

Test campioni indipendenti

		Test di Levene per l'eguaglianza delle varianze		Test t per l'eguaglianza delle medie						
									Intervallo di confidenza della differenza di 95%	
		F	Sign.	t	gl	Sign. (a due code)	Differenza della media	Differenza errore standard	Inferiore	Superiore
SDI	Varianze uguali presunte	,114	**,736**	2,583	348	**,010**	**,91211**	,35317	,21748	1,60673
	Varianze uguali non presunte			2,601	154,138	,010	,91211	,35073	,21925	1,60497

Nello specifico, il test di Levene ha accettato l'ipotesi nulla di varianze uguali (p=0,736), ovvero, ha confermato la presenza di varianze omogenee nei due sottocampioni (Tabella 10). Il t-test classico (i cui risultati sono nella prima riga della Tabella 10) rifiuta l'ipotesi nulla di medie uguali, dal momento che p=0,010. Di conseguenza, si può concludere che la media della variabile SDI è significativamente diversa nei due sottocampioni e nella fattispecie la media del sottocampione 1 è significativamente più alta di 0,9121 punti rispetto alla media del sottocampione 2 (tale valore è ottenuto come differenza tra la media 2,1949 del sottocampione 1 e la media 1,2828 del sottocampione 2, come si può osservare nella Tabella 9). La probabilità di ottenere gli stessi risultati qualora l'ipotesi nulla sia vera è uguale al p-value, circa l'1% dunque. Ciò si potrebbe spiegare pensando a tutte le possibili cause interne (valorizzazione consapevole di quanto studiato in matematica, interesse, coinvolgimento, soddisfazione) che hanno portato gli studenti del gruppo sperimentale a studiare la matematica in un percorso di Liceo Matematico. Tali cause sarebbero, secondo i valori riportati in Tabella 9, preponderanti rispetto a quelle esterne (coinvolgimento dell'ego, autocontrollo, premi e punizioni esterne o interne alla persona) e, dunque, direzionano la motivazione dello studente verso un comportamento autonomo sin dalle prime lezioni del Liceo Matematico.

Durante l'analisi degli esiti, si è voluto anche indagare eventuali differenze di genere nel dataset 1 e nel dataset 2 (pur non essendo questo uno degli scopi del lavoro), con la possibilità di approfondire lo studio in futuro. Si è deciso pertanto di effettuare un t-test a campioni indipendenti per verificare se vi sia una differenza statisticamente significativa nella media della variabile SDI tra le due modalità della variabile Genere, cioè tra il gruppo dei Maschi e quello delle Femmine, nel campione considerato. In questo caso, l'ipotesi nulla del T-test a campioni indipendenti è che le medie siano uguali nei due gruppi (maschi e femmine, rispettivamente); l'ipotesi alternativa è che le medie differiscano significativamente. Da queste premesse, ne segue che si può rifiutare l'ipotesi nulla di medie uguali, qualora il p-value risulti essere inferiore a 0,05; ciò consentirebbe di concludere che le medie sono significativamente diverse nei due gruppi considerati. Coerentemente con quanto esplicitato in precedenza, prima del T-test viene effettuato il test di Levene per verificare l'ipotesi nulla di varianze uguali nei due sottogruppi. Qualora questa assunzione venga violata ($p<0,05$), va effettuato il t-test robusto, ovvero si dovranno commentare i risultati nella seconda riga dell'output.

Tabella 11 Statistiche di gruppo per la variabile SDI nelle due modalità della variabile Genere per il dataset 1. I valori sono stati calcolati dal software SPSS.

Statistiche gruppo

	Genere	N	Media	Deviazione std.	Media errore standard
SDI	Femmina	134	2,4385	2,87061	,24798
	Maschio	216	,9417	2,77431	,18877

Si osservi che la media della variabile SDI sembra essere maggiore nel gruppo delle Femmine rispetto al gruppo dei Maschi (Tabella 11); tuttavia, per determinare se questa differenza sia o meno statisticamente significativa è necessario effettuare il t-test.

Tabella 12 T-test a campioni indipendenti in riferimento alle modalità della variabile Genere nel dataset 1. I valori sono stati calcolati dal software SPSS.

Test campioni indipendenti

		Test di Levene per l'eguaglianza delle varianze		Test t per l'eguaglianza delle medie						
									Intervallo di confidenza della differenza di 95%	
		F	Sign.	t	gl	Sign. (a due code)	Differenza della media	Differenza errore standard	Inferiore	Superiore
SDI	Varianze uguali presunte	1,890	**,170**	4,841	348	**,000**	**1,49679**	,30917	,88872	2,10487
	Varianze uguali non presunte			4,803	274,727	,000	1,49679	,31166	,88326	2,11033

Il test di Levene accetta l'ipotesi nulla di varianze uguali (p=0,170) (Tabella 12); di conseguenza, viene effettuato sul dataset il t-test classico (prima riga). Il t-test rifiuta l'ipotesi nulla di medie uguali (p<0,001); pertanto, si può affermare che la media della variabile SDI è significativamente diversa nei due gruppi (maschile e femminile del dataset 1). In particolare, la media del sottogruppo Femmine è significativamente più alta di circa 1,50 rispetto alla media del sottogruppo Maschi, come mostrato nella prima riga della Tabella 12. Dalle statistiche descrittive mostrate in Tabella 11, si ricava inoltre il seguente grafico a barre (Figura 13). Esso riporta il valore medio dell'indice SDI nei maschi e nelle femmine appartenenti al dataset 1: le barre degli errori indicano, per ciascun gruppo, l'intervallo di confidenza in cui al 95% è compreso il vero valore medio dell'indice SDI, considerando il valore soglia scelto $\alpha = 0{,}05$. Si nota che gli intervalli dei due gruppi non si sovrappongono, cioè non hanno valori in comune. L'estremo inferiore dell'intervallo è calcolato mediante la formula $\bar{x} - t_{\alpha,N-1} \cdot s_{\bar{x}}$, dove $\bar{x}$ è la stima della media (Tabella 11), $s_{\bar{x}}$ è la stima della deviazione standard dalla media (Tabella 11) e $t_{\alpha,N-1}$ è uguale a 1,96 in questo caso[115]. L'estremo superiore è dato da $\bar{x} + t_{\alpha,N-1} \cdot s_{\bar{x}}$. Sulla base delle formule indicate sopra, l'intervallo di confidenza per il genere femminile risulta [1,95; 2,92]; per il genere maschile, l'intervallo di confidenza è invece [0,57; 1,31].

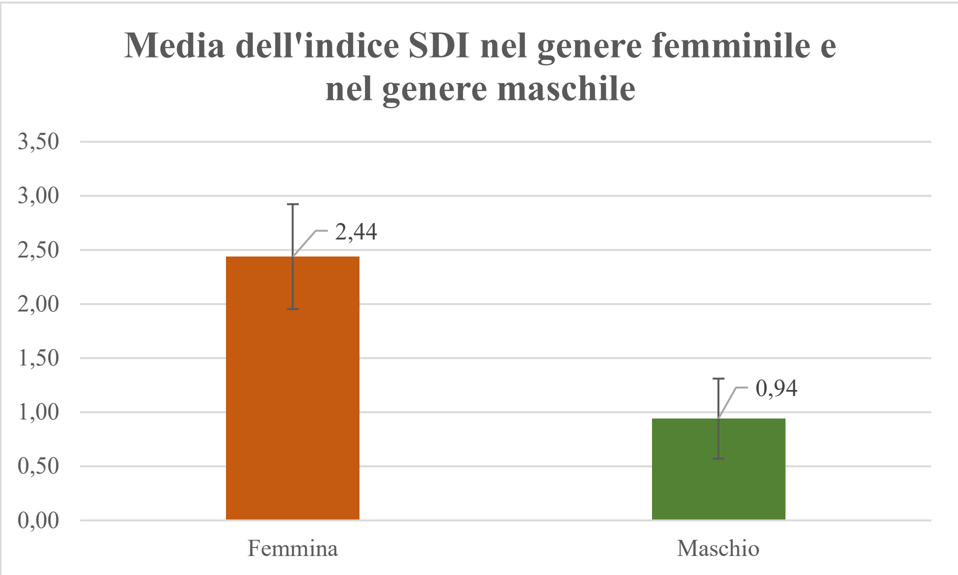

Figura 13 Grafico a barre che indica il valore medio dell'indice SDI nel dataset 1, distinguendo i valori per genere (Maschio e Femmina), come specificato nella leggenda. Le barre degli errori sono determinate sulla base dei valori presenti in Tabella 11 approssimati alla seconda cifra decimale.

6.5 *Fa se 2: esiti*

Tra l'ultima settimana di maggio 2018 e la prima settimana di giugno 2018 il questionario sulla motivazione (Appendice A) è stato riproposto agli istituti destinatari della ricerca. Le risposte sono pervenute da un istituto della provincia di Catania, dall'unico istituto in provincia di Firenze, dai due istituti della provincia di Palermo e da

[115] Il valore è desumibile dalla tavola dei valori critici di t considerando una probabilità $\alpha = 0{,}05$ e $N =$ numerosità del campione di riferimento.

cinque istituti nella provincia di Roma. Le risposte pervenute sono in numero 581. Si è scelto di escludere da esse le tre risposte nelle quali gli item di risposta erano stati indicati tutti con uno stesso numero (ad esempio, “3” per tutti gli item) in quanto ritenute non attendibili. Il campione residuo risulta così formato da n.578 studenti, di cui n.95 frequentanti il Liceo Matematico e n.483 no. Il primo sottocampione (indicato come ‘sottocampione 1’) si compone di n.52 maschi e n.43 femmine, provenienti dall’IIS Via delle Scienze e dal Liceo Scientifico G. Marconi di Colleferro (in provincia di Roma), dal Liceo Classico Vittorio Emanuele II e dal Liceo Scientifico Benedetto Croce di Palermo, dall’IIS E. Majorana di Piazza Armerina (in provincia di Catania), dai Licei Classico/Linguistico Tito Lucrezio Caro e Torquato Tasso e dall’IIS Federico Caffè a Roma, dal Liceo A.M. Enriques Agnoletti di Sesto Fiorentino (in provincia di Firenze). Il secondo sottocampione (indicato come ‘sottocampione 2’) si compone di n.244 maschi, n.238 femmine; un solo studente non dichiara il sesso. Gli studenti provengono dal Liceo Classico Vittorio Emanuele II e dal Liceo Scientifico Benedetto Croce di Palermo, dai Licei Classico/Linguistico Tito Lucrezio Caro e Torquato Tasso di Roma e dal Liceo Scientifico G. Marconi di Colleferro (in provincia di Roma). L’età dichiarata dalla maggioranza del campione è di 14 anni: essa costituisce il 67% circa nel sottocampione 1 (Figura 14), il 72% circa nel sottocampione 2 (Figura 15); a seguire, il 32% circa del sottocampione 1 (Figura 14) ed il 23% circa del sottocampione 2 (Figura 15) dichiarano di avere compiuto 15 anni. Ridotte percentuali di ogni sottocampione dichiarano di avere una differente età. Nove studenti del sottocampione 2 non dichiarano l’età. La distribuzione del campione per fasce d’età in ogni sottocampione è indicata nelle due figure seguenti; le percentuali sono arrotondate all’ultima cifra intera.

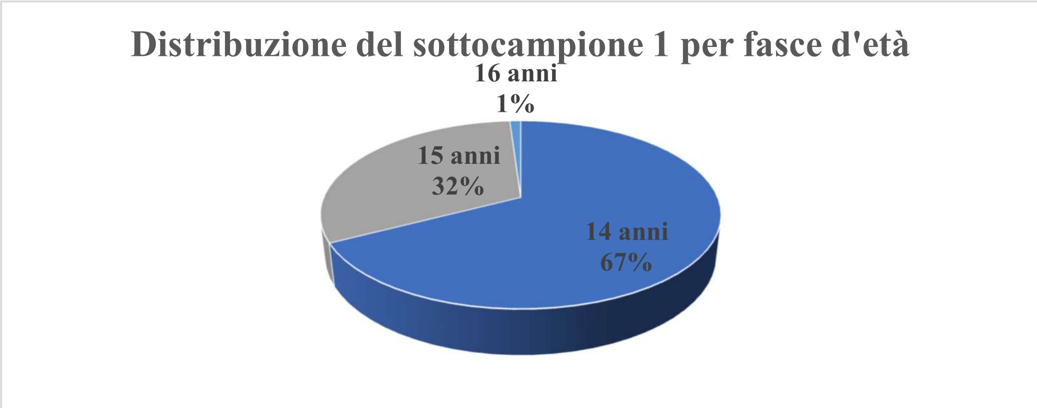

Figura 15 Suddivisione degli studenti del sottocampione 1 coinvolto nella Fase 2 in fasce d'età; la distribuzione è indicata in termini percentuali, arrotondate all'ultima cifra intera.

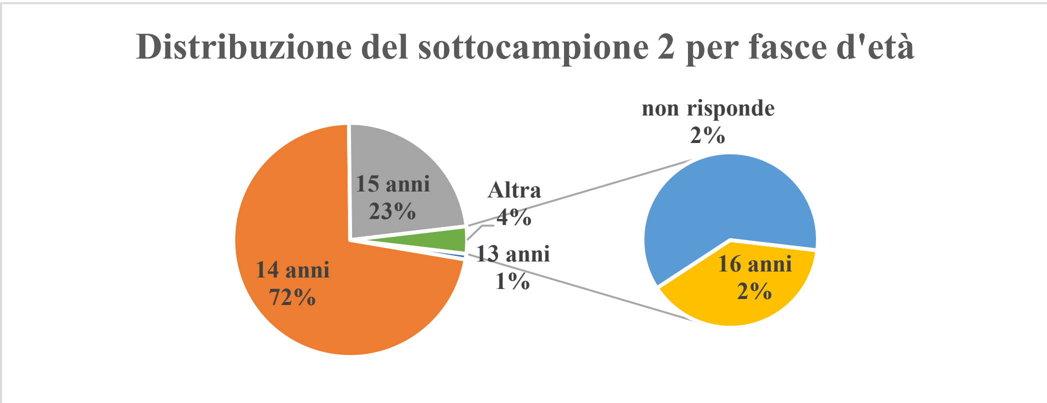

Figura 14 Suddivisione degli studenti del sottocampione 2 coinvolto nella Fase 2 in fasce d'età; la distribuzione è indicata in termini percentuali, arrotondate all'ultima cifra intera.

Le risposte raccolte nella Fase 2 sono state analizzate per mezzo del software Microsoft Office Excel e, in parte, tramite il software SPSS. Per l'analisi quantitativa dei dati, si è scelto di analizzare la distribuzione dell'indice SDI e la distribuzione delle risposte per genere, esattamente come per la *Fase 1*. I valori ricavati sono stati approssimati alla seconda cifra decimale. Per distinguere gli esiti della Fase 2, i grafici contengono la dicitura "post-test" ad indicare che si riferiscono alla seconda somministrazione del questionario in Allegato 1. Nella figura seguente è riportata la distribuzione dell'indice SDI nella Fase 2 nel sottocampione 1 mediante diagramma con scatola e baffi (Figura 16).

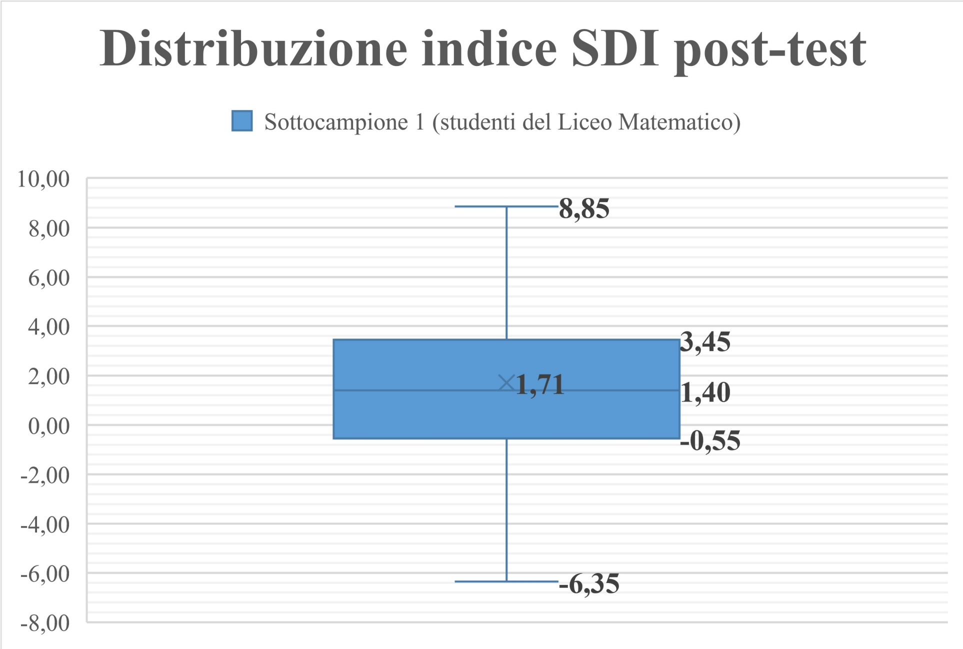

Figura 16 Diagramma a scatola e baffi per indice SDI nel sottocampione 1. Sull'asse verticale è indicato il punteggio SDI.

Il primo quartile è Q_1 = -0,55, il terzo quartile è Q_3 = 3,45. Almeno il 50% delle risposte rilevate si trova nell'intervallo tra il primo ed il terzo quartile la cui ampiezza (o distanza interquartile) è Q_3 -Q_1 =4. La linea orizzontale al centro dell'intervallo indica il valore centrale della distribuzione dei dati, ossia il secondo quartile (o mediana) il cui valore è Q_2 = 1,40. Gli estremi, rispettivamente, inferiore e superiore si possono osservare alle estremità dei baffi del diagramma: Q_0 = -6,35 è il valore minimo, prossimo al punto inferiore -6,55 ottenuto come Q_1 - 1,5*(Q_3 – Q_1) = -0,55–1,5*(4) e arrotondato alla seconda cifra decimale; Q_4 = 8,85 è il valore massimo, minore del punto superiore 9,45 ottenuto come 3,45+1,5*(4). Si osserva quindi una asimmetria nei baffi: in particolare, il baffo inferiore ha lunghezza $|Q_1 – Q_0|$ = 5,80, il baffo superiore ha lunghezza $|Q_4 – Q_3|$ = 5,40. Il campo di variazione R (o Range) ha ampiezza 15,20, ottenuto come modulo della differenza tra il valore massimo 8,85 ed il valore minimo -6,35. Si ha quindi una elevata variabilità dei dati, con una media aritmetica che si attesta su 1,71 punti. Non sono presenti valori anomali. Il box-plot è caratterizzato da una asimmetria positiva, dal momento che la media supera la mediana di una unità; in altre parole, sono più diffusi, ovvero più distanziati, i valori al di sopra della mediana rispetto a tutti gli altri. In particolare, essendovi una asimmetria nei baffi, vi è una maggiore diffusione delle modalità tra i valori più elevati (che rientrano nel 25% dei dati superiori al terzo quartile) rappresentati dai punti del baffo superiore. La distribuzione presenta una coda di valori verso destra (superiori alla mediana) come conferma il calcolo dell'indice di asimmetria di Fischer (0,2460). Tali considerazioni portano ad affermare che in molti aspetti il grafico ottenuto (Figura 16) riporta caratteristiche simili al corrispondente in Fase 1 (Figura 11) ma con valori dei quartili inferiori nella Fase 2. Non è possibile, tuttavia, affermare che la motivazione del gruppo sperimentale sia "diminuita", in quanto le risposte analizzate non provengono dagli stessi studenti. Per capire se, di fatto, i percorsi didattici abbiano influenzato la regolazione del comportamento negli studenti intervistati intervenendo in modo positivo a sostegno di un comportamento autoregolato ed autonomo nel gruppo sperimentale si confrontano i risultati ottenuti in Fase 1 e 2 con quelli ottenuti nelle Fasi 3 e 4. Nella figura seguente è riportata la distribuzione dell'indice SDI nella Fase 2 nel sottocampione 2 mediante diagramma con scatola e baffi (Figura 17).

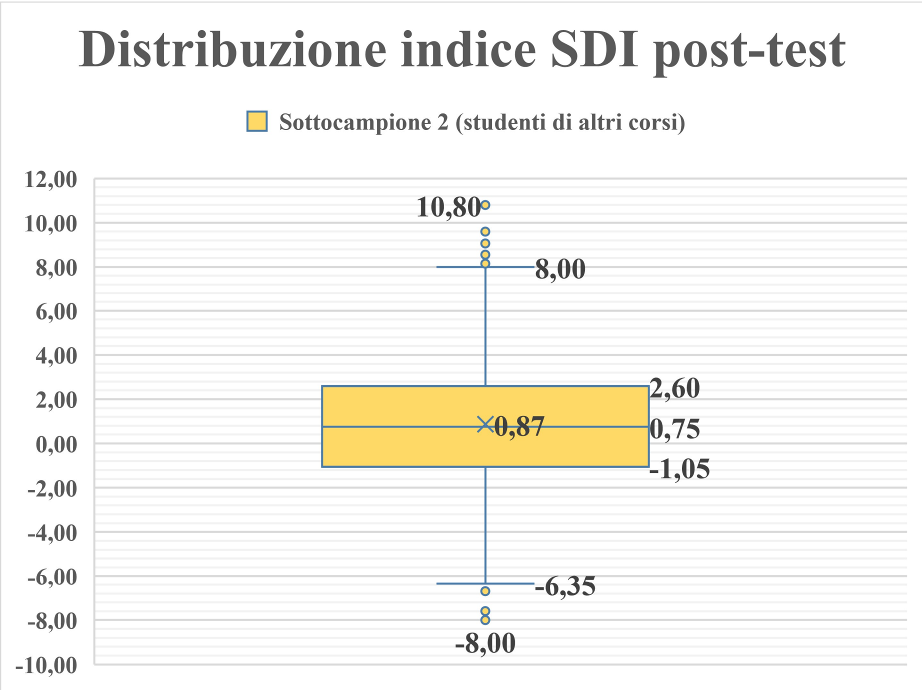

Figura 17 Diagramma a scatola e baffi per indice SDI nel sottocampione 2. Sull'asse verticale è indicato il punteggio SDI.

Il primo quartile è Q_1 =-1,05 ed il terzo quartile è Q_3 = 2,60 (Figura 17). La distanza interquartile (IQR), ottenuta come differenza tra i valori del terzo e del primo quartile, è 3,65. La linea orizzontale al centro dell'intervallo indica il valore centrale della distribuzione dei dati, ossia il secondo quartile, il cui valore è Q_2 = 0,75; la media aritmetica della distribuzione supera lievemente la mediana. I baffi hanno approssimativamente la stessa lunghezza (Figura 17). L'estremo inferiore e, rispettivamente, superiore si possono osservare alle estremità dei baffi del diagramma: -6,35 è il valore minimo Q_0, 8,00 è il valore massimo Q_4 (Figura 17). Il punto inferiore -6,53, ottenuto come differenza tra Q_1 = -1,05 e 1,5*3,65, è lievemente inferiore al valore minimo Q_0 = -6,35. Il punto superiore è pari a 8,08, ottenuto come somma tra Q_3 = 2,60 e 1,5*3,65; esso è quasi coincidente con il valore massimo Q_4. Il campo di variazione R (o Range) è 14,35, ottenuto come modulo della differenza tra il valore massimo 8,00 ed il valore minimo -6,35. Si evidenzia la presenza di un numero rilevante di valori anomali, sia al di sotto del valore minimo, sia al di sopra del valore massimo. Sono presenti esattamente otto valori anomali, rappresentati dai punti isolati al di sotto e al di sopra dei baffi; dal più basso al più elevato essi sono: -8,00; -7,60; -6,70; 8,15; 8,55; 9,06; 9,60; 10,80 (Figura 17). Il primo e l'ultimo valore sono gli unici indicati in figura; gli altri punti isolati non sono indicati per garantire un'ottimale leggibilità del grafico. Essendo, inoltre, media>mediana, si evince che la distribuzione presenta una asimmetria positiva e, dunque, una maggiore diffusione delle modalità superiori a 0,75. L'asimmetria positiva è confermata dall'indice di asimmetria di Fischer che in questo caso vale 0,2267; l'asimmetria è dunque leggermente meno marcata che nel sottocampione 1 in Fase 2 (il cui indice di asimmetria di Fischer vale 0,2460).

Dal confronto tra la distribuzione dell'indice SDI nel sottocampione 1 (Figura 16) e la distribuzione dello stesso indice nel sottocampione 2 (Figura 17) emerge una analoga asimmetria positiva nei diagrammi, pertanto le modalità dell'indice SDI sono più distanziate tra loro nel 50% dei valori che si collocano al di sopra della mediana in ciascun box-plot. Notevoli sono le differenze emerse dall'analisi della forma dei due diagrammi. Il diagramma riferito al sottocampione 2 (Figura 17) si differenzia dal precedente (Figura 16) in quanto mostra anzitutto una variabilità dei dati leggermente minore dovuta ad un Range meno ampio del precedente (R=14,35 nel sottocampione 2 in Figura 17, R=15,20 nel sottocampione 1 in Figura 16). Le distribuzioni dell'indice SDI nella Fase 2 assumono nel complesso valori che si collocano su intervalli differenti; in particolare, il 50% dei dati centrali sono compresi tra -0,55 e 3,45 nel sottocampione 1 (Figura 16), tra -1,05 e 2,60 nel sottocampione 2 (Figura 17). Ogni quartile dell'indice SDI nel sottocampione 2 (Figura 17) assume difatti un valore inferiore di almeno 0,50 punti rispetto al corrispondente quartile dell'indice SDI nel sottocampione 1 (Figura 16). Il valore minimo coincide per i due sottocampioni, mentre i valori massimi sono prossimi ma non coincidenti: 8,85 nel sottocampione 1 (Figura 16) e 8,00 nel sottocampione 2 (Figura 17), circa un punto in meno del precedente. La presenza di diversi punti isolati nel sottocampione 2 (a fronte di nessun punto isolato per il sottocampione 1) ha influito senza dubbio sulla media aritmetica [116] e sul valore minimo, determinando una notevole distribuzione di dati corrispondenti a basse modalità dell'indice SDI.

La maggiore dispersione dei dati riferiti al sottocampione 2 ed i valori più elevati dei quartili riferiti al sottocampione 1 si possono spiegare pensando alla notevole differenza nel numero di studenti che compongono i due sottocampioni e pensando che le ragioni che spingono uno studente iscritto al Liceo Matematico a studiare la matematica potrebbero confluire in una motivazione mossa più da cause interne che da cause esterne alla persona. Le sottoscale della motivazione intrinseca (che situa il suo luogo di causalità[117] all'interno dell'individuo, secondo la SDT) e della motivazione identificata (che presenta "qualcosa di interno" all'individuo, secondo la SDT), difatti, contribuiscono alla determinazione dell'indice SDI considerato rispettivamente con un peso +2 e +1 rispettivamente.

Rispetto a quanto rilevato nella Fase 1 degli esiti, la distanza interquartile è variata di poco nei singoli sottocampioni; tra il sottocampione 1 ed il sottocampione 2, emerge una differenza di 0,6 punti nella Fase 1, di 0,35 punti nella Fase 2. Meno lieve è la variazione della differenza tra le ampiezze del Range del sottocampione 2 e del sottocampione 1: 0,85 punti nella Fase 1; 2,55 punti nella Fase 2. Ciò mostra una maggiore variabilità dei dati nel sottocampione 2 in entrambi i momenti. Se i valori minimi sono coincidenti, ciò non accade per i valori massimi (estremità superiori dei baffi), pur se molto prossimi tra loro. Si registra inoltre un certo incremento del numero di punti isolati nel sottocampione 2: un solo punto isolato è presente nella Fase 1 (Figura 12), otto sono presenti nella Fase 2 (Figura 17). La loro presenza determina delle marcate asimmetrie nei box-plot riferiti al sottocampione 2, con conseguente maggiore diffusione tra i valori al di sotto della mediana. Tenendo in considerazione il primo quartile, è importante sottolineare che almeno il 75%

[116] La media aritmetica risulta infatti sensibile ai valori anomali, mentre la mediana è più robusta ai valori anomali.

[117] Si intende qui riferirsi al concetto di *perceived locus of causality* (PLOC) specificato nel capitolo 1 e per il quale si rimanda ad altri testi per eventuali approfondimenti: Ryan & Connell, 1989; Heider, 1958.

degli studenti del Liceo Matematico ha un indice SDI uguale o superiore a 0,05 nella Fase 1 (Figura 11) e a -0,55 nella Fase 2 (Figura 16); almeno il 75% degli studenti non frequentanti il Liceo Matematico ha un indice SDI uguale o superiore a -0,77 nella Fase 1 (Figura 12) e a -1,05 nella Fase 2 (Figura 17). Si sottolinea comunque che i quartili riferiti al sottocampione 1 assumono tanto in Fase 1 quanto in Fase 2 valori perlopiù superiori rispetto ai valori assunti dai corrispondenti quartili nel sottocampione 2. Ciò si traduce in una maggiore consistenza nel 50% di dati centrali della distribuzione riferita al sottocampione 1.

Sulla base della distinzione tra regolazione autonoma (individuata da un indice SDI positivo) e regolazione controllata (individuata da un indice SDI negativo o nullo) è stata elaborata la seguente tabella a doppia entrata (Tabella 13). Nella colonna centrale è indicato in termini percentuali quanti studenti presentano una regolazione autonoma del comportamento (individuata da un indice SDI positivo); nella terza colonna, quanti invece presentano una regolazione controllata (individuata da un indice SDI negativo o nullo). Le percentuali, approssimate all'ultima cifra intera, sono riferite ad ogni singolo sottocampione e all'intero campione coinvolto nella ricerca, come specificato nella prima colonna.

Tabella 13 Per ciascun campione considerato (colonna sinistra), si indicano le percentuali di studenti con regolazione autonoma (colonna centrale) e con regolazione controllata (colonna destra).

	% studenti con regolazione autonoma (SDI > 0)	% studenti con regolazione controllata (SDI ≤ 0)
Regolazione studenti sottocampione 1	71%	29%
Regolazione studenti sottocampione 2	61%	39%
Regolazione studenti del campione	63%	37%

In ciascuno dei due sottocampioni, secondo lo strumento di analisi adottato, è approssimativamente pari a un terzo la frazione di studenti con una regolazione controllata, ovvero mossa perlopiù da cause esterne all'individuo. Tale percentuale è maggiormente ridotta nel sottocampione 1. Si nota che il divario in termini percentuali tra gli studenti con SDI positivo e, rispettivamente, con SDI negativo nei due sottocampioni è rimasto invariato. Tali differenze percentuali sono imputabili alla numerosità dei singoli campioni che è notevolmente variata dalla Fase 1 alla Fase 2 (gli studenti del Liceo Matematico costituiscono circa il 25% degli studenti coinvolti in Fase 1 ed il 16% degli studenti coinvolti in Fase 2), e vanno lette alla luce degli esiti della Fase 3.

Anche in questo caso, per rilevare eventuali differenze in media nella distribuzione dell'indice SDI nei due sottocampioni, si è scelto di procedere inizialmente secondo statistiche descrittive e di effettuare in un secondo momento il t-test a campioni indipendenti.

Tabella 14 Statistiche descrittive relative alla variabile SDI per il dataset 2. I valori sono stati calcolati dal software SPSS.

Statistiche gruppo

	Studente_recode	N	Media	Deviazione std.	Media errore standard
SDI	Sottocampione 1-post test	95	1,7127	2,96129	,30382
	Sottocampione 2-post test	483	,8698	2,91574	,13267

Come accaduto nel dataset 1, dalla lettura della Tabella 14 si nota come la media della variabile SDI sembri essere ancora maggiore nel gruppo sperimentale (sottocampione 1) rispetto al gruppo di controllo (sottocampione 2) del dataset 2. Nello specifico, la differenza tra le due medie è 0,8429 (Tabella 15). Come per il dataset 1, al fine di determinare se tale differenza sia o meno statisticamente significativa, si è reso necessario effettuare un t-test a campioni indipendenti. L'ipotesi nulla H_0 del t-test a campioni indipendenti è che le medie siano uguali nei due sottocampioni; l'ipotesi alternativa H_1 è che le medie differiscano significativamente. Si precisa che è stato possibile effettuare il test t di Student in quanto il test di Levene ha accettato l'ipotesi nulla di varianze uguali ($p=0,738$), come si può osservare in Tabella 15. Il t-test classico (i cui risultati sono nella prima riga della Tabella 15) rifiuta l'ipotesi nulla di medie uguali, dal momento che p=0,010.

Tabella 15 T-test a campioni indipendenti calcolato in riferimento al dataset 2. I valori sono stati calcolati dal software SPSS.

Test campioni indipendenti

		Test di Levene per l'eguaglianza delle varianze		Test t per l'eguaglianza delle medie						
									Intervallo di confidenza della differenza di 95%	
		F	Sign.	t	gl	Sign. (a due code)	Differenza della media	Differenza errore standard	Inferiore	Superiore
SDI	Varianze uguali presunte	,112	**,738**	2,569	576	**,010**	,84290	,32809	,19851	1,48730
	Varianze uguali non presunte			2,542	132,328	,012	,84290	,33153	,18713	1,49868

Si può dunque affermare che la media della variabile SDI è significativamente diversa nei due sottocampioni anche nel dataset 2; in particolare, la media del sottocampione 1 è significativamente più alta di 0,8429 punti rispetto alla media del sottocampione 2. La probabilità di ottenere i medesimi valori quando invece l'ipotesi nulla sia vera, è pari circa all'1% (essendo $p - value = 0{,}010$); quindi, il risultato ottenuto è significativo.

Anche nell'analizzare gli esiti della Fase 2 del lavoro, si è scelto di effettuare un t-test a campioni indipendenti per verificare se vi sia una differenza statisticamente significativa nella media della variabile SDI tra le due modalità della variabile Genere, cioè tra il gruppo dei Maschi e quello delle Femmine. Anche in questo caso, l'ipotesi nulla del t-test a campioni indipendenti è che le medie siano uguali nei due gruppi (Maschi e Femmine, rispettivamente); l'ipotesi alternativa è che le medie differiscano significativamente. Si rigetta l'ipotesi nulla qualora il *p-value* risulti inferiore alla soglia fissata di 0,05. Se ciò accadesse, sarebbe possibile concludere che la media dell'indice SDI nei due gruppi considerati assume valori significativamente diversi. Prima del t-test viene effettuato il test di Levene per verificare l'ipotesi nulla di varianze uguali nei due sottogruppi. Qualora questa assunzione venga violata (p<0,05), va effettuato il t-test robusto, ovvero si dovranno commentare i risultati nella seconda riga dell'output.

Tabella 16 Statistiche di gruppo per la variabile SDI nelle due modalità della variabile Genere per il dataset 2. I valori sono stati calcolati dal software SPSS.

Statistiche gruppo

	Genere	N	Media	Deviazione std.	Media errore standard
SDI	Femmina	281	1,3013	3,01933	,18012
	Maschio	296	,7401	2,83561	,16482

Dalla Tabella 16 si nota facilmente che anche in questo caso la media della variabile SDI sembri essere maggiore nel gruppo delle Femmine rispetto al gruppo dei Maschi. Tramite il t-test è possibile determinare se la differenza riscontrata sia o meno statisticamente significativa. L'output del test è riportato di seguito (Tabella 17):

Tabella 17 T.test a campioni indipendenti in riferimento alle modalità della variabile Genere nel dataset 2. I valori sono stati calcolati dal software SPSS.

Test campioni indipendenti

		Test di Levene per l'eguaglianza delle varianze		Test t per l'eguaglianza delle medie						
									Intervallo di confidenza della differenza di 95%	
		F	Sign.	t	gl	Sign. (a due code)	Differenza della media	Differenza errore standard	Inferiore	Superiore
SDI	Varianze uguali presunte	2,545	**,111**	2,302	575	**,022**	**,56115**	,24375	,08240	1,03989
	Varianze uguali non presunte			2,298	567,537	,022	,56115	,24415	,08161	1,04069

Il test di Levene accetta l'ipotesi nulla di varianze uguali, essendo p=0,111; vengono dunque commentati i valori nella prima riga della tabella (Tabella 17), ossia viene effettuato il t-test classico. Il p-value è in questo caso 0,022; di conseguenza, viene rigettata l'ipotesi nulla delle medie uguali in favore dell'ipotesi alternativa. Si conclude che la media della variabile SDI è significativamente diversa nei due gruppi; la media del gruppo Femmine è significativamente più alta di circa 0,56 rispetto alla media del gruppo Maschi. Anche in questo caso si riportano i grafici a barre relativi alla media dell'indice SDI nei due gruppi e le relative barre degli errori al 95% (Figura 13). A differenza di quanto discusso per il dataset 1 (Figura 8), in questo caso gli intervalli tendono a sovrapporsi per alcuni valori. Tuttavia, la differenza tra i due gruppi in SDI rimane statisticamente significativa, come sottolineato dal t-test. Si ricorda che le barre di errore individuano un intervallo di confidenza in cui è compreso, entro una probabilità del 95%, il vero valore dell'indice SDI medio dei due gruppi considerati. L'estremo inferiore di ciascun intervallo è calcolato mediante la formula $\bar{x} - t_{\alpha,N-1} \cdot s_{\bar{x}}$, dove $\bar{x}$ è la stima della media del genere (Tabella 16), $s_{\bar{x}}$ è la stima della deviazione standard dalla suddetta media (Tabella 16) e $t_{\alpha,N-1}$ è uguale a 1,96 in questo caso[118]. L'estremo superiore è dato da $\bar{x} + t_{\alpha,N-1} \cdot s_{\bar{x}}$. Nello specifico, per il genere femminile l'intervallo di confidenza [0,95; 1,65]; per il genere maschile, l'intervallo di confidenza è invece [0,42; 1,06].

[118] Il valore è desumibile dalla tavola dei valori critici di t considerando una probabilità $\alpha = 0{,}05$ e $N =$ numerosità del campione di riferimento.

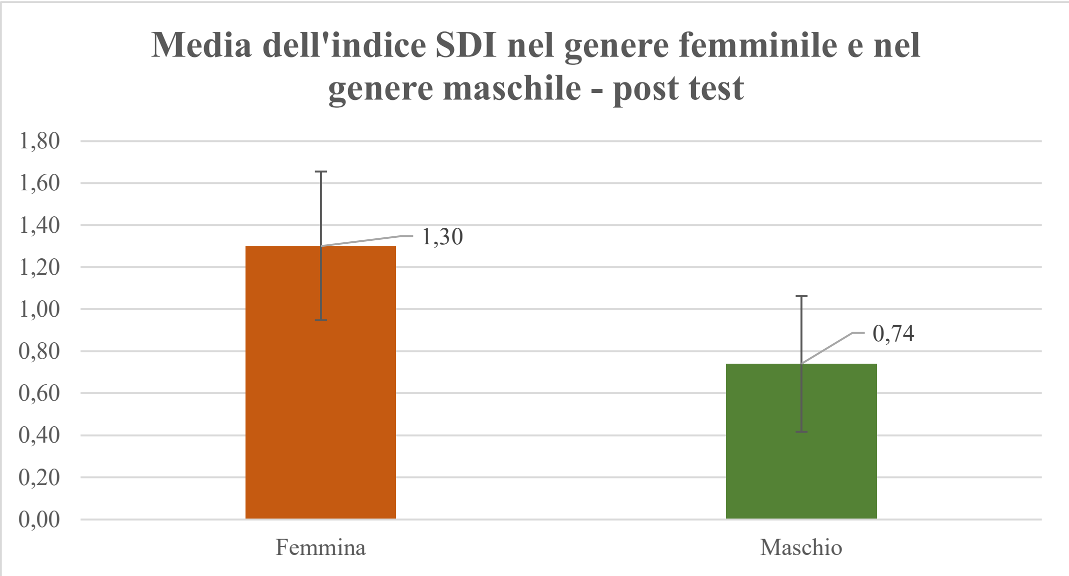

Figura 18 Grafico a barre che indica il valore medio dell'indice SDI nel dataset 2, distinguendo i valori per genere (Maschio e Femmina), come specificato nella leggenda. Le barre degli errori sono determinate sulla base dei valori presenti in Tabella 16.

Concludendo, dall'analisi degli esiti in queste prime due Fasi della ricerca, è emerso come la differenza tra i valori medi dell'indice SDI (la migliore stima dell'indice SDI nelle popolazioni da cui sono stati estratti rispettivamente i due sottocampioni) nei due sottocampioni considerati sia risultata statisticamente significativa, tanto nella Fase 1 quanto nella Fase 2. In particolar modo, la media del sottocampione 1 (gruppo sperimentale) è risultata significativamente più alta di 0,912 rispetto alla media del sottocampione 2 (gruppo di controllo) in Fase 1; significativamente più elevata di 0,843 in Fase 2.

Tali differenze si potrebbero spiegare pensando che le ragioni che spingono uno studente iscritto in un Liceo Matematico a studiare la matematica possono influire in modo decisivo sulla regolazione del suo comportamento: i percorsi didattici messi in atto potrebbero aver indotto in lui/lei una riflessione più profonda sul legame con altre discipline e, dunque, sull'importanza di apprendere la matematica in quanto necessaria per il futuro che vorrà costruire, o per il gusto di sapere della matematica che qualcosa in più che non fa parte del naturale curricolo di studi, oppure ancora perché si possono ottenere dei “riconoscimenti”, dei “premi” derivanti, ad esempio, dalle maggiori competenze acquisite e messe in campo durante prove e competizioni di vario genere. Una nota va aggiunta riguardo alla variabile Genere, che è stata esaminata in relazione alla variabile quantitativa dell’indice SDI per la parte femminile e maschile, rispettivamente, coinvolta nella Fase 1 e nella Fase 2. Dai dati commentati e dai grafici a barre risulta evidente come il genere femminile abbia evidenziato un maggiore indice SDI rispetto al genere maschile. In particolare, l’indice SDI medio del genere femminile è compreso al 95% nell’intervallo di confidenza [1,95; 2,92] in Fase 1, nell’intervallo [0,95; 1,65] in Fase 2. L’indice SDI medio del genere maschile è invece compreso al 95% nell’intervallo di confidenza [0,57; 1,31] in Fase 1, nell’intervallo [0,42; 1,06] in Fase 2.

6.6 *Fase 3: esiti*

Gli esiti delle prime fasi della ricerca, nelle quali si è voluto cercare una “misura” della motivazione verso l’apprendimento della matematica, mostrano una certa pendenza dell’ago della bilancia in favore degli studenti frequentanti un Liceo Matematico. Le lezioni interdiscipinari condotte nelle classi di Liceo Matematico coinvolte nella ricerca hanno presumibilmente indotto un cambiamento di prospettiva negli allievi, nel senso che hanno probabilmente contribuito a “vedere” la matematica con occhi nuovi, a “sentire” raccontata una matematica diversa dal solito, a “toccare” con mano quelle competenze che solo un percorso interdisciplinare può permettere di sviluppare. Con questa breve premessa, si vuole inquadrare l’esperienza del Liceo Matematico per studenti di grado 9 nella cornice dell’interdisciplinarità che ha contraddistinto le lezioni condotte in co-docenza. Va precisato che, sulla base di quanto discusso nel Capitolo II, l’interdisciplinariàà viene qui pensata come un continuum di relazioni tra la matematica ed altre discipline, in cui si passa attraverso livelli crescenti di complessità dalla monodisciplinarità alla transdisciplinarità e metadisciplinarità, passando per la multidisciplinarità e la pluridisciplinarità (Williams et al., 2016). Fa da sfondo la Storia della Matematica, la tela in cui sono intrecciate le trame dei vari percorsi interdisciplinari (nel senso ricordato sopra) seguiti dagli allievi. È possibile che in questa cornice e su questa tela gli studenti del campione scelto abbiano visto come la matematica sia collegata ad altre aree del sapere e ad esperienze concrete di vita quotidiana? È possibile che abbiano sentito una sensazione di piacere dovuta allo scoprire ciò che i grandi matematici hanno scoperto in tempi addietro oppure ancora che si siano divertiti a scoprire loro stessi qualcosa di nuovo in matematica, qualcosa che non avevano mai imparato prima? E come può tutto ciò aver influenzato la loro motivazione verso l'apprendimento della matematica? A queste domande si è cercato di dare un riscontro, dando voce proprio agli allievi. Più specificamente, il riferimento è qui rivolto alla seconda e alla terza domanda di ricerca:

Q_2: In che modo i percorsi interdisciplinari centrati sulla Storia della Matematica possono influenzare la motivazione verso la matematica in uno studente di grado 9 del Liceo Matematico?

Q_3: In che termini il collaborative teaching nel contesto del Liceo Matematico può intervenire sulla motivazione verso la matematica negli studenti di grado 9?

Lo strumento di indagine utilizzato è un questionario con domande aperte e chiuse (Appendice B), somministrato agli studenti degli Istituti coinvolti nella ricerca a chiusura del primo anno di Liceo Matematico. Nella Fase 3 sono stati analizzati qualitativamente gli esiti del questionario. Si precisa che nella prima metà di maggio il questionario elaborato inizialmente è stato validato per mezzo di un'analisi pilota alla quale hanno aderito n.62 studenti di secondo anno della provincia di Catania. Il campione scelto per testare il questionario ha aderito volontariamente su suggerimento dei docenti che in quel periodo si stavano formando per il successivo anno scolastico. È STATO chiesto loro in una domanda a risposta aperta se le istruzioni per la compilazione del questionario e la formulazione dei quesiti fossero chiare, e come avrebbero migliorato il questionario stesso. Le risposte fornite sono state tutte pertinenti e ben argomentate; i suggerimenti pervenuti su aspetti non esaminati nel questionario eventuali domande mal poste hanno messo in luce la mancanza di domande inerenti alle singole lezioni, la chiarezza espositiva degli insegnanti, i dispositivi e le strutture messe a disposizione dalla scuola e la preferenza per le domande chiuse e brevi. Sulla base dei suggerimenti, è stato possibile intervenire solamente sulla forma del questionario per snellire eventuali domande "lunghe" e trasformare qualche domanda da aperta a chiusa, rendendole così facendo più chiare e più appropriate. Per gli scopi perseguiti, non era preferibile trasformare tutte le domande in domande chiuse, proprio per permettere agli studenti di esprimere liberamente tutto ciò che poteva afferire alla sfera sociale e motivazionale. Gli aspetti inerenti alla struttura didattica di appartenenza non sono stati indagati poiché non riguardavano le domande di ricerca; l'impostazione del progetto nelle singole scuole non è stata indagata in quanto le caratteristiche organizzative erano già note dal questionario rivolto ai singoli referenti universitari. Il questionario così perfezionato è stato somministrato tra l'ultima settimana di maggio e la prima settimana di giugno dell'anno 2019. Le risposte pervenute oltre tale termine (finanche i primi di luglio 2019) sono state ritenute comunque valide ed analizzate insieme alle altre.

La premessa al questionario è la medesima per il questionario sulla motivazione; in essa si precisa lo scopo della ricerca, l'argomento (in termini di atteggiamento verso la matematica prima e dopo l'esperienza del Liceo Matematico), il fatto che il questionario è del tutto anonimo e non ha alcuna influenza sul rendimento scolastico. Il questionario risulta composto da n.14 domande di cui n.10 a risposta aperta, n.4 a risposta chiusa e n.1 a risposta multipla. Nel computo non si tiene conto delle due domande sul genere e sull'età degli intervistati, utili ai fini di una prima categorizzazione del campione e della rilevazione di eventuali differenze di genere. Il questionario ripercorre le tappe dell'anno scolastico appena concluso: nella prima parte si focalizza sulla scelta del Liceo Matematico; nella seconda sul rapporto dello studente con la matematica e su come le attività svolte e gli spunti forniti in aula abbiano influenzato tale rapporto e la motivazione personale all'apprendimento della matematica; nella terza si ipotizza l'opportunità di rifare la scelta del Liceo Matematico (per ragioni possibilmente differenti da quelle per cui si è di fatto iscritto al primo anno) e l'opportunità di modificare la programmazione in relazione alle attività alle quali ha partecipato. Alcune domande sono dirette, altre sono formulate in forma indiretta per suscitare una maggiore riflessione negli studenti posti in situazione di consigliare il percorso del Liceo Matematico ad un amico o un'amica. Le domande del questionario sono riportate di seguito, numerato da 1 a 15. In stampatello maiuscolo sono specificati i titoli di ciascuna sezione.

LA SCELTA DEL LICEO MATEMATICO

1) Ho scelto di iscrivermi al Liceo Matematico perché …………

2) Se dovessi descrivere le ore di Liceo Matematico a un/a amico/a di un'altra scuola, cosa gli/le diresti?

LA TUA ESPERIENZA DEL LICEO MATEMATICO

3) Qual era il tuo rapporto con la matematica prima di iniziare il Liceo Matematico?

4) Descrivi un'attività del Liceo Matematico che ti ha particolarmente colpito e ciò che hai imparato.

5) Dopo le attività svolte in aula, hai approfondito autonomamente qualche argomento?

6) In una scala da 1 a 5 (dove 1 = "per niente", 5 = "moltissimo"), quanto ritieni che il Liceo Matematico abbia influito positivamente sulla tua motivazione per l'apprendimento della matematica?

□ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5

7) Ritieni che le attività del Liceo Matematico possano aiutare studenti che non hanno un buon "rapporto con la matematica"?

□ SI □ IN PARTE □ NO □ NON SO

8) Secondo te, in che modo il Liceo Matematico potrebbe modificare la "visione" della matematica da parte di uno studente?

9) In una scala da 1 a 5 (dove 1 = "per niente utile", 5 = "moltissimo utile"), quanto ritieni utile per la tua formazione in matematica lo svolgimento delle lezioni del Liceo Matematico?

□ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5

10) Ripensando alle lezioni svolte durante tutto l'anno ritieni che il Liceo Matematico abbia cambiato il tuo "rapporto con la matematica"?

□ SI □ NO

11) Se hai risposto sì alla domanda precedente, in che senso? (interesse, piacere, valore assegnato alla disciplina, emozioni, voglia di apprendere, stimolo della curiosità, …).

12) Com'è cambiata la tua motivazione per lo studio della matematica dopo l'esperienza del Liceo Matematico?

UN "ALTRO" LM

13) Rifaresti la scelta di iscriverti al Liceo Matematico? Se sì, perché?

14) Quali modifiche vorresti apportare alla programmazione del Liceo Matematico per il prossimo anno scolastico? (è possibile segnare più risposte).

□ Numero maggiore di ore

□ Più lavori di gruppo

□ Più escursioni esterne

□ Altro (specificare)

15) Se potessi approfondire degli argomenti di matematica e di qualche altra disciplina che quest'anno non è stata inclusa nelle lezioni interdisciplinari del Liceo Matematico, di quale disciplina si tratterebbe?

Agli studenti di Palermo è stato inoltre possibile chiedere alcuni chiarimenti in merito alle risposte fornite laddove esse sono risultate parziali e poco chiare. Dal momento che la chiusura dell'anno scolastico è un periodo di per sé all'insegna di verifiche finali per gli studenti e di stesura delle relazioni finali di classe per gli insegnanti, il numero atteso di partecipanti era piuttosto basso. Le risposte pervenute sono n.112, di cui 41 alunne e 71 alunni. Gli studenti provengono dal Liceo Scientifico Ignazio Capizzi di Bronte, in provincia di Catania (n.7 risposte), dal Liceo Scientifico Galileo Galilei di Catania (n.37 risposte), dal Liceo Classico Vittorio Emanuele II (n.24 risposte) e dal Liceo Scientifico Benedetto Croce (n.23 risposte) di Palermo, dai Licei Tito Lucrezio Caro (n.4 risposte), Torquato Tasso (n.8 risposte) e Talete (n.9 risposte) di Roma. L'età dei partecipanti è perlopiù compresa tra i 14 ed i 15 anni; il grafico seguente (Figura 15) mostra la distribuzione del campione per età in termini percentuali. Il 56% dichiara di avere compiuto i 14 anni, il 37% dichiara di averne compiuti 15; percentuali minime di studenti dichiarano di avere 13 anni (3%) e 16 anni (4%).

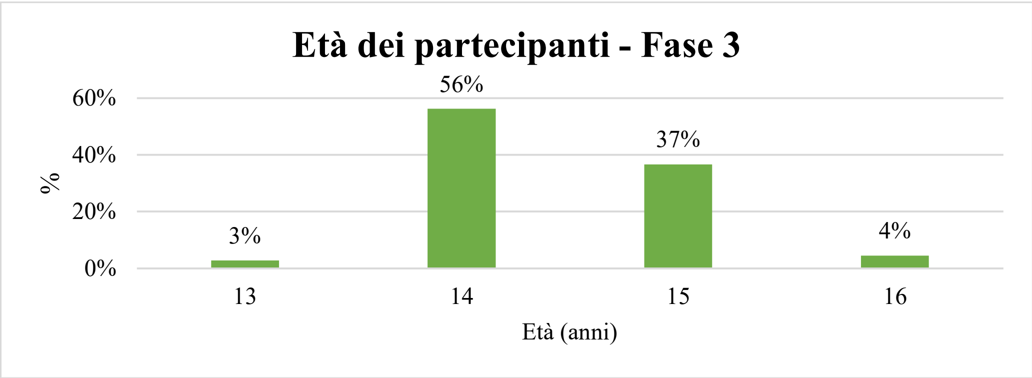

Figura 19 Distribuzione del campione di studenti del Liceo Matematico coinvolto nella Fase 3 per età, in termini percentuali. I valori sono arrotondati all'ultima cifra intera.

L'analisi qualitativa delle risposte fornite per ciascuna parte del questionario si basa sulla categorizzazione delle risposte fornite dal campione. Le categorie usate sono quattro, secondo quanto discusso nel capitolo precedente: regolazione esterna, regolazione introiettata (o introiezione), regolazione identificata (o identificazione), regolazione intrinseca. Il termine *regolazione* è riferito al fatto che lo studente è più o meno motivato a regolare il proprio comportamento sulla base della percezione del luogo di causalità (Ryan & Connell, 1989). Lo studente spinto dalla voglia di compiacere l'insegnante, di fare il proprio dovere o di seguire una regola imposta, percepisce il luogo di causalità del proprio comportamento all'esterno; si parla in questo caso di *regolazione esterna*. Lo studente che vuole dimostrare certe abilità, che vuole sentirsi orgoglioso e cerca l'approvazione degli altri (genitori, compagni, amici) oppure vuole evitare di ricevere disapprovazioni è mosso da «qualcosa di esterno»: si parla in questo caso di *regolazione introiettata*. Lo studente che valuta in modo consapevole un obiettivo da raggiungere e percepisce il raggiungimento di quell'obiettivo come importante a livello personale (ad esempio, ampliare le proprie conoscenze, comprendere meglio un dato argomento o concetto, fare qualcosa perché la ritiene importante) è mosso da un atteggiamento più internalizzato: la categoria di ragioni interiorizzate, che hanno cioè «qualcosa di interno», fa riferimento alla *regolazione identificata*. Lo studente che agisce perseguendo il piacere di scoprire qualcosa di nuovo che non aveva mai imparato prima oppure il piacere di comprendere la realtà, per divertirsi oppure ancora per sentire la soddisfazione personale di aver compreso la matematica, si può affermare che è mosso da un sano e naturale atteggiamento di curiosità e di interesse che si riferisce proprio ad una *regolazione intrinseca* o *motivazione intrinseca* (Ryan & Deci, 2000). Per riassumere, si potrebbe fare riferimento alla seguente distinzione basata sulle ragioni dell'agire e, dunque, sulla regolazione del proprio comportamento (Ryan & Connell, 1989). Le ragioni esterne sono quelle in cui il comportamento è spiegato in riferimento al timore di una punizione, al rispetto delle regole o ad un'autorità esterna (ad esempio, un genitore o un insegnante). Le ragioni introiettate sono state inquadrate in termini di pressioni interne, basate sull'autostima oppure volte a non minare la propria autostima; pertanto, esse si manifestano in chi vuole evitare di sentirsi in colpa, di provare ansia o vergogna oppure ancora di ricevere delle disapprovazioni. Le ragioni identificate implicano l'agire a partire dai propri valori o obiettivi; esse assumono la forma tipica di "voglio" (es. *voglio* ampliare le mie conoscenze). Infine, le ragioni intrinseche di un comportamento risiedono più semplicemente nel piacere provato, nel sentirsi coinvolti e appassionati. Per rendere più schematica la suddetta categorizzazione e rendere più chiara la categorizzazione delle risposte al test, è stata elaborata la seguente tabella (Tabella 18) che integra parzialmente quanto sostenuto in un precedente lavoro (Ryan & Connell, 1989) rivolto ad alunni della scuola primaria.

Tabella 18 La tabella indica alcuni esempi di motivi che definiscono le categorie di regolazione esterna (prima riga), introiettata (seconda riga), identificata (terza riga) e intrinseca (quarta riga). Nella colonna di sinistra sono definite le categorie di regolazione, nella colonna di destra alcuni esempi di risposte afferenti alla categoria espressa nella riga corrispondente.

Esterna (seguire le regole; evitare la punizione)	Perché se non lo faccio finirò nei guai Perché è quello che dovrei fare Perché questa è la regola Perché mi è stato imposto Così gli altri non si arrabbieranno con me
Introiezione (autoapprovazione e altre approvazioni o riconoscimenti; evitare la	Perché voglio che l'insegnante pensi che sono un bravo studente Perché mi sentirei male con me stesso se non lo facessi Perché mi vergognerei di me stesso se non lo facessi

disapprovazione)	Perché voglio che gli altri studenti pensino che sono intelligente Perché voglio piacere alla gente
Identificazione (obiettivo autovalutato; importanza personale)	Perché voglio capire il perché delle cose Perché voglio approfondire le mie conoscenze Perché voglio imparare cose nuove Perché penso che sia importante Per il mio futuro lavorativo
Intrinseca (divertimento; divertimento)	Perché è divertente Perché mi diverto Perché mi piace (es. "mi piace studiare la matematica", "mi piace fare i compiti", "mi piace rispondere a domande difficili in classe)" Perché mi appassiona Perché mi attrae, è interessante

La prima parte del test, "La scelta del Liceo Matematico", si apre con la richiesta di completamento della frase «Ho scelto di iscrivermi al Liceo Matematico perché…». Le ragioni espresse fanno perlopiù riferimento a motivi di natura interna, nello specifico a ragioni interne o identificate o ad entrambe. Le espressioni più comuni delle ragioni interne sono «Perché mi piace la matematica», «Perché amo la matematica». Talvolta sono accompagnate da qualche aggettivo che rinforza l'idea di piacere (es. «Mi piace *molto* la matematica»); in altri casi il piacere per la matematica è affiancato al piacere di studiare e/o applicarsi alle materie scientifiche. Due studenti, in particolare, riferiscono delle ragioni evidentemente legate alla presentazione del progetto, in quanto hanno visto nel Liceo Matematico l'opportunità di imparare la matematica «in un modo nuovo», su un piano interdisciplinare e, dunque, in collegamento con altre aree del sapere (non necessariamente "scientifico"). Il primo si esprime con queste parole: «Perché mi incuriosiva questa interdisciplinarità con la matematica». Il secondo va oltre la richiesta di esprimere le ragioni di una scelta fatta circa nove mesi prima e riporta l'esito di una riflessione più profonda sull'intero percorso seguito e sul fatto che alla fine sia riuscito, oltre le proprie aspettative, a trovare la matematica «interessante e simpatica»:

Penso sia una bella opportunità di imparare la matematica in un modo nuovo. All'inizio pensavo che il Liceo Matematico potesse migliorarmi nella materia, un po' come un corso di recupero; dopo averlo iniziato ho capito che era tutta un'altra cosa, ma ho deciso di restare perché con questo liceo riuscivo a trovare la matematica interessante e simpatica (e io non sono mai stato un amante della matematica.)

Le ragioni più comuni categorizzate come *identificate* fanno riferimento in via prioritaria al fare una nuova esperienza o all'ampliare le proprie conoscenze, spesso in riferimento alla matematica (es. «Volevo sperimentare qualcosa di nuovo», «Volevo approfondire meglio le mie conoscenze», «Voglio scoprire e imparare nuove cose in matematica», «Offre più possibilità di capire la matematica negli altri settori e materie»). Molte risposte fanno riferimento al futuro (in ambito lavorativo, in ambito di studio oppure ancora senza alcuna specificazione):

*Vorrei basare il lavoro **futuro** sulla matematica.*
Credevo che avesse buoni spunti lavorativi.
*Credo che le competenze acquisite possano essere utili per il **futuro**.*
*Ho una marcia in più per il **futuro**.*
*Mi apre molte porte per il **futuro**.*

Alcune risposte combinano le due varianti interne, come ad esempio quella riportata di seguito:

***Amo** la matematica e penso che quella del liceo matematico sia una ottima esperienza che mette le basi a noi alunni per il **futuro**.*

Un numero esiguo di risposte fa riferimento all'utilità del percorso didattico finalizzata al 'prendere buoni voti', accumulare crediti formativi o avere una migliore preparazione in Matematica, partendo dal presupposto che gli studenti in questione si sentano portati per la materia o in passato abbiano riportato 'buoni voti'. Queste risposte fanno presupporre che tali studenti volessero dimostrare di essere "bravi in Matematica" o evitare delle valutazioni al di sotto delle proprie/altrui aspettative; in altre parole, evitare disapprovazioni o fallimenti. Pertanto, le suddette ragioni sono state categorizzate come *introiettate*. Soltanto quattro studenti hanno dichiarato di essersi iscritti perché è stato loro imposto di farlo oppure perché interessati a seguire le lezioni dei docenti incaricati; queste ragioni sono state naturalmente categorizzate come *esterne*.

La seconda domanda posta è «Se dovessi descrivere le ore di Liceo Matematico ad un amico o un'amica di un’altra scuola, cosa gli diresti?». Il quesito, che ha volutamente voluto lasciare la massima libertà di espressione agli studenti (senza fare alcun riferimento alla motivazione, alle attività svolte o alle materie toccate), ha indotto negli intervistati una metariflessione sulle argomentazioni e discussioni matematiche (Bartolini Bussi et al., 1995), condotte durante tutto il percorso. Per entrare nel vivo del testo, è stata costruita una word cloud (escludendo articoli, preposizioni semplici e composte, avverbi) contenente le quaranta parole più frequenti tra tutte le risposte al secondo quesito. Il risultato è presentato nell’immagine seguente (Figura 20).

Figura 20 Word cloud contenente le quaranta parole più frequenti riscontrate in risposta al quesito n.2 del questionario (Se dovessi descrivere le ore di Liceo Matematico ad un amico o un'amica di un’altra scuola, cosa gli diresti?).

La maggioranza del campione descrive l’esperienza del Liceo Matematico come positiva, riferendosi alle ore di Liceo Matematico con termini quali «interessanti», «stimolanti», «piacevoli», «divertenti», «utili», «costruttive», «appassionanti», «istruttive», «coinvolgenti», «belle». Alcuni puntualizzano che non si tratta di semplici «ore di gioco» e che sono anche «impegnative» in quanto richiedono uno sforzo in più, una maggiore partecipazione e applicazione a livello cognitivo per imparare «nuove cose» (es. in algebra, in geometria, in logica, in crittografia, in informatica), «ampliare le proprie conoscenze» oppure per «approfondire meglio alcuni concetti della matematica». Quanti hanno descritto tali ore come divertenti hanno in parte fatto riferimento al fatto che hanno imparato qualcosa di nuovo attraverso i giochi, in un modo del tutto inusuale ma coinvolgente; in parte hanno fatto riferimento ad un «clima di leggerezza» che non ha fatto ombra al rigore matematico o all'importanza degli argomenti affrontati, né si è sostituito all'impegno profuso nello studio personale e in classe. Al contrario, ha contribuito alla creazione di un contesto didattico che supportasse l'autonomia degli studenti e stimolasse il loro naturale atteggiamento di *curiositas* (nell'accezione positiva del termine). Alcuni hanno puntualizzato il fatto che l'esperienza è stata loro utile come un potenziamento, in quanto ha permesso di ampliare le conoscenze e competenze possedute anche in vista degli studi universitari o di un lavoro futuro. Un numero ristretto di studenti ritiene invece di non aver fatto nulla di più di quanto previsto nel curriculum di studi di un indirizzo (scientifico, nei casi presi in considerazione) tradizionale o di avere al più svolto semplicemente un'ora settimanale aggiuntiva di matematica, senza riscontrare nell'esperienza vissuta nulla di particolarmente formativo o «diverso» dalla routine scolastica. Gli aspetti più vicini ai principi del Liceo Matematico sono comunque emersi fortemente e chiaramente. Il primo riguarda l'applicazione della matematica a diversi ambiti e in rapporto ad altre materie, in un'ottica pluridisciplinare (Ignjatovic, 2020) e interdisciplinare (Repko, 2007). In un'ottica pluridisciplinare se si pensa all'esaminare un problema attraverso le lenti offerte dalla matematica; in un'ottica interdisciplinare se si pensa al coniugare la matematica con altre discipline nei metodi, nelle prospettive, in una conoscenza interconnessa che si viene a creare su un terreno comune, per un oggetto/motivo comune. Ciò è anche espresso in termini di uso della prospettiva matematica applicazione della matematica alla vita quotidiana, a problemi reali in contesti mai immaginati prima quali ad esempio i giochi. Tutto ciò ha permesso di imparare una matematica «fuori dagli schemi», con metodi innovativi, in modo «pratico» e inusuale ma non per questo meno piacevole, anzi ha fatto sì che gli studenti scoprissero diverse «sfaccettature della matematica». Risulta particolarmente appropriato inserire qui la riflessione di D'Andrea (2019) sull'importanza di conoscere la matematica, non solo quella che "serve" a scuola, ma anche quella che si usa in contesti di vita quotidiana, quella che aiuta a sviluppare un senso critico.

> *Conoscere la matematica serve non solo a scuola, per rispondere alle domande, alle interrogazioni, per eseguire gli esercizi e risolvere i problemi, ma per vivere con senso critico, per capire quel che ci circonda. L'idea di base è che, tra le attività matematiche da attivare in aula, trovi tempo anche quella di effettuare ricognizioni sull'uso della matematica nella vita quotidiana, per sapere come applicarla, capire di che cosa si sta parlando.*
>
> *(D'Andrea, 2019, p.132)*

A titolo esemplificativo, si riportano di seguito alcune delle risposte inerenti questo primo principio che si potrebbe indicare brevemente con l'espressione *interdisciplinarità*:

> *Sono delle ore in più che uniscono la matematica ad altre materie.*
> *Ore di approfondimento della matematica in rapporto ad altre materie.*
> *Sono delle ore aggiuntive in cui si fa matematica applicata in diversi ambiti.*
> *Nel Liceo Matematico si applica la matematica alle altre materie e ti prepara al meglio per quanto riguarda l'Università.*
> *Direi che sono molto istruttive per conoscere le problematiche del mondo che ci circonda.*
> *Si fanno molte cose interessanti inerenti alla vita quotidiana.*
> *Il liceo Matematico è un'ora in più alla settimana dove facciamo delle attività matematiche interessanti che servono a elasticizzare la mente e nello stesso tempo a divertirsi.*

Quest'ultima risposta, in particolare, contiene un'espressione verbale unica («servono ad elasticizzare la mente») che da sola riassume il senso dei percorsi multi-, pluri-, inter-, trans- e meta-disciplinari dei Licei Matematici: aprire o, per l'appunto, «elasticizzare la mente» non è altro che l'auspicio di tale progetto sperimentale, per superare la concezione comune di un sapere «parcellizzato» nelle varie discipline e preparare i futuri cittadini ad orientarsi nel mondo contemporaneo (Capone et al., 2017). Il secondo aspetto emerso riguarda la dimensione sociale dell'apprendimento e quanto questo possa essere stato favorito dall'interazione con il docente (esperto) e con i compagni di classe (il gruppo dei pari), dal confronto con i coetanei, dai lavori di gruppo, perfino dai giochi di gruppo. In questo laborioso sistema di attività produttiva, assume dunque un ruolo fondamentale la comunità impegnata su uno stesso oggetto che interagisce nell'attività guidata da regole implicite ed esplicite (Zucchermaglio, 1996). Ciò si manifesta anche nell'uso dei verbi in prima persona plurale anziché in prima persona singolare.

> *Ore dove **acquisiamo** delle competenze ma senza la pesantezza della scuola perché è tutto molto più leggero si crea un clima anche piacevole.*
> *Sono istruttive, formative e si allontanano dalle classiche ore di matematica, **si lavora anche introducendo giochi e attività di gruppo che permettono anche la socializzazione e l'integrazione**.*
> *Che in quelle ore non facciamo matematica classica ma **ragioniamo tutti insieme** su diverse attività.*
> *È una attività fantastica, che coinvolge molto gli studenti, **trattiamo la matematica attraverso "giochi"** nella quale ognuno deve pensare al principio e alla soluzione che c'è dietro prima di ricevere la risposta dall'insegnante e questo porta allo studente un grande uso della logica che può sempre essere utile nella vita di tutti i giorni.*
> *Gli direi che grazie a laboratori e giochi di gruppo **abbiamo imparato la matematica sotto un'altra forma**.*
> ***Applichiamo la matematica a vari campi** come per esempio i giochi.*

Quel "noi" mette in evidenza il fatto che la conoscenza è stata costruita «tutti insieme», ragionando, sbagliando anche, ma in un clima sereno, giocoso, divertente, che rende ancor più piacevole l'esperienza di insegnamento/apprendimento. In coerenza con il più ampio quadro dell'*Activity Theory*, il risultato (in termini di apprendimento e acquisizione di competenze) citato da più studenti lo si può vedere come il prodotto dell'interazione tra questi ultimi e gli altri membri della comunità (i compagni ed i docenti) con l'oggetto/motivo dei giochi di gruppo o di altre attività, mediata da strumenti e significati e governata da norme e regolamenti (Williams & Roth, 2019). Questo aspetto conferma, dunque, quanto già emerso in precedenti ricerche (Hannula, 2006) nelle quali l'apprendimento è veicolato dall'ambiente sociale e culturale di riferimento (Vygotskij, 1978) all'interno del quale si integrano valori sociali e responsabilità (Ryan & Deci, 2000), si costruiscono i significati facendo un «lavoro di squadra» (Hannula, 2006, p.167) e consentendo a ciascuno di soddisfare i propri bisogni di autonomia e di interazione sociale (Hannula, 2006). Contesti che supportano il soddisfacimento di tali bisogni "primordiali" dell'uomo favoriscono comportamenti intrinsecamente motivati nei quali il *perceived locus* *of causality* è situato all'interno del soggetto (Ryan & Deci, 2000). In altre parole, favoriscono una motivazione intrinseca o identificata, nel senso più volte chiarito. Qualche studente, in particolare, consiglierebbe di iscriversi al Liceo Matematico (anche se la domanda non lascia affatto presupporre che l'intervistato/a debba consigliare o meno tale iscrizione ad un amico o ad un'amica); non tutti ne specificano il perché. Un numero ridotto di studenti descriverebbe tali ore come noiose o al di sotto delle proprie aspettative in quanto non hanno suscitato in loro alcun particolare interesse o si sono configurate come "ore di potenziamento" in matematica. In qualche modo si potrebbe dire che il parere espresso da questi ultimi è avvalorato dal fatto che, secondo altri, il piacere per la matematica sarebbe la *conditio sine qua non* percepire le ore di Liceo Matematico come «interessanti»:

> *Direi che alcune ore possono essere noiose, ma in generale sono interessanti* ***se ti piace la matematica****.*

Nella terza domanda si chiede di descrivere qual era il proprio rapporto con la matematica prima di iniziare il Liceo Matematico. Le risposte fornite sono state in molti casi espressi mediante un aggettivo: «buono» o «bello» o «positivo» sono i termini più usati per descriverlo, seguiti da «ottimo» o «molto buono». Solo pochi alunni riferiscono di avere avuto in passato un rapporto «pessimo» o addirittura «terribile». Qualcuno ha fatto riferimento al fatto che la trovasse «noiosa» o non si sentiva particolarmente coinvolto/a («Non ero completamente presa da questa materia e la trovavo un po' noiosa»). La maggioranza degli intervistati ha espresso piacere, amore, passione, interesse per la materia in sé a tal punto da affermare che tra tutte le materie era quella «preferita» o quella per la quale si sentivano più portati. Le risposte più significative sono di seguito riportate:

> *Mi è sempre piaciuta la matematica.*
> *Un buon rapporto, la studiavo e la studio volentieri.*
> *Era la mia materia preferita.*
> *Mi piaceva e mi sentivo portato.*
> *Mi piaceva e continua a piacermi.*

Ho sempre amato la matematica fin dalle elementari.
Credo un bel rapporto. Mi è sempre piaciuta (da quando ho cominciato a studiare seriamente le tabelline).
È una materia che mi è sempre piaciuta.

Spicca tra esse la risposta di uno studente per il quale la passione per la matematica è scaturita dal coinvolgimento messo in atto dall'insegnante che aveva qualche anno prima:

Alle medie ero molto bravo in matematica, la mia insegnate mi coinvolgeva molto e mi ha fatto appassionare alla materia.

Questo mette ancora in luce come sia fondamentale la mediazione dell'adulto nei contesti di apprendimento e di scoperta (Vygotskij, 1978). Nelle risposte si trova sovente l'avverbio temporale «sempre», cui fa seguito talora il riferimento ad un ben preciso momento della propria vita o del proprio percorso di studi («fin dalle elementari», «fin da piccolo», «dalle medie»); ciò evidenzia il fatto che tali studenti abbiano condotto una riflessione su come si siano rapportati con la disciplina durante l'arco della vita e in relazione all'ambiente didattico e educativo quale è la scuola, centrando pienamente l'obiettivo dei ricercatori. Una parte consistente di risposte descrive il proprio rapporto con la matematica in termini di valutazioni (a scuola) o riconoscimenti (come, ad esempio, la partecipazione ad una gara di matematica), dichiarandosi «bravo» o «brava» in matematica («Andavo già bene in matematica»), dicendo di avere sempre avuto buoni voti o di aver fatto quanto era necessario per ottenere la sufficienza. Un solo studente fa riferimento alla valutazione ma sottolinea come il suo interesse vada oltre i risultati conseguiti e sia invece intrecciato più allo studio della materia che all'attesa di un riconoscimento quale potrebbe essere un 'buon voto':

Per quanto non fosse e non sia tutt'ora la materia con la quale ho ottenuto ed ottengo i migliori risultati, è sempre stata quella che più mi ha interessato.

Si riportano, in particolare, delle risposte fuori dagli schemi: due si potrebbero considerare simili in quanto descrivono tale rapporto in termini dicotomici («Un rapporto di amore e odio», «Cane e gatto, io ero il gatto.»); due risposte (date da due studenti di Palermo) sottolineano come il percorso del Liceo Matematico abbia segnato una svolta nel proprio rapporto con la matematica, distinguendo così un *prima* e un *dopo* il Liceo Matematico. Questi ultimi, giunti quasi al termine dell'anno scolastico, hanno per l'appunto espresso un piacere, una passione per la disciplina maggiore che in passato:

> *Non era una delle mie materie preferite, ora ho iniziato ad appassionarmi di più.*
> *La matematica mi è sempre piaciuta, adesso molto di più.*

Si osserva come non sia stato fatto alcun riferimento a fattori altri quali la paura di sbagliare, le difficoltà in matematica, le teorie del successo, l'atteggiamento nei confronti della matematica, per i quali si rimanda ad altri testi (Baccaglini-Frank et al., 2018). La domanda successiva vuole portare lo/a studente/essa indietro nel tempo, a ripercorrere le tappe del Liceo Matematico e rintracciare un'attività che in particolar modo ha catturato la sua attenzione. La maggioranza degli studenti ha descritto qualche attività nella quale si è fatto uso di un artefatto, sia esso un software o un gioco. Tra i software utilizzati, sono citati i programmi "R", "Excel", "Python", "Scratch" e "Geogebra". Riguardo ai primi due programmi, si legge che gli studenti hanno imparato a strutturare questionari, ad elaborare dati statistici, a costruire e confrontare grafici statistici (come, ad esempio, il box-plot); qualcuno specifica di aver condotto un'indagine statistica nella propria scuola e di aver elaborato e discusso i risultati emersi:

> *Una attività che mi ha colpito particolarmente è stata quella di imparare ad usare meglio la matematica con il computer attraverso programmi come R.*
> *Mi ha particolarmente incuriosito la costruzione dei grafici, soprattutto del blox-plot. Oltre ad imparare a costruire i vari tipi grafici, ho imparato a raccogliere e confrontare i vari dati.*

Tali risultati sottolineano come l'interdisciplinarità dei Licei Matematici, nelle sue molteplici declinazioni, abbia nel complesso costituito la chiave di volta per lo sviluppo della literacy matematica (OECD, 2019a) negli studenti del campione, fino a farli sentire concretamente capaci di utilizzare e interpretare la matematica, di fornire una rappresentazione della realtà fenomenica mediante formule e grafici, di utilizzare concetti e procedure di natura matematica per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Il Liceo Matematico ha permesso ad altri studenti di imparare il linguaggio di programmazione "Python" o "Scratch", ad altri ancora di migliorare le proprie «abilità informatiche» usando l'applicativo "GeoGebra", il cui uso nelle scuole si è rapidamente diffuso negli ultimi anni anche perché risulta uno strumento estremamente utile per la manipolazione degli enti geometrici fondamentali, la costruzione di oggetti geometrici e la dimostrazione di teoremi e proprietà della Geometria Elementare:

Lavorare con l'applicazione geogebra, con questa ho sicuramente migliorato le mie abilità informatiche.
L'utilizzo di GeoGebra è stata la mia attività preferita, perché mi ha permesso di poter giocare con le figure geometriche come se le avessi realmente in mano.
Probabilmente la dimostrazione dei prodotti notevoli attraverso geogebra.
Le attività che mi hanno di più del Liceo Matematico sono le lezioni di Geogebra perché mi incuriosisce sviluppare le proposizioni con questo applicativo.

Qui emerge forte la componente dell'interazione tra il soggetto (alunno) e l'oggetto dell'attività mediata da strumenti e significati (Williams & Roth, 2019). *Geogebra* è stato lo strumento che ha mediato l'attività, o meglio, lo spazio problematico nel quale l'attività si è mossa e si è trasformata in risultato (Zucchermaglio, 1996) (comprensione di nozioni e proposizioni di Geometria, acquisizione di abilità e competenze in ambito informatico, matematico). Un notevole numero di studenti fa riferimento alla sfera dei giochi, includendo tra essi anche la codifica e decodifica di un messaggio cifrato in quanto vista come un'attività «pratica», «coinvolgente» e «intrigante»:

La crittografia è stata una delle migliori e ho imparato come i messaggi in codice siano regolati da alcune processi matematici.
La crittografia mi ha intrigato fin da subito.
La crittografia è un concetto alla quale aspiravo molto conoscere da tempo ed è stato bello poterlo studiare in classe in modo pratico e non solo teorico.

Imparare la matematica attraverso l'artefatto di un gioco o di un software ha consentito agli studenti di andar oltre le attività scolastiche; essi stessi puntualizzano come attività come la Crittografia o il "Gioco del '20" abbiano consentito loro di sviluppare le proprie abilità logiche, di «ragionare in modo matematico» (OECD, 2019a) e, più in generale, allo sviluppo di un pensiero critico. Già Castelnuovo nella seconda metà dell'Ottocento parlava agli insegnanti di quanto fosse importante un insegnamento attivo della matematica, finalizzato alla promozione dello sviluppo del senso critico e della creatività (Giacardi, 2006). Il Liceo Matematico, in un certo senso, ha dato alle sue parole una nuova veste ed un nuovo vigore, trasponendo il suo pensiero negli strumenti attualmente a disposizione. Non solo. I percorsi didattici hanno permesso anche di andare oltre i confini disciplinari e approdare ad un livello transdisciplinare, mediante l'applicazione di teorie, concetti e metodologie condivise *tra* e *attraverso* le discipline per operare una sintesi d'insieme (Lattuca, 2001), promuovere un linguaggio comune ed una conoscenza spendibile su un comune terreno di conoscenza (Collen, 2002). Riferendosi a ciò che hanno imparato con il "Gioco del 20", i giochi di Logica, l'attività della "Lingua Matematica" o di "Crittografia", gli studenti adducono infatti i seguenti motivi:

> *[Con i giochi di logica] ho imparato come ragionare oltre a ciò che ti si pone davanti.*
> *Il gioco del 20, perché ha sviluppato maggior logica in ognuno di noi e ci ha aiutato a ragionare su ogni minimo particolare.*
> *Mi è piaciuta particolarmente la parte sulla lingua matematica, ho migliorato il mio modo di ragionare.*
> *[Il 'Gioco del 20'] mi ha insegnato a guardare le cose da più prospettive.*
> *[Con la Crittografia] ho imparato a pensare in modo più critico e out of the box.*

Un ridotto numero di studenti fa invece riferimento allo studio della matematica insieme a quello della lingua inglese: si tratta di studenti di Palermo che hanno beneficiato del fatto che nel consiglio di classe erano presenti due insegnanti che avevano già fatto esperienze di insegnamento con il metodo CLIL. Dalle parole degli alunni emerge anche come la sperimentazione del Liceo Matematico possa intervenire ai fini della comprensione dell'importanza della dimensione culturale della matematica, vista come «habitus mentale» (Frapolli & Sbaragli, 2012, p.1) e della dimensione sociale dell'apprendimento, come più volte ribadito. Quest'ultimo aspetto emerge soprattutto dal fatto che, con o senza riferirsi ad una particolare attività, un esiguo numero di studenti ha evidenziato che ciò che li aveva maggiormente colpiti era proprio «la possibilità di partecipare attivamente alle lezioni», «la risoluzione collegiale dei problemi» ed il «lavorare in gruppo con leggerezza». L'interesse di tre studenti è centrato su attività che altrove potrebbero essere incluse in ore di potenziamento: attività che non trovano spazio, di norma, nel curriculum di studi ma che sono previste dalle Indicazioni Nazionali per il secondo ciclo (MIUR, 2010b, 2010c, 2010d):

> *Agire per assurdo. Svolgere problemi di geometria per assurdo, cioè negare la tesi.*
> *Come generalizzare e formulare una legge.*
> *La matematica ai tempi degli antichi greci, è stato molto interessante e il pomeriggio dopo la lezione sono anche andato a fare una ricerca.*

Uno studente anticipa la risposta del quesito successivo dichiarando di aver approfondito autonomamente un argomento affrontato in aula perché aveva suscitato in lui una certa curiosità ed ha voluto soddisfare il suo desiderio di saperne di più. In realtà il campione totale si può dividere in due metà, una (composta da n.54 studenti) ha approfondito almeno un argomento fra quelli trattati in aula, l'altra metà (composta da n.58 studenti) non ha approfondito alcun tema. Di quest'ultima parte, tre studenti affermano tuttavia che avrebbero voluto farlo. I temi di approfondimento sono stati specificati da un esiguo numero di alunni, i quali hanno fatto riferimento perlopiù agli stessi argomenti (indicati in risposta al quesito precedente) che li avevano colpiti in modo particolare: i software di programmazione e di elaborazione grafica o di calcolo (Python, Turtle, Scratch, Excel, Geogebra, R) sono i più ricercati, a seguire la Crittografia, gli scacchi ed il Nim. Singoli studenti hanno indicato degli argomenti specifici quali i prodotti notevoli, la dimostrazione del teorema di Pitagora attraverso l'uso di Geogebra, misurazioni di liquidi, la matematica nell'antica Grecia o la Storia della Statistica. Si sottolinea quanto sia evidente e oltremodo importante il riferimento alla Storia della Matematica che si legge tra le righe. Non era atteso, ovviamente, un riferimento diretto ad essa in quanto è estremamente difficile che degli studenti di grado 9 ne conoscano l'esistenza o semplicemente l'essenza. Il riferimento alla Storia della Matematica si rintraccia ad esempio in chi parla della matematica nell'antica Grecia, o della Crittografia (il cui sviluppo è intessuto in secoli di storia ed è ancora oggi aperto), o della dimostrazione di alcune proposizioni algebriche o formule geometriche con GeoGebra. La Storia della Matematica ha dato, per così dire, un'anima mortale alla matematica, l'ha umanizzata nel senso che ha permesso di tracciare il percorso a ritroso di alcuni concetti matematici e di collocare le scoperte in campo matematico in un orizzonte storico e temporale oltre che culturale.

Alla riflessione sulle attività particolarmente stimolanti, fa seguito una prima valutazione della misura in cui il Liceo Matematico può aver esercitato un'influenza positiva sulla motivazione degli studenti. È stato chiesto loro di esprimersi in una scala di Likert con item di risposta i valori da "1" a "5" dove "1" significa "per niente", "5" significa "moltissimo". Le risposte raccolte sono state elaborate con un istogramma (Figura 21) dal quale è possibile osservare che la maggioranza del campione ha risposto indicando i due valori più elevati ("4", "5"). Il 27% ha indicato il valore medio "3", il restante 7% ha indicato i valori più bassi ("1", "2"). Pertanto, la maggioranza del campione ritiene che il Liceo Matematico abbia influito molto sulla motivazione della propria persona.

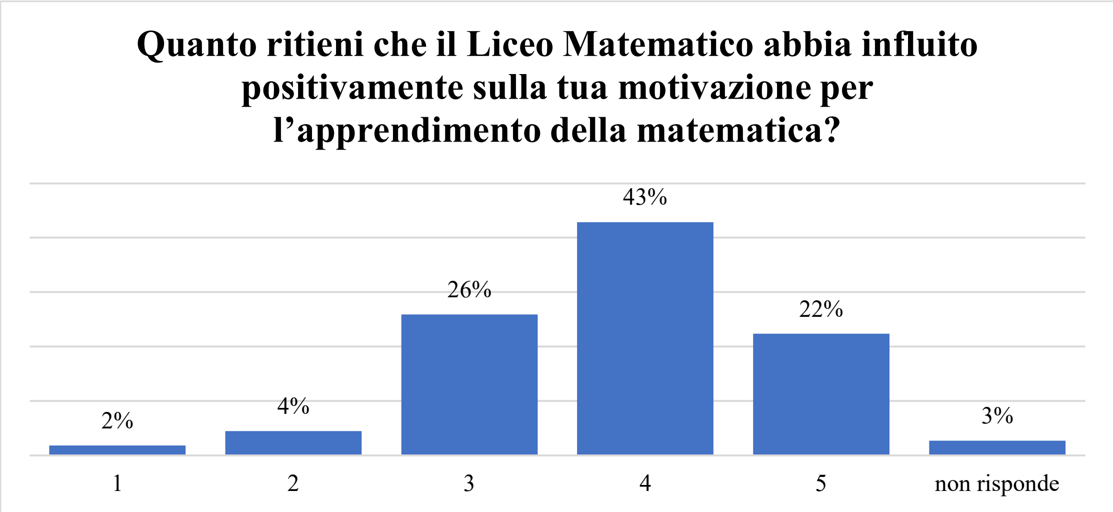

Figura 21 Istogramma riferito alle percentuali di studenti che ritengono che il Liceo Matematico abbia influito positivamente sulla loro personale motivazione. Il 2% ha risposto "1", il 4% ha risposto "2", il 26% ha risposto "3", il 43% ha risposto "4", il 22% ha risposto "5", il 3% non ha risposto al quesito.

Spostando il focus nuovamente sul rapporto con la matematica, alla luce di quanto ponderato da ciascuno studente per rispondere alle domande sul proprio rapporto con la matematica, sulle attività che lo/a hanno incuriosito/a ed eventualmente spinto/a ad approfondire qualche argomento autonomamente, cioè al di fuori dell'ambito scolastico, si chiede se il Liceo Matematico possa intervenire in aiuto a quanti non hanno un buon rapporto con la matematica. Le risposte al quesito n.7 sono rappresentate in termini percentuali nell'istogramma in Figura 22.

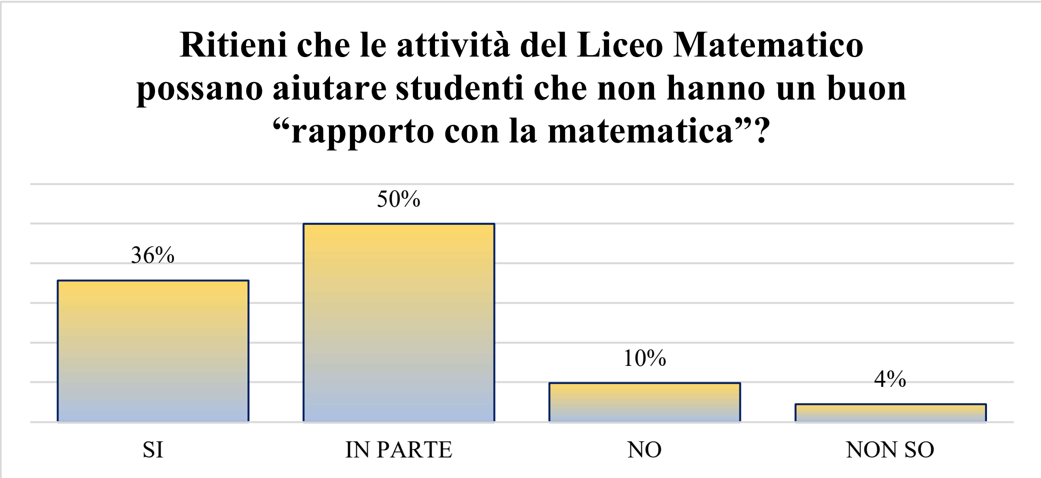

Figura 22 Istogramma riferito alle percentuali di studenti che ritengono che il Liceo Matematico possa eventualmente aiutare studenti che non hanno un buon "rapporto con la matematica". Il 36% del campione ha risposto 'SI', il 50% ha risposto 'IN PARTE', il 10% ha risposto 'NO', il 4% ha risposto 'NON SO'.

Complessivamente, gli studenti intervistati ritengono in misura maggiore che il Liceo Matematico possa aiutare, almeno in parte, quanti non ritengono di avere un "buon" rapporto con la matematica. Ulteriori informazioni sul come e sul perché ciò possa accadere si deducono dalle risposte alle domande successive della medesima sezione; in queste viene chiesto di esprimersi sulla possibile modifica della "visione" della matematica e su come siano eventualmente cambiati il proprio rapporto con la matematica e la motivazione per l'apprendimento di quest'ultima nel corso dell'anno (aspetti strettamente connessi alla visione della matematica e ai fattori motivazionali alla base dei quali risiede quello che si può definire un "buon rapporto con la matematica").

Luca (nome di fantasia), studente che ama la matematica sin dalle medie (grazie all'opera del suo insegnante che ha fatto emergere la sua naturale passione per la matematica), con un velo di cinismo afferma:

> *Uno studente medio non ha la passione per la matematica, vede solo numeri, segni, lettere e calcoli.*

Da queste parole iniziano le considerazioni su “quale” matematica vede e “come” riesca a vederla uno studente del Liceo Matematico. Se Luca avesse ragione, come è possibile andare oltre le lettere, i numeri ed i segni della lingua matematica, di quel “matematichese” come spesso si sente dire negli ultimi anni? O meglio, cosa si cela dietro alle operazioni di calcolo e all’uso di quei segni? Una parte consistente del campione si è espressa affermando che il Liceo Matematico può cambiare in positivo la visione della matematica da parte di uno studente e argomenta la risposta alla domanda n.8 chiamando in causa diversi fattori. Per descriverli, si fa riferimento alla seguente word cloud (Figura 23) che contiene le cinquanta parole riscontrate con maggior frequenza (parole simili, come ad esempio «gioco» e «giochi», sono state indicate da uno solo dei due termini).

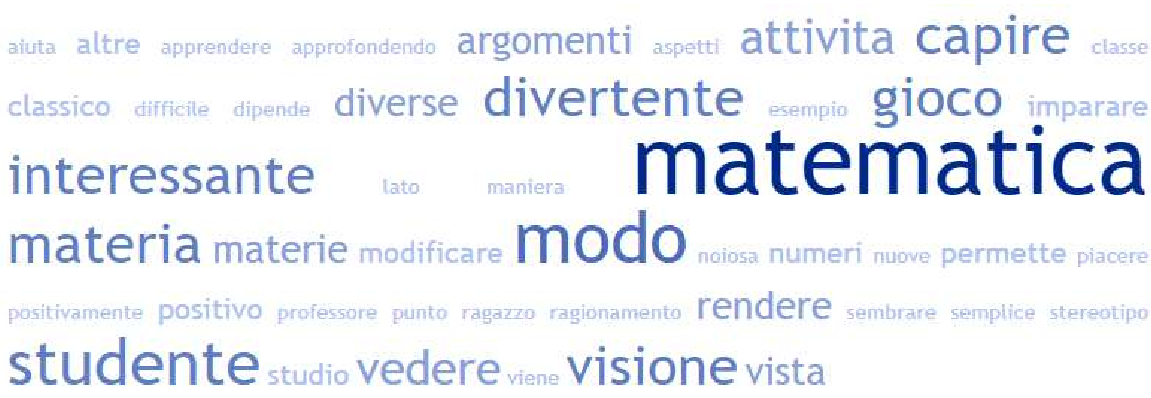

Figura 23 Word cloud contenente le cinquanta parole più frequenti riscontrate in risposta al quesito n.8 del test (Secondo te, in che modo il Liceo Matematico potrebbe modificare la “visione della matematica” da parte di uno studente?)

Le risposte fornite fanno riferimento a motivazioni il cui *locus of causality* è decisamente interno alla persona ed è intrecciato ad una regolazione intrinseca o identificata. Le ragioni espresse fanno in gran parte riferimento alla sfera emotiva (suscitare maggiore interesse/coinvolgimento, rendere la matematica più «piacevole» o più «divertente», «diminuire l’ansia»). A titolo esemplificativo, sono qui riportate alcune delle risposte:

Rendendola [la matematica] più divertente e leggera.

Vederla [la matematica] come un gioco senza essere valutato.
Nel rendere lo studio di questa materia più divertente e interessante.

Nel rendere lo studio della matematica più divertente gli studenti fanno spesso riferimento ai metodi di insegnamento e apprendimento, metodi che definiscono «nuovi», «diversi» dai metodi classici». Approcci «meno noiosi» o perfino «meno seri» nei quali gli studenti lavorano in gruppo e si sentano maggiormente coinvolti (rispetto alle lezioni curriculari) «in attività sempre nuove, diverse e particolari» potrebbero, a loro dire, modificare «il modo di vedere la matematica», di studiarla e quindi di apprenderla. Da queste prime osservazioni emerge dunque l'importanza delle emozioni positive in relazione alla motivazione degli studenti per l'apprendimento della matematica. In questo quadro appaiono particolarmente appropriate le parole di Markuu S. Hannula (2006) in un suo lavoro intitolato "Motivation in Mathematics: goals reflected in emotions":

Emotions are the most direct link to motivation, being manifested either in positive (joy, relief, interest) or negative (anger, sadness, frustration) emotions depending on whether the situation is in line with motivation or not.

(Hannula, 2006, p.167)

Molti studenti ritengono, in particolare, che un approccio game-based possa da un lato suscitare un maggiore interesse per la disciplina, dall'altro favorire il processo di apprendimento e la comprensione degli argomenti:

Permette di capire la matematica tramite dei giochi.
Grazie al gioco si possono imparare cose di ogni genere.
Vedendo la matematica come un gioco, ogni cosa può divenire semplice.

Si può trovare qui una conferma delle idee di Vailati secondo il quale la dimensione del gioco all'interno del processo di apprendimento può contribuire ad accrescere l'attenzione degli studenti (Giacardi, 2011) e, di conseguenza, facilitare l'apprendimento stesso. Tanti altri studenti ritengono altresì che il Liceo Matematico possa «aprire questa visione», ovvero far «vedere la matematica da un'altra prospettiva» intervenendo sulla personale motivazione per dirigerla verso una componente più identificata. Parafrasando le risposte analizzate, uno studente studia più volentieri la matematica se ne conosce l'aspetto per così dire «pratico», «concreto», se ne conosce cioè le applicazioni ai problemi reali, alla vita di tutti giorni e in collegamento con altre discipline. Qui sembra quantomai appropriata la riflessione di Williams e Roth riguardo alla separazione tra le discipline e, nella fattispecie, alla percezione negli alunni di una separazione tra la matematica ed altre discipline (Williams & Roth, 2019). È loro opinione che la ragione si possa rintracciare nel fatto che le pratiche caratteristiche di ogni disciplina contribuiscono alla divergenza tra le discipline e, dunque, possono ostacolare il lavoro interdisciplinare in ambito accademico o scolastico (Williams & Roth, 2019). Le risposte seguenti sono state scelte in quanto riassumono quanto appena detto:

Il Liceo Matematico potrebbe modificare la "visione della matematica" da parte di uno studente dando gli strumenti per comprendere le cose che ci circondano.
[Il Liceo Matematico] Permette di guardare la matematica da un altro lato, ovvero ci permette di capire per davvero che la matematica non è solo numeri ma è vicina a noi più di quanto si possa pensare.

Questo lato "altro" della matematica, questa differente prospettiva da cui può percepire la matematica uno studente del Liceo Matematico è dunque basata sul vedere una disciplina applicata al mondo circostante e che ne spiega il perché. Un tale lavoro può essere una singola tematica trattata o, in senso più ampio, l'intero percorso didattico di Liceo Matematico che ha visto interessati gli alunni nell'anno preso in esame. La comprensione del mondo circostante e di problemi della realtà si potrebbe considerare come quell'oggetto/motivo comune alle discipline che intervengono in un lavoro interdisciplinare ove ciascuna disciplina (o sistema) offre un contributo del tutto unico con le proprie peculiarità, prospettive, pratiche e strumenti (Williams et al., 2016). Ma comprendere il mondo attuale, nella sua complessità, è possibile se agli studenti viene presentata una conoscenza che non è solo disciplinare, cioè che identifica i contenuti specifici di ogni materia. Dalle risposte fin qui analizzate appare chiaro come le direzioni del Liceo Matematico (perlomeno, in riferimento al campione coinvolto nella ricerca) convergano su un punto evidenziato dall'ultimo rapporto OCSE (OECD, 2019b): presentare una conoscenza che rifletta già la complessità del mondo attuale. Essa parte dalla conoscenza degli oggetti e strumenti caratteristici delle discipline (conoscenza disciplinare) e passa necessariamente per la ricerca dei punti di connessione tra materie diverse e la successiva integrazione di strategie e contenuti (conoscenza interdisciplinare); la comprensione del perché una disciplina va appresa e come può essere applicata (conoscenza epistemica); la cognizione di come si apprenda o si compia un lavoro secondo processi strutturati (conoscenza procedurale). Una conoscenza così laboriosa e articolata andrebbe a porre in interconnessione le discipline tutte, rendendo i discenti capaci di applicare ciò che apprendono e adattarsi ad un mondo in continuo mutamento (OECD, 2019b). Prendendo in considerazione la disciplina matematica, questo consentirebbe in ultima istanza di comprendere l'importanza che la matematica riveste in altre aree del sapere quanto nella vita quotidiana. Proprio andando oltre i semplici esercizi di calcolo o problemi da risolvere è possibile vedere la matematica come una disciplina «molto più pratica» che «teorica», come una cosa più concreta ed applicabile, nonché molto più «interessante», usando le parole degli stessi alunni.

Aiutando uno studente a capire perché è importante nella vita la matematica. Dimostrerebbe che la matematica va oltre a semplici calcoli e che è sempre stata impiegata in tutto e lo sarà sempre.

Facendo capire che la matematica è e sarà la base del futuro.

Perché al liceo matematico è una matematica molto più pratica non teorica, quindi la rende più interessante.

Perché ci sono attività pratiche.

Si impara a confrontare il modello matematico in situazioni diverse.

Ciò è probabilmente dovuto al fatto che l'oggetto di studio della matematica «non è tangibile e reale come le scienze, e le sue applicazioni nel mondo reale riguardano una matematica più astratta e teorica difficile da comprendere dagli studenti» (D'Andrea, 2019, p.130). Per questo sembra si stia creando sempre di più una «frattura "apparente"» tra la matematica e la società: è compito dell'insegnante far capire agli/alle alunni/e che «anche la matematica più astratta, motivata da considerazioni intuitive ed estetiche», ha profondi collegamenti con la realtà e con la società (D'Andrea, 2019, p. 130). Tali considerazioni richiamano inevitabilmente la visione dell'insegnamento secondo Giovanni Vailati, discussa nel capitolo 3. Egli, difatti, partendo dal presupposto che il processo di apprendimento procede dal concreto verso l'astratto, sosteneva che l'insegnamento della matematica doveva avere un'impostazione più concreta che astratta, più sperimentale che mnemonica, più operativa che descrittiva. È fondamentale in questa prospettiva la dimensione della scoperta: l'allievo, con la guida attenta dell'insegnante che pone interrogativi e lo induce a riflettere, si fa ricercatore e scopre le verità matematiche da sé perseguendo anche i bisogni essenziali dell'autonomia e della competenza (Ryan & Deci, 2000). Una studentessa che motiva la risposta affermando che «in questo modo si vede la matematica da un'altra prospettiva», chiarisce il suo pensiero mediante una breve intervista nella quale aggiunge: «Si vede la matematica al di fuori della scuola, da una nuova prospettiva che è quella storica (novità rispetto alle medie)». La prospettiva storica è in effetti quella che tesse le fila del percorso didattico della sua scuola (Liceo Scientifico "Benedetto Croce", Palermo), come già detto nel capitolo 4. Un'altra studentessa introduce un'ulteriore riflessione che merita uno spazio a sé. Riferendosi alle varie branche del sapere alle quali la matematica si può collegare e nelle quali trova applicazione, la studentessa afferma che, secondo il suo pensiero, il Liceo Matematico «fa capire i vari campi in cui si può usare [la matematica]» e quindi può «stimolare l'apprendimento della matematica». Questo conferma l'idea che un approccio di apprendimento integrativo (fondato sull'interdisciplinarità) favorirebbe sia la libertà di integrare e combinare diversi metodi nel processo di esplorazione dei domini di conoscenza, sia la possibilità di affinare la motivazione e l'efficacia del processo di apprendimento (Ignjatovic, 2020). L'azione di insegnamento e apprendimento va da sé che chiama in causa la figura del docente che ha il compito essenziale di promuovere l'apprendimento e, nel caso del Liceo Matematico, potrebbe aiutare i suoi studenti a vedere quella che alcuni studenti intervistati indicano come «un'altra faccia della matematica». Nella figura dell'insegnante alcuni alunni di loro ripongono infatti attese e aspettative, e con esse la paura che vengano disattese, ipotizzando che il Liceo Matematico possa diminuire la propria motivazione o addirittura condurre al «disprezzo» per la matematica.

Nell'indagare quanto ritenessero utili le lezioni del Liceo Matematico, per approfondire maggiormente questo particolare aspetto della motivazione identificata, si è scelto di usare una domanda chiusa: gli studenti dovevano esprimersi mediante una scala di Likert indicando un valore da "1" (= "inutili") a "5" ("utilissime"). L'istogramma seguente (Figura 24) raccoglie le informazioni registrate.

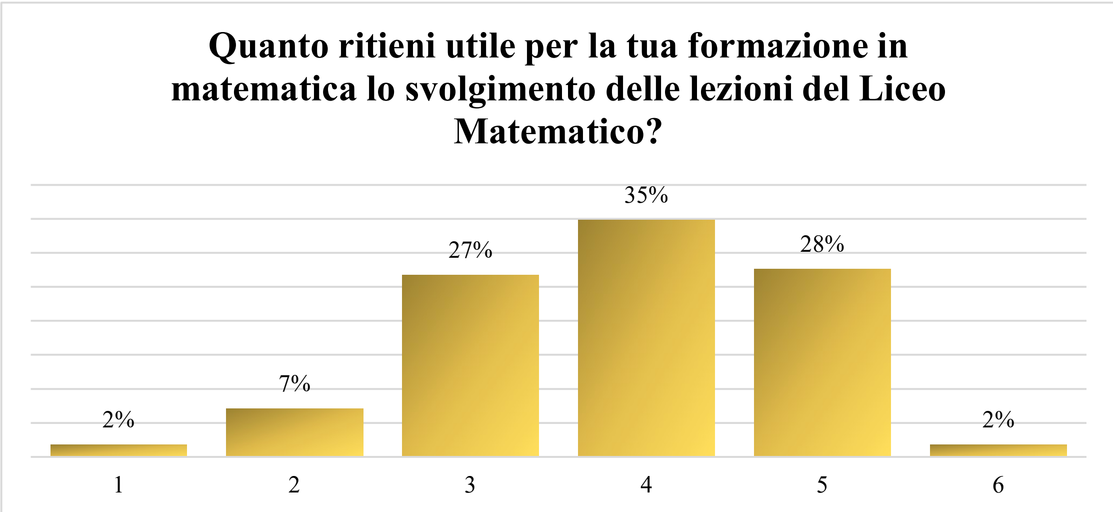

Figura 24 Istogramma riferito alle percentuali di studenti che ritengono utili le lezioni del Liceo Matematico per la propria formazione. Il 2% ha risposto "1", il 7% ha risposto "2", il 27% ha risposto "3", il 35% ha risposto "4", il 28% ha risposto "5", il 2% non risponde.

Si evince che circa il 90% del campione ha fornito una risposta compresa tra 3 e 5; complessivamente, le risposte sono distribuite intorno a 4 che risulta il dato centrale (o mediana). Dunque, si potrebbe dire che le lezioni del Liceo Matematico sono ritenute abbastanza o molto utili ai fini della formazione personale dal 60% circa del campione; il 30% circa ritiene siano utilissime; il resto del campione non risponde oppure non le ritiene abbastanza utili per la propria formazione. Lo studio della matematica per ragioni che il soggetto identifica come utili per sé stesso, per il corso di studi che vorrà intraprendere, per il lavoro che vorrà svolgere in futuro o per la vita, confluiscono nelle cause alla base della regolazione identificata. Da quanto si è visto nel paragrafo precedente, il 75% almeno degli studenti del Liceo Matematico ha dichiarato di essere, in media, abbastanza in accordo con le affermazioni afferenti alla regolazione identificata (Figura 18). Tale dato è confermato dalle risposte pervenute al quesito 9 e rappresentate schematicamente in Figura 25.

Alla luce delle riflessioni sul perché si è iniziato il percorso didattico del Liceo Matematico, quali attività siano state particolarmente d'impatto, se e come le lezioni interdisciplinari del Liceo Matematico possano intervenire a supporto della motivazione, della visione della matematica e del rapporto con quest'ultima per gli studenti del campione, si chiede nei due quesiti successivi di specificare e descrivere in che senso l'intervistato/a si ritiene che ciò sia avvenuto. Il 38% circa del campione ritiene che le lezioni alle quali ha partecipato non abbiano cambiato il proprio rapporto con la matematica (di questi, solo tre studenti specificano che hanno sempre amato la matematica e che continua a piacere loro allo stesso modo); l'1% non risponde; il 61% circa ritiene invece che tale cambiamento sia di fatto avvenuto. La ragione è perlopiù rintracciata nel maggiore interesse per la disciplina suscitato dagli argomenti e dalla conduzione delle lezioni, seguita dalla maggiore voglia di apprendere argomenti nell'ambito della matematica. Alcuni fanno riferimento «alle varie applicazioni della matematica» che avrebbero stimolato la loro curiosità a tal punto da «mettersi alla prova» più di quanto avessero fatto prima, approfondire argomenti definiti «complicati» e capire a fondo il perché di alcuni processi risolutivi. Quasi sempre, in particolare, interesse e stimolo della curiosità vengono indicati insieme:

> *Sicuramente ho trovato molto più stimolo a studiare durante quest'anno matematica rispetto gli anni precedenti dove avevo la stessa passione e interesse nella matematica ma non veniva fatta nel modo corretto.*

Spicca, nel campione uno studente, con la sua sana curiosità e voglia di apprendere, per il quale l'esperienza del Liceo Matematico è stata il tramite per vedere la matematica da un altro punto di vista:

Un grande interesse motivato dalla mia voglia di apprendere e una grande curiosità sulla matematica dietro la vita quotidiana che non ci si aspetterebbe.

In rari casi la curiosità a cui si fa riferimento non si ferma alla sfera matematica ma va oltre, per sconfinare in altre aree del sapere («Ho iniziato ad approfondire sempre di più quello che mi interessa, e non solo in ambito matematico.»). L'interesse per la matematica è talvolta espresso come una condizione basilare per studiare la matematica in modo più consapevole ma, soprattutto, più piacevole:

[Il Liceo Matematico] Me l'ha fatta piacere di più [si riferisce alla matematica]. Onestamente mi ha fatto venire interesse, che poi si è mutato in piacere.
Mi piace un po' di più [si riferisce alla matematica].
Provo più piacere e meno fatica a svolgere i compiti per casa e a stare attento alle lezioni.
Mi hanno fatto interessare di più alla materia e ho avuto più voglia di studiarla e quindi più piacere.

Nel campione coinvolto vi è inoltre una singola studentessa che fa riferimento al fatto che il Liceo Matematico ha veicolato un nuovo modo di approcciarsi alla disciplina ed anche al mondo circostante, come si legge dalla sua risposta:

Ho imparato a ragionare meglio e riflettere prima delle scelte, anche nella vita.

Probabilmente parlare di mathematical literacy, nel senso dato all'espressione nell'indagine PISA 2018 (OECD, 2019a), è prematuro, se si pensa che una tale riflessione è stata condotta da una studentessa di appena 14 anni. Ciononostante, dalle sue parole si vuole mettere in luce che il percorso del Liceo Matematico l'ha indirizzata a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo e nella formazione di cittadini attivi e riflessivi, contribuendo almeno in parte allo sviluppo della sua literacy matematica.

La sezione II del questionario si conclude con la domanda cardine, nella quale convogliano, presumibilmente, i pensieri espressi in risposta ai quesiti precedenti: «Com'è cambiata la tua motivazione per lo studio della matematica dopo l'esperienza del Liceo Matematico?». Come atteso, gli studenti richiamano l'interesse per la disciplina, la voglia di scoprire nuovi argomenti e le sensazioni provate nello scoprire qualcosa di nuovo in matematica o intorno alla matematica. Una parte consistente del campione afferma di non ritenere cambiata la propria motivazione, in quanto studiava già la matematica con piacere ed il suo «amore per la matematica è rimasto tale». In numero esiguo si collocano coloro che ritengono sia cambiata solo in parte ma nessuno di essi giustifica la propria risposta. La parte preponderante del campione ritiene invece che la propria motivazione sia cambiata «di bene in meglio», come si legge in una risposta, e che tale cambiamento sia stato notevole. Le ragioni che adducono gli studenti afferiscono parte nella regolazione identificata, parte nella regolazione intrinseca. Fanno infatti riferimento, per la prima categoria, al maggiore interesse verso la disciplina o ad una maggiore voglia di apprendere nuove cose (per accrescere il proprio bagaglio culturale), al significato profondo di ciò che si apprende in matematica e può risultare utile per il futuro (nello studio, nel lavoro o nella vita), per l'importanza assegnata alla matematica. Si riportano alcune frasi più significative:

Voglia di apprendere nuove cose.
In positivo soprattutto perché so che mi potrà servire in futuro.
È cambiata in meglio perché più si va avanti e più si scoprono cose sempre più interessanti e utili per il futuro.
Delle cose che prima sembravano inutili ora hanno un significato.
Non credevo davvero che la matematica potesse nascondersi così anche nelle cose di cui non ci si aspetterebbe.

Riguardo alla seconda categoria, le ragioni addotte si riferiscono ad un «piacere» e ad un «divertimento» quasi inaspettati nello studio della matematica. Essi sono in taluni casi legati alla soddisfazione personale provata nel capire qualcosa nella sua essenza, nel sentirsi competenti in matematica grazie, possibilmente, ad approfondimenti di natura storica che mettano in luce come siano stati superati alcuni misconcetti ed errori. La consapevolezza dell'esistenza delle misconcezioni e la conoscenza dei processi storici che hanno portato ad un ben preciso concetto o ad una teoria matematica rientra nella sfera del PCK di un docente (Shulman, 1986) e nel caso particolare di un Liceo Matematico è qualcosa che può davvero fare la differenza in termini di motivazione all'apprendimento della matematica negli allievi. Talvolta, vi era alla base un certo interesse per la disciplina («L'interesse che *è diventato piacere*.»); altre volte vi era invece un atteggiamento mosso più da cause esterne («Sono passato dallo studiarla per dovere allo studiarla *per un piacere personale*.»); altre ancora, si mette in evidenza come ci sia stato un radicale cambiamento lungo il continuum che procede dalla *amotivation* alla *intrinsic motivation* (Deci & Ryan, 1985):

> *Prima ero piuttosto svogliato, ora mi impegno e* ***mi diverto****.*
> *Prima non studiavo molto la teoria perché era più complicata ma ora sono costretto a farla e vedo che* ***mi diverto molto****.*

Si mette in evidenza come gli alunni stessi abbiano indicato un *prima* ed un *dopo* specificando ciò che *prima* del Liceo Matematico li *muoveva* (o non li muoveva affatto) a compiere un'azione, a partecipare ad un'attività di matematica per raggiungere un determinato scopo. L'etimologia stessa della parola *motivazione* richiama l'idea del mettersi in movimento (*motus*) per raggiungere un oggetto o un obiettivo desiderato. In ultima analisi, le risposte di due studentesse dimostrano quanto il percorso del Liceo Matematico sia stato per loro significativo in quanto hanno fatto proprio il messaggio dell'interdisciplinarità:

> *Adesso studio cercando collegamenti con ciò che mi circonda.*
> *Non potrei pensare oggi di iscrivermi ad un liceo classico tradizionale.*

Nella sezione finale del questionario si vuole dare agli intervistati l'opportunità di tornare (ipoteticamente) indietro nel tempo per cambiare la scelta del Liceo Matematico o, eventualmente, cambiare ciò che ha vissuto sulla base di alcuni suggerimenti (ad esempio, se avrebbe preferito dedicare alle lezioni interdisciplinari più ore o svolgere più attività in piccoli gruppi). Tre studenti non sono certi che rifarebbero la scelta di iscriversi al Liceo Matematico; diciassette non rifarebbero tale scelta, chi perché si è «annoiato», chi perché non ritiene che siano migliorate le proprie competenze, chi perché avrebbe preferito fare il percorso di potenziamento di Scienze (per accedere al quale occorre superare un esame di sbarramento). Ciò è coerente con quanto emerso dall'analisi della distribuzione dell'indice SDI nel sottocampione formato dagli studenti del Liceo Matematico (sottocampione 1) nella Fase 2 degli esiti (Figura 11). Difatti, quanti non si iscriverebbero nuovamente al Liceo Matematico (il 15% circa del campione coinvolto nella Fase 3) adducono delle ragioni che afferiscono alla sottoscala dell'amotivazione; essi hanno presumibilmente studiato la matematica perché sentivano di doverlo fare, non perché avessero un qualche interesse per la disciplina in sé o per ciò che potevano acquisire in termini formativi e di competenze. A tale comportamento controllato corrisponderebbe un indice SDI negativo; questo dato è coerente col fatto che circa un quarto del sottocampione 1 presenta un indice SDI negativo nella Fase 2 (Figura 11).

I restanti novantadue alunni non hanno alcun dubbio: rifarebbero nuovamente la scelta del Liceo Matematico per ragioni che spaziano molto dall'interesse suscitato in loro per gli argomenti interdisciplinari trattati, al fatto di essersi divertiti mentre scoprivano o imparavano qualcosa di nuovo, passando per l'importanza percepita di quanto si studia in matematica ai fini lavorativi (conoscenza epistemica), per gli studi che si vogliono intraprendere o per i benefici che derivano dal saper collegare ciò che si è appreso in matematica con il mondo circostante e con altre materie di studio (conoscenza disciplinare e interdisciplinare). Escludendo le sette risposte affermative non argomentate, le risposte argomentate (cioè, nelle quali è spiegato il perché della risposta affermativa) sono state categorizzate in regolazione introiettata (n.1 risposta), regolazione identificata (n.39) e regolazione intrinseca (n.46). Alla prima afferisce la risposta di uno studente di una classe mista di Liceo Matematico, il quale ritiene che le lezioni lo abbiano fatto sentire più preparato in matematica rispetto ai compagni che non hanno scelto di partecipare al Liceo Matematico; in tal modo si pensa che abbia potuto far vedere ai compagni quanto vada bene in matematica. Alla seconda afferiscono le risposte nelle quali si legge che il Liceo Matematico ha permesso di approfondire di più gli argomenti di matematica (una studentessa specifica che ha acquisito «più sicurezza in alcuni argomenti»), di «scoprire sempre più cose», di affrontare argomenti utili per il proprio futuro lavorativo o il percorso di studi da intraprendere, o semplicemente perché è stato utile (qualcuno aggiunge «d'aiuto anche in altre materie»). Uno studente di un Liceo Scientifico, in particolare, ritiene che, rispetto alle ore di potenziamento di Scienze, frequentare il Liceo Matematico possa dare l'opportunità di «avere una mente più aperta». Sulla base delle risposte fornite al questionario dallo studente, si pensa che facesse riferimento a quelle "lenti matematiche" con cui è possibile vedere il mondo. Egli, difatti, parla altrove di una «visione d'insieme per la lettura dei problemi» e di tematiche nuove quali la Crittografia che gli hanno permesso di andare più a fondo, capire il perché di alcuni processi matematici e come affrontare la risoluzione di una situazione problematica non analoga a nessuna tra quelle note. Appaiono a questo punto più che mai appropriate le parole di Silvia Sbaragli (2011) in un suo lavoro dal titolo "Le competenze nell'ambito della matematica":

> *Vanno quindi scelti quei contenuti che hanno valore strutturante e generativo di conoscenze, con valore formativo esplicito e che rappresentano gli assi portanti dell'intero percorso di formazione e della vita degli allievi come cittadini. La competenza rappresenta quindi il fine ultimo, l'obiettivo didattico generale per più contenuti di una data disciplina; tale obiettivo va quindi pianificato collegando tra loro gli argomenti da proporre tramite modelli di processo di studio ricchi e coerenti.*
>
> *Deve far parte del curricolo proprio questo processo di insegnamento-apprendimento specificamente rivolto a saper vedere matematicamente il mondo.*
>
> *Appare come un gioco di parole, ma possiamo sintetizzare diversi aspetti menzionati in questo articolo affermando che occorre una grande competenza dell'insegnante per formare allievi competenti.*
>
> *(Sbaragli, 2011, p.149)*

Alla terza sottoscala afferiscono le risposte nelle quali si legge che l'intervistato/a ha provato piacere nello svolgere le attività proposte e le ha trovate «interessanti», «piacevoli», «divertenti»; il Liceo Matematico – si legge - è stata nel complesso un'esperienza «bella» e «divertente» (oltre che «utile») durante la quale «la matematica viene trattata con leggerezza», «un modo per non fare la solita lezione di matematica». Si fa presente che il termine *leggerezza* non sembra riferito alla complessità degli argomenti di matematica trattati, quanto al "come" vengono trattati; lo stesso studente, infatti, si era precedentemente espresso riguardo al proprio rapporto con la matematica dicendo che il Liceo Matematico aveva suscitato in lui un maggiore interesse per la materia e piacere nello studiarla. Ciò trova conferma nel fatto che l’attività che aveva preferito era stata difatti quella degli scacchi e, a proposito del modo in cui il Liceo Matematico possa cambiare la “visione” della matematica di uno studente si esprime con queste parole: «Rendendola più divertente e leggera». Si ipotizza, dunque, che le lezioni del Liceo Matematico siano risultate, almeno per alcuni studenti, piacevoli e divertenti non per solo per le attività didattiche scelte ma anche per le modalità in cui sono state presentate e con le quali gli studenti si sono sentiti più o meno coinvolti in qualcosa che prescinda dalla valutazione e punti invece più allo sviluppo di competenze (siano esse logiche, di calcolo, di ragionamento, di espressione). Le risposte nelle quali si fa riferimento a ragioni diverse, sono state categorizzate in due sottoscale distinte; ad esempio, la risposta «Sì, perché è stato tutto molto utile e interessante» è stata considerata sia come motivazione identificata (in quanto ha ritenuto utili per sé le lezioni del Liceo Matematico) sia come motivazione intrinseca (in quanto le lezioni hanno suscitato un maggiore interesse per la disciplina). Si sottolinea, inoltre, come a tali studenti dovrebbe corrispondere un indice SDI positivo dal momento che la loro motivazione allo studio della matematica è legata a ragioni pressoché interne. Si suppone che, lasciando gli studenti liberi di esprimersi, abbiano indicato le ragioni che ritenevano più importanti, quasi a voler completare quanto espresso in risposta ai quesiti precedenti nello stesso test. Probabilmente, inserire il quesito nel questionario come primo anziché dodicesimo avrebbe fatto emergere molti più fattori, molti più *loci of causality*, interni e non.

Dal momento che le risposte afferenti alle ultime due sottoscale indicate (regolazione identificata, regolazione intrinseca) sono numerose, si è scelto di riportare qui soltanto alcune risposte tra le più esaurienti. Tra le risposte afferenti alla sottoscala della regolazione identificata, sono state ritenute significative le seguenti risposte:

Sì, perché aiuta sotto più punti di vista.
Sì, perché il livello di formazione è maggiore rispetto a quello normale.
Sì, perché amo sperimentare cose nuove e dopo questa esperienza ho capito che la matematica rimarrà sempre una materia fondamentale nei miei studi.
Sì perché mi è stato molto utile imparare queste cose.

Sì perché sono sempre convinto che sia una scelta che da una grande quantità di sbocchi lavorativi.

Si, perché trovo che il mio bagaglio culturale sia molto più approfondito.

Nonostante l'impegno richiesto mi rendo conto che mi serve ora e nel futuro.

Si, perché ti offre la possibilità di guardare la matematica con occhi diversi.

Penso di sì perché la matematica è importante.

Sì, per poter apprendere ancora di più.

Perché voglio studiare il greco senza rinunciare alla matematica.

Perché a differenza del potenziamento scienze o altri potenziamenti, quello matematico permette di avere una mente più aperta.

Perché avrei la possibilità di imparare nuove cose come la robotica.

Sì perché imparerei sempre più cose.

Lo farei per imparare altre cose applicate al mondo.

Tra le risposte afferenti alla sottoscala della regolazione identificata, sono state considerate significative le seguenti risposte:

Sì perché è molto interessante e divertente.

Sì, perché è una materia che mi appassiona.

Sì, perchè amo la matematica.

Sì perché mi sta piacendo ed è anche un modo per non fare la solita lezione di matematica.

Sì perché le lezioni tenute mi sono piaciute.

Sì perché ho scoperto che al [Liceo] matematico si approfondisce molto di più la matematica.

Sì, perché si fanno molte cose belle.

Sì, perché sono delle belle ore in cui la matematica viene trattata con leggerezza.

Sì, perché mi sono piaciute molto le attività e le ho trovate interessanti.

Sì, perché l'informatica che abbiamo fatto è stata molto utile e interessante.

Sì perché preferisco le materie scientifiche, in particolare la matematica.

A chiusura del questionario si chiede «Quali modifiche vorresti apportare alla programmazione del Liceo Matematico per il prossimo anno scolastico?» e «Se potessi approfondire degli argomenti di matematica e di qualche altra disciplina che quest'anno non è stata inclusa nelle lezioni interdisciplinari del Liceo Matematico, di quale disciplina si tratterebbe?» Alcune risposte alla prima domanda, ipotizzate dai ricercatori, sono fornite nel testo (es. «più lavori di gruppo»); un campo vuoto è comunque presente per eventuali risposte non previste. Le risposte raccolte sono rappresentate nel seguente istogramma (Figura 25).

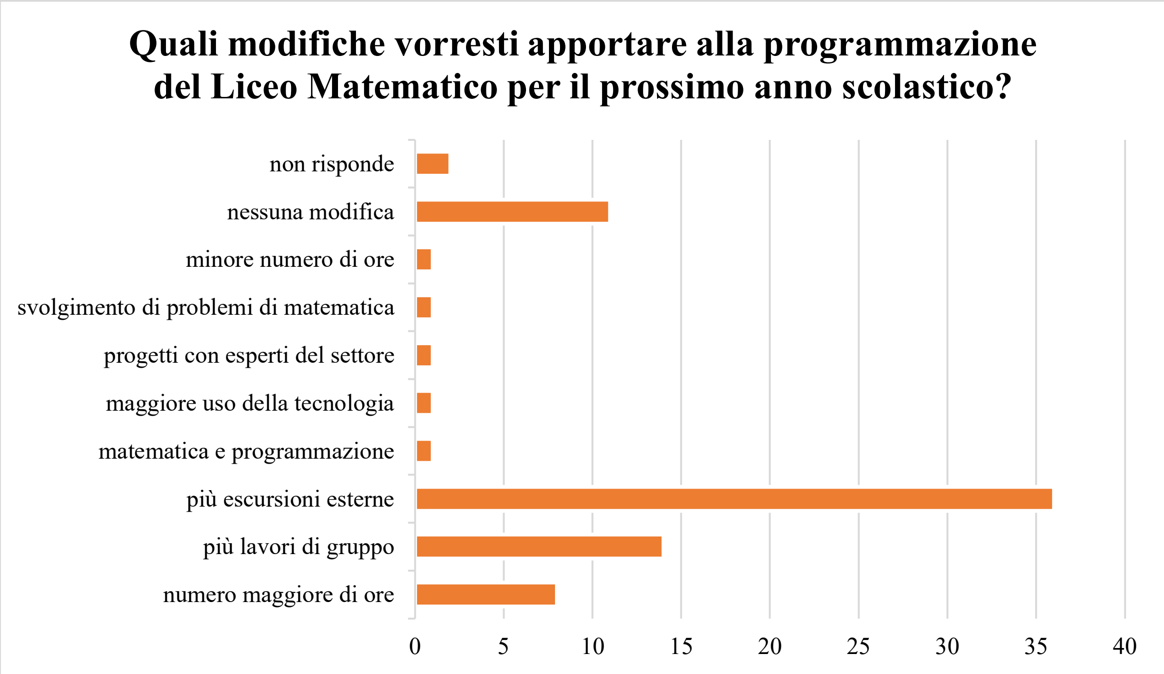

Figura 25 Istogramma delle risposte al quesito n. 14. Sull'asse verticale le risposte registrate, sull'asse orizzontale il numero di studenti dai quali sono state rispettivamente indicate.

Gli approfondimenti suggeriti dagli studenti riguardano in misura maggiore le Scienze Integrate (Fisica, Chimica, Biologia e Scienze della Terra), seguite da argomenti di Matematica (in ordine di occorrenze maggiori, Informatica/Tecnologia, Geometria, Algebra, Calcolo), dalle lingue classiche e straniere. Si registra che alcuni studenti hanno indicato anche argomenti quali “Crittografia”, “Robotica”, “Stampa 3D”, “Arte”, “Scacchi”, “Religione”. Solo in pochi casi le risposta si riscontra un legame con l’attività indicata in risposta al quesito n.4 (ad esempio, uno studente che ha indicato l’attività con “GeoGebra” ha qui indicato di voler approfondire la Geometria). Si evidenzia che, contrariamente a quanto si potrebbe pensare, le richieste di approfondire la matematica in relazione alla lingua italiana o latina non provengono soltanto da studenti iscritti in un Liceo Classico, così come le richieste di approfondire la Geometria o la Fisica non provengono soltanto da studenti iscritti in un Liceo Scientifico, a riprova del fatto che il campo di interesse degli alunni coinvolti nella ricerca si è ampliato molto, a prescindere dal curriculum del percorso di studi intrapreso.

In ultimo, si discute in che modo la collaborazione tra docenti (*collaborative teaching*), attuata in forma di co-pianificazione e co-docenza, possa eventualmente intervenire a supporto della crescita formativa e professionale degli stessi docenti, per rispondere alla quarta domanda di ricerca che qui viene ripresa:

Q_4: Quali sono le possibili ricadute del collaborative teaching, attuato per realizzare lezioni interdisciplinari, sulla crescita formativa e professionale dei docenti del Liceo Matematico?

L'analisi qualitativa delle interviste condotte è presentata nel paragrafo seguente.

6.7 *Fase 4: esiti*

I docenti intervistati appartengono a due differenti consigli di classe: uno della sezione mista frequentante il Liceo Classico "Vittorio Emanuele II" di Palermo, l'altro della sezione normale frequentante il Liceo Scientifico (indirizzo tradizionale) "Benedetto Croce" di Palermo. Nella prima classe le attività erano state programmate dal referente scolastico del progetto, previa conferma da parte del Dirigente Scolastico. Qui la collaborazione tra docenti è stata attuata solo in fase di programmazione delle attività didattiche ed era finalizzata alla conferma o all'apporto di eventuali modifiche alla programmazione proposta dal referente scolastico. Inoltre, le lezioni in aula sono state condotte da un solo docente alla volta, pur essendo presente in aula un altro docente o, nel ruolo di osservatrice, la scrivente. Nella sezione normale, invece, la collaborazione tra i docenti ha visto la partecipazione degli stessi sin dalle prime fasi di pianificazione delle lezioni, quando sono stati messi a punto i singoli "temi" da proporre alla classe. In quest'ultima tutte le lezioni sono state realizzate in compresenza con due docenti del consiglio. In linea con gli obiettivi di ricerca, è stata presa in esame la collaborazione tra i docenti attuata – nella forma di co-plannig e co-teaching -dal consiglio della seconda classe: essi costituiscono il campione di docenti al quale si rivolge l'intervista condotta.

Necessariamente, i docenti si sono incontrati più e più volte, anche al di fuori dell'orario scolastico, per co-pianificare le lezioni interdisciplinari, gli obiettivi didattici da raggiungere, le competenze didattico-disciplinari e trasversali che avrebbero dovuto acquisire gli studenti e le metodologie didattiche più opportune da adottare. Fondamentale è stata senza dubbio la collaborazione con il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Palermo in questa prima fase progettuale. Tra gli obiettivi condivisi dall'intero gruppo di lavoro vi era quello di supportare una visione della matematica quale disciplina che si integra con le altre, le supporta e può trovare in esse svariate e concrete applicazioni. Da ciò deriva la scelta di proporre delle lezioni interdisciplinari durante le quali sperimentare alcune delle applicazioni "pratiche" (per richiamare la visione vailatiana dell'insegnamento) della matematica nelle scienze, favorire un incontro tra la matematica ed altre discipline, approfondire le conoscenze in matematica in un modo inconsueto, nell'ottica di una formazione interdisciplinare. Lo strumento scelto per indagare approfonditamente il collaborative teaching tra i docenti della suddetta sezione di Liceo Matematico è quello dell'intervista semistrutturata. Il campione a cui erano dirette le interviste è costituito da cinque docenti: una insegnante di Inglese, uno di Lettere, due di Matematica e una di Matematica e Fisica. La collaborazione tra essi è stata messa in atto con workshop durante i quali hanno co-programmato le lezioni interdisciplinari da svolgere durante l'anno scolastico 2018/19, e co-docenze (*cooperative teaching*) tra i membri del gruppo di lavoro, ossia del consiglio di classe. Fa eccezione il caso del docente di Lingua e Letteratura Italiana e Latina che non ha potuto partecipare alle attività in aula per ragioni di tempistica. La co-progettazione delle attività didattiche è stata fondata su alcuni punti chiave: i contenuti interdisciplinari, i prerequisiti, le metodologie e gli strumenti didattici da adottare, gli obiettivi didattici da raggiungere e le capacità da sviluppare o potenziare alla fine del percorso. In particolare, uno degli obiettivi del gruppo di docenti era quello di fornire agli studenti occasioni per osservare e sperimentare modi diversi di "fare matematica" in interdipendenza con altre discipline e applicandola in molteplici contesti di realtà, per favorire la percezione di una cultura unica o, per meglio dire, unificante. Lo conferma la scelta di un tema esclusivo per le attività didattiche, da sviluppare su un piano interdisciplinare appunto, senza compiere una netta distinzione tra le discipline coinvolte: il tema della *misura*. Questo tema avrebbe dovuto abbracciare, oltre alla Matematica, la Fisica con la teoria dell'errore, la Statistica con il concetto di stima, l'Inglese con l'uso della microlingua di settore (utile per misurare grandezze di tipologie diverse, per contare ed enumerare in lingua inglese), la grammatica latina e la letteratura latina con l'approfondimento dell'agrimensura. La Storia della Matematica si erge al ruolo di ponte disciplinare, essenziale per lo sviluppo del tema della misura; senza di essa non sarebbe stato possibile interpretare i fatti e le scoperte che hanno portato agli sviluppi di questo tema nei secoli. Lo sviluppo del tema scelto ha visto la compresenza in aula di docenti del dipartimento di Matematica (della scuola), con la collaborazione della docente di Inglese in fase di co-programmazione. Per ragioni di tempo, non è stato possibile risalire alle origini dell'agrimensura; il modulo sarebbe stato affrontato durante il successivo anno scolastico insieme al docente di Italiano, Latino e Storia.

Ogni attività, svoltasi come laboratorio di matematica, è stata progettata con molta cura affinché spingesse la classe a cooperare, lavorando sempre in piccoli gruppi e condividendo ogni risultato con l'intera classe, a porsi delle domande per risolvere dei problemi, a saper interpretare dati provenienti dalla realtà al fine di comprendere e predire fenomeni. Le metodologie adottate sono state, pertanto, diverse: cooperative learning, problem posing and solving, learning by doing, metodologie che richiamano i quadri teorici già presentati nei primi tre capitoli. Tutto ciò ha contribuito in modo significativo a promuovere uno sviluppo della *Mathematical literacy* intesa come quella capacità di analizzare, porre e risolvere problemi di matematica in differenti contesti (PISA, 2012, p.17). Durante la co-progettazione delle lezioni interdisciplinari ciascun docente si è mostrato aperto verso discipline che sono altre rispetto alla disciplina d'insegnamento e, più in generale, verso altre tematiche e altre metodologie didattiche, mostrandosi disponibile al dialogo e sentendosi parte integrante di un'unica comunità educante. Un fattore di successo in questa collaborazione, tanto in fase di co-progettazione quanto in fase di co-docenza, è stato il clima di fiducia e di stima tra i docenti del gruppo di lavoro, a conferma di quanto emerso da precedenti ricerche (Dunne et al., 2000).

I dati raccolti dalle interviste semistrutturate sono stati analizzati in modo qualitativo, data la presenza di un esiguo campione e data la tipologia di intervista (semistrutturata) che non consente di stabilire a priori delle possibili categorie di risposta. Ai docenti si è voluto dare degli spunti di riflessione, lasciando loro la libertà di sviluppare un'argomentazione in risposta alle domande stimolo. L'analisi delle risposte registrate è stata realizzata dai ricercatori in due fasi: la prima individuale, la seconda mediante confronto tra gli stessi ricercatori. Nella prima fase ciascun ricercatore ha ascoltato più volte le audio-registrazioni delle interviste, definito le categorie di risposta in relazione alle variabili che si volevano indagare (il contesto, gli obiettivi di insegnamento e apprendimento, la didattica collaborativa, il rapporto degli studenti con la matematica e la motivazione degli studenti verso l'apprendimento della matematica) e alle altre variabili emerse; le risposte appartenenti ad una stessa categoria sono state sottoposte ad un attento confronto al fine di rilevare eventuali similarità nella terminologia usata o nei concetti espressi e, dunque, raccogliere le categorie di risposta simili. Nella seconda fase i ricercatori si sono incontrati per confrontare quanto era emerso, secondo ciascuno, dalla prima analisi; una volta concordate le categorie di risposta definitive, si è dato inizio all'analisi dei dati mediante il software "Nvivo 12" e contemporaneamente alla stesura di una relazione sui dati rilevati. I risultati emersi sono descritti di seguito. Alle risposte più rilevanti ai fini della ricerca è riservato uno spazio maggiore. I risultati emersi dall'analisi delle interviste sono discussi in cinque sezioni, una per ciascuna parte dell'intervista. Ove ritenuto necessario, vengono riportate le risposte più significative ad alcune domande dell'intervista, anteposte dall'iniziale del cognome.

Background del docente: i docenti hanno conseguito la laurea presso l'Università degli Studi di Palermo ed hanno seguito percorsi di studio diversificati (Fisica, Lingue e Letterature moderne e straniere, Ingegneria, Statistica). Hanno accantonato un numero di anni di insegnamento compreso tra 18 e 32 anni e, fatta eccezione per una docente soltanto, insegnano ininterrottamente nella stessa scuola da dieci anni. La docente di Statistica riferisce di aver insegnato per diversi anni in un ordine scolastico inferiore e di collaborare del la stesura di libri didattici, portando avanti una passione che va ben oltre lo svolgimento di un programma scolastico. Per un'altra docente l'insegnamento è stato affiancato dalla libera professione (in riferimento alla docente di Inglese, la quale afferma di considerare la professione di guida turistica come un valore aggiunto all'insegnamento, un fattore di ricchezza). Le ragioni che stanno dietro la scelta di insegnare sono perlopiù due: il primo è la facilità di poter lavorare, in modo continuativo e, eventualmente, svolgendo anche la libera professione, il secondo è legato alla bellezza dell'insegnamento, alla rielaborazione continua dei contenuti appresi durante gli studi universitari e all'interazione con gli alunni. Certamente emerge, per questo secondo motivo, un fattore prettamente affettivo legato al piacere provato per insegnare e alla relazione che si instaura con gli studenti.

Contesto scolastico:

Cosa si intende per "contesto scolastico"? In realtà, il termine *contesto* è stato volutamente usato senza alcun aggettivo caratterizzante. Gli intervistati hanno fatto riferimento a tre principali categorie di risposta: il contesto legislativo/organizzativo, il contesto didattico e l'utenza. Il primo riguarda l'organizzazione interna della scuola, l'offerta formativa curricolare ed extracurricolare, la distribuzione dei fondi e i servizi offerti. La scuola di oggi offrirebbe più opportunità ai giovani studenti ma senza ripartire equamente i fondi e le risorse a tutti i dipartimenti, favorendo alcuni dipartimenti a discapito di altri. I docenti hanno espresso in generale malcontento per la crescente riduzione dei fondi dedicati al comparto scuola e la conseguente impossibilità di offrire, ad esempio, corsi di recupero ai minori appartenenti a famiglie svantaggiate. Il secondo riguarda la scelta dei contenuti disciplinari, delle metodologie di insegnamento/apprendimento da adottare, le competenze che la scuola propone di offrire. Due docenti ritengono, in particolare, che raggiungere delle autentiche competenze in uscita sia molto più difficile ai giorni nostri rispetto a dieci anni fa. Una docente osserva come il contesto didattico sia in interrelazione con il contesto socioeconomico e socioculturale al quale appartengono gli studenti. Nei quartieri a rischio o in contesti particolarmente disagiati, laddove le famiglie non danno alcun supporto allo studio o addirittura denigrano le istituzioni scolastiche, diventa alquanto delicata la scelta dei contenuti, delle metodologie da impiegare: riportando le parole espresse dalla docente, lì «bisogna lavorare prima sulle famiglie» affinché comprendano l'importanza di istruire i giovani. Con il terzo contesto, l'utenza, si fa riferimento al «materiale umano» costituito dai giovani in ingresso (dunque, gli alunni e le alunne delle classi prime) nella loro interezza, con i loro desideri, le loro aspettative, il loro modo di comunicare e di apprendere, le loro conoscenze. Tutti i docenti sono concordi nel ritenere che ci sia un notevole peggioramento delle competenze degli alunni in ingresso nelle scuole secondarie di secondo grado (e per alcuni anche degli alunni in uscita). Una docente ritiene che ciò sia dovuto al cambiamento degli stili di apprendimento, avvenuto di pari passo con l'evoluzione quantomai rapida dei mezzi di comunicazione: l'essere più legati ad un linguaggio iconico avrebbe lasciato, nel corso degli anni, poco spazio al linguaggio verbale tra i giovani causando un peggioramento della «capacità di espressione e di comunicazione», competenze chiave per l'apprendimento. Un'altra docente evidenzia, in linea con la precedente risposta, che spesso nota un senso di frustrazione in quegli alunni in ingresso (alunni delle classi prime) che credono di avere dato il meglio di sé fino a qualche mese prima, senza però mostrare di aver acquisito delle reali competenze. Diventare consapevoli delle proprie capacità e della necessità di costruire un nuovo metodo di studio, efficace e proficuo, è solo il primo passo verso l'acquisizione delle famigerate competenze disciplinari e trasversali.

La sfida del Liceo Matematico: in risposta alla domanda «*Quali sfide si è posta la Sua scuola proponendo il Liceo Matematico come percorso di studi?*» emerge una parola chiave: *condivisione*. Quattro docenti su cinque hanno usato i verbi «collegare», «coniugare» o il sostantivo «condivisione» per l'appunto. Il loro pensiero abbia voluto proporre, nel percorso del Liceo Matematico, un'offerta formativa ampia che riesca a coniugare l'ambito umanistico e l'ambito scientifico. Come? Attraverso le lezioni interdisciplinari ci sarebbe stata una condivisione dei nuclei fondanti delle discipline: si tratta di un valore aggiunto nella formazione degli studenti ed un fattore essenziale per l'elaborazione di una idea di «cultura letteraria», una cultura della lingua e della letteratura italiana e inglese intesi come una scienza 'forte', 'dura', «non lasciata all'interpretazione soggettiva o creativa». L'attenzione è puntata dai docenti di Lettere e di Inglese sull'uso trasversale della lingua nello studio di testi centrati su argomenti scientifici e nell'acquisizione di quella microlingua che potrebbe rivelarsi utile negli studi universitari. Le loro risposte inducono una riflessione più ampia sull'uso di un "linguaggio matematico" e sulla capacità negli studenti di tradurre un problema in linguaggio matematico, sulla capacità di comprendere e spiegare le relazioni tra il linguaggio non formale del testo di un problema ed il linguaggio formale e simbolico necessario per poter rappresentare quel problema. In altre parole, si vuole fare riferimento alla capacità di *formulare matematicamente* una situazione problematica, ovvero alla «capacità di un individuo di formulare, impiegare e interpretare la matematica» (PISA, 2012, p.222): una delle capacità in cui consiste la *mathematical literacy* (OECD, 2019a). La proposta di trattare contenuti a livello interdisciplinare porta con sé la volontà di intervenire sullo sviluppo della *mathematical literacy* delle giovani generazioni, in linea con i principi generali del Liceo Matematico. Soltanto una docente ha intravisto nel Liceo Matematico un modo per *trasformare* una materia in genere poco amata - come la matematica - in qualcosa che dia piacere agli studenti, puntando più sull'aspetto affettivo che sull'aspetto delle competenze.

Obiettivi dell'insegnante e percezione del "successo" in matematica negli studenti del LM: tali categorie sono indagate mediante due domande apparentemente non correlate. In una viene chiesto cosa potrebbero percepire gli studenti del Liceo Matematico come un "successo in matematica", dal punto di vista di un insegnante; nell'altra viene chiesto quali siano i propri obiettivi di insegnamento verso la classe in questione, cioè le conoscenze, capacità ed abilità che lo studente dovrebbe aver sviluppato nel corso dell'anno. Le domande sono state poste per verificare se qualche obiettivo di insegnamento fosse legato, in qualche modo, alla percezione negli studenti di "avere successo" in matematica. È accaduto per un obiettivo in particolare, tra quelli presentati: far interagire gli insegnamenti e, di conseguenza, guidare l'alunno o l'alunna affinché sappia cogliere delle relazioni tra la matematica ed altri ambiti disciplinari. Non si tratta solo del loro principale obiettivo d'insegnamento, ma questo sarebbe anche uno dei fattori che inducono negli studenti del Liceo Matematico la percezione di avere successo in matematica. Si tratta di capire quali siano i legami della matematica con il mondo circostante e con altre discipline. Ad esempio, per la programmazione del modulo di lingua e letteratura latina, era tra gli obiettivi di insegnamento del docente far interagire l'insegnamento del latino e della storia antica con quello della matematica. Ciò si sarebbe dovuto concretizzare utilizzando un patrimonio di testi antichi di tipo tecnico, da leggere e tradurre, relativi all'arte dell'agrimensura nel mondo romano, e testi di Euclide per lasciar scoprire ai ragazzi stessi l'interazione tra il mondo della matematica applicata e il mondo del diritto romano quale parte integrante dell'agrimensura. Pur tuttavia, lo stesso docente ritiene che il concetto di "successo in matematica" e, in generale, di successo formativo sia ancora prematuro per studenti del primo anno. Ad ogni modo, questo approccio di tipo interdisciplinare potrebbe potenziare le conoscenze degli alunni ad ampio raggio, aiutarli a sviluppare la capacità di cogliere legami tra più discipline e, in ultimo ma non meno importante, aiutare a consolidare un metodo di studio proficuo. È importante sottolineare che, secondo quanto emerso dall'analisi delle risposte fornite, l'esperienza del Liceo Matematico avrebbe portato gli studenti a comprendere il ruolo del linguaggio nell'apprendimento della matematica: il linguaggio dei problemi, il linguaggio simbolico e iconico, il linguaggio verbale. Ciascuna forma di linguaggio interviene nei processi di comunicazione e di formulazione del pensiero, processi strettamente correlati, come confermato in altre ricerche (Capone et al., 2020; Ferrari, 2004). Una docente solamente ha fatto riferimento al personale docente oltre che agli studenti, vedendo nelle lezioni interdisciplinari un'occasione per affinare metodologie più attinenti all'indirizzo di studi o sperimentarne di nuove, migliorando il proprio modo di insegnare. Riguardo alla percezione di "avere successo in matematica" negli studenti, secondo tre degli intervistati essa sarebbe legata principalmente alla valutazione scolastica. Per le altre due docenti il "successo" emerge nel «saper fare» delle cose rispetto ad altre classi, nell'approfondire alcuni contenuti, nell'affinare alcune abilità in matematica e nello sperimentare, in situazioni concrete, ciò che studiano. Tutto ciò si ritiene abbia influenzato l'atteggiamento degli alunni verso la matematica, dal momento che hanno potuto comprendere, seppur in minima parte, l'utilità della matematica nella vita di tutti i giorni e sperimentato il piacere di conoscere qualcosa di nuovo in materia, potenziando quelle che sono state definite come regolazione identificata e regolazione intrinseca. La categoria della variabile "successo" che fa riferimento allo sperimentare ciò che si studia in matematica nei contesti di realtà, durante le lezioni interdisciplinari, è certamente legata alla motivazione di effectance (White, 1959), ovvero alla motivazione intrinseca di controllare l'ambiente circostante allo scopo di sentirsi efficaci e competenti. Ciò è confermato da studi più recenti (Ryan & Deci, 2000) secondo i quali il soddisfacimento del bisogno di sentirsi competente, del bisogno di agire in autonomia favorisce un comportamento intrinsecamente motivato ed intensifica quella naturale tendenza dell'uomo a coniugare le proprie responsabilità con i valori dell'ambiente sociale.

Collaborazione tra i docenti di uno stesso dipartimento e tra i docenti di diversi dipartimenti: è stato chiesto ai docenti se avessero collaborato in passato con colleghi (non necessariamente dello stesso dipartimento) per co-pianificare delle lezioni o per co-insegnare, quali benefici avessero ricevuto dalla collaborazione con i colleghi del proprio dipartimento o di altri dipartimenti durante l'esperienza del Liceo Matematico, quali benefici avrebbero potuto ricevere gli studenti da tale collaborazione e come quest'ultima abbia potuto influenzare l'atteggiamento degli studenti verso la matematica. Tutti gli intervistati avevano già collaborato con dei colleghi per co-progettare percorsi interdisciplinari (Matematica e Inglese/Scienze/Fisica, Inglese e Scienze, Latino e Fisica) e qualcuno ha riferito anche di progettare nel frattempo un percorso interdisciplinare da svolgersi durante l'anno scolastico successivo. In particolare, le tre docenti di Matematica avevano avuto altre occasioni per co-progettare delle lezioni di Matematica e Inglese con la docente di Inglese del gruppo e co-insegnare (con metodologia CLIL), a seguito di una iniziativa del tutto spontanea. In fase di pianificazione delle attività è intervenuto l'intero consiglio di classe, per cui tutti hanno beneficiato della collaborazione con i colleghi nello scambio di opinioni, nella condivisione di metodologie di insegnamento e naturalmente nell'ampliamento delle tematiche affrontabili. A livello di dipartimento, la collaborazione tra le docenti di matematica ha visto una collaborazione ulteriore nella co-docenza tra due di loro o tutte e tre. Questo ha fatto emergere una pluralità, una ricchezza di approcci didattici verso le attività pianificate e di approcci affettivo-disciplinari verso la classe, riuscendo a raggiungere anche gli studenti più restii a lavorare in gruppo. Gli approcci didattici, i metodi, le conoscenze si sono integrati, in verità, su più livelli, in un climax ascendente: a livello multidisciplinare, nell'unire le voci provenienti dalle singole discipline mantenendole distinte (Bakthin, 1981); a livello pluridisciplinare, prendendo in prestito le lenti offerte da ciascuna discipline per applicarle a problemi condivisi con altre discipline (Ignjatovic, 2020; Repko, 2008); a livello interdisciplinare, in modo da applicare pratiche caratteristiche di una disciplina in altre e favorire l'interconnessione tra domini di conoscenza diversi (Repko, 2007); a livello transdisciplinare, organizzando l'insegnamento e apprendimento intorno ad un tema di realtà (UNESCO, 2013) piuttosto che entro i confini di questa o di quella disciplina, operando una sintesi globale di oggetti e contenuti disciplinari (Lattuca, 2001; Klein, 2010). Una nota positiva alle loro risposte sta anche nel fatto che il Liceo Matematico ha favorito lo sviluppo professionale di ognuna ed ha ravvivato l'interesse per la disciplina mediante il confronto con altri colleghi che nutrono passione per l'insegnamento della matematica. Riflessioni egualmente interessanti sono emerse sulla collaborazione tra colleghi di dipartimenti diversi, collaborazione che in parte già esisteva e che il Liceo Matematico ha consolidato. Riguardo ai benefici che i docenti stessi hanno ricevuto dalla didattica collaborativa, tutti hanno ritenuto quest'ultima proficua, per diverse ragioni. Le risposte sono state categorizzate in *didattica interdisciplinare*, *ampliamento tematiche affrontabili* e *valorizzazione.* Nella prima categoria rientra la gran parte delle risposte, delle quali ne cito soltanto una, estratta dalle interviste trascritte:

> G. [la didattica collaborativa nel consiglio di classe ha permesso] *[...]di sottolineare la visione pluridisciplinare quindi [...] di vedere come quello che quotidianamente facciamo, nella nostra pratica didattica, possa intersecarsi con altre discipline sia dal punto di vista dei contenuti ma, soprattutto, secondo me, dal punto di vista del metodo. [...] L'interdisciplinarità diventa più complicata perché c'è la condivisione dei metodi, per dare proprio ai ragazzi la possibilità di vedere il sapere come unitario e non "parcellizzato" nelle varie discipline.*

Questa riflessione evidenzia come il Liceo Matematico sia di fatto una valida proposta per superare la concezione comune che il sapere sia «parcellizzato» (Capone et al., 2017), appunto, in tante discipline, divise da muri immaginari che l'umanità stessa ha edificato nei secoli. Nella parte che qui non è riportata la docente evidenzia quanto sia difficile creare dei percorsi interdisciplinari piuttosto che percorsi multidisciplinari, in quanto i primi comportano necessariamente in primo luogo un ampliamento delle conoscenze possedute, in secondo luogo una condivisione dei metodi di insegnamento-apprendimento che apre lo sguardo verso «nuove prassi didattiche», verso nuovi orizzonti culturali. Da ciò non può che derivarne uno sviluppo professionale sul piano educativo e su quello formativo.

Secondo due docenti, la didattica collaborativa tra docenti di diversi dipartimenti è stata proficua anche perché ha permesso di ampliare le conoscenze di ognuno (ad esempio, la microlingua inglese riferita alle operazioni di calcolo e alle unità di misura), di ampliare «le tematiche affrontabili ed esperibili nella pratica quotidiana» e «di capire la spendibilità di quello che si fa», attraverso un confronto continuo e costruttivo. Ciò conferma l'ipotesi di Bakthin (1981) secondo il quale in contesti transdisciplinari emerge un fattore importante che è la conoscenza metadisciplinare, ossia la conoscenza della natura propria di ogni disciplina e del modo in cui si relaziona con le altre. Tale fattore è anche, secondo Bakthin (1981), un requisito basilare per aprire un dialogo efficace tra le discipline. Come diretta conseguenza, essi hanno visto valorizzato il proprio lavoro e quello altrui, come afferma una docente:

> B. *Riesci ad apprezzare anche il lavoro altrui, lo riesci a valorizzare e sai che anche il tuo lavoro può essere valorizzato nell'ottica di una progettazione comune e interdisciplinare.*

Riguardo ai possibili benefici che gli studenti abbiano ricevuto grazie alla didattica collaborativa, le risposte hanno fatto perlopiù riferimento all'avere «imparato a guardare al consiglio di classe come un organismo comunitario» che progetta e lavora per la crescita formativa e umana della classe, e poi ancora all'avere sperimentato una integrazione tra stili di insegnamento-apprendimento, dunque tra le discipline stesse, favorendo l'acquisizione di «un metodo di studio che sia valido trasversalmente». Si potrebbe aggiungere che l'adozione di un approccio di apprendimento integrativo sembra aver reso, limitatamente al caso di studio, efficace il processo di apprendimento (Ignjatovic, 2020). Emerge anche l'opinione che questi percorsi pluridisciplinari diano la possibilità di vedere le discipline scientifiche in modo diverso, meno ancorate allo sviluppo delle abilità di calcolo e di analisi e applicate ai più svariati contesti di realtà, nel passato o nel presente. Come conseguenza, la matematica ne è uscita più prossima alle altre discipline, ritornando alla sua essenza nella Grecia antica quale sapere intrecciato con la Filosofia, l'Astronomia, l'alchimia, la Storia. La matematica, sottolinea un docente, non è infatti un «contenitore chiuso», piuttosto si potrebbe dire che è uno dei colori della tavolozza del pittore, i colori della conoscenza che, opportunamente 'mescolati', possono dar vita ad un quadro unico. Con questa metafora si vuole esprimere il fatto che il Liceo Matematico ha contribuito in modo significativo, secondo il campione che ha partecipato all'indagine, alla creazione di una certa «apertura mentale» negli studenti: ha ampliato la loro visione del mondo e non solo. Una parte dei docenti intervistati ritiene che i percorsi del LM abbiano modificato la loro *visione della matematica* (come anche della Fisica) nel senso che gli studenti hanno potuto vedere la matematica (e la Fisica) non più fine a sé stessa, ma «inserita nel mondo che li circonda». In tal senso, un approccio interdisciplinare all'educazione matematica la porta a muoversi in uno spazio problematico che supera i confini disciplinari e abbraccia la complessità del reale. Dal mondo esterno esso accoglie pratiche discorsive e problemi sempre più multiformi per risolvere i quali interagisce con altre discipline secondo diversi livelli di complessità. In questa interrelazione è possibile comprendere temi che attraversano più discipline, più epoche e più quesiti, per giungere a presentare alle giovani menti una conoscenza interconnessa, quale miglior riflesso della complessità del mondo attuale, come suggerisce l'OCSE (OECD, 2019b). L'approccio interdisciplinare all'educazione matematica, pertanto, riceve e al contempo offre al mondo esterno un valore aggiunto (Williams & Roth, 2019) che la sola educazione matematica o, per meglio dire, la sola conoscenza disciplinare della materia, non avrebbe altrimenti. Qualcun altro ha fatto riferimento alle competenze acquisite nell'uso di una parte di microlingua inglese. Mantenendo il focus sugli alunni, è stato anche chiesto «Secondo Lei, come può la collaborazione tra i docenti influenzare l'atteggiamento degli studenti verso la matematica?». Tutti i docenti ritengono che possa influenzarlo positivamente, renderlo «più aperto», riferendosi però anche a concetti affini all'*atteggiamento verso la matematica*, ovvero la *visione della matematica* e l'*utilità della matematica* (nella vita di tutti i giorni). Tale collaborazione ha contribuito a «vedere» la matematica come una disciplina non separata dalle altre né lontana dai contesti reali, ma come una disciplina «capace di permeare tutte le altre». Difatti, il Liceo Matematico ha dato agli studenti l'opportunità di «vedere» quanta matematica fanno senza accorgersene e come la matematica si ritrovi in situazioni comuni, nella vita di tutti i giorni. Al contempo – osserva una docente – ha dato ai docenti l'opportunità di sperimentare tutto ciò insieme ad altri colleghi, attraverso pratiche didattiche atipiche e opportunamente progettate in gruppo. Ad esempio, durante il modulo di Statistica, si è potuto notare quanto «il linguaggio della Statistica e il linguaggio della Teoria degli errori in Fisica siano strettamente legati: uno stesso termine è stato usato in ambiti differenti, dando sfaccettature differenti però facendo vedere che il concetto è sempre lo stesso.» Questo è stato notato, ad esempio, con i concetti di *dispersione*, di *errore* o di *valore medio*. Il concetto di *valore medio* è usato in ambito statistico col significato di migliore stima del valore vero di una variabile, in ambito fisico col significato di valore medio di una grandezza fisica. Si tratta di significati molto prossimi tra loro, pur trattandosi di discipline ben distinte. Qui è evidente ciò che Bakthin (1981) intende per multidisciplinarità, ovvero la comunicazione efficace tra due o più discipline che parlano linguaggi differenti; pur mantenendo distinti i generi di linguaggio e le voci provenienti dalle discipline, si ricorre parzialmente al linguaggio parlato da "altri" in vista di un motivo comune che è rappresentano dalla comprensione del significato di un enunciato. Di seguito, si riportano alcune risposte degli stessi docenti:

> P. *Penso che alla fine l'atteggiamento degli alunni verso la matematica dovrebbe essere più aperto, non considerandola soltanto come una disciplina "chiusa" ma come una disciplina capace di permeare tutte le altre, esattamente come dovrebbe avvenire per la linguistica che è una disciplina assolutamente trasversale a qualunque insegnamento.*

> G. *Intanto può dare l'idea dell'unitarietà del sapere e poi chiaramente loro possono vedere la matematica da diversi punti di vista in ambiti in cui magari, in genere, non è così facile "vedere" la matematica. [...]*

> D. *Penso che possano capire che tutto il mondo è matematico e la matematica entra ovunque, nella vita di tutti i giorni, nella storia, nella storia del pensiero. Penso che possano capire l'importanza della matematica come fondamento della nostra società.*

È interessante rilevare come le ultime riflessioni commentate riassumano bene gli aspetti teorici che hanno fatto da sfondo all'analisi condotta. Il Liceo Matematico a cui si riferiscono gli intervistati avrebbe consentito agli studenti da un lato di riconoscere la separazione della matematica dal suo uso in un sistema produttivo più ampio, in problematiche di vita quotidiana (*Activity Theory*); dall'altro di avvicinare la matematica ad altri generi di linguaggio e pratiche discorsive (prospettiva di Bakthin). L'oggetto/motivo comune alle discipline coinvolte nella formazione degli studenti si potrebbe rintracciare proprio nella conoscenza degli studenti, una conoscenza che è (o si auspica che sia) al contempo disciplinare, interdisciplinare, epistemica e procedurale (OECD, 2019b, p.4). Si ricorda che la prima consiste si ritrova nella conoscenza di quegli oggetti e contenuti specifici di ogni materia; la seconda, mette in relazione più discipline/soggetti e può essere concretizzata nell'identificare dei punti di connessione tra più materie, integrare concetti, contenuti, approcci e prospettive; la conoscenza epistemica aiuta gli studenti a comprendere meglio una disciplina, a capire perché la si apprende e come la si può applicare in ambito professionale, indagando come i professionisti di un dato settore (o di una data disciplina) pensano e lavorano; la conoscenza procedurale riguarda in ultimo come lavorare e imparare attraverso processi strutturati; essa è particolarmente utile per individuare soluzioni per problemi complessi nel sempre più complesso, sfaccettato mondo contemporaneo.

Sulla base di quanto rilevato nella Fase 3, si può affermare che gli obiettivi di insegnamento siano stati pienamente raggiunti, almeno per una parte consistente degli studenti intervistati. Questo conferisce inoltre maggior valore agli strumenti di analisi utilizzati in quanto hanno permesso di evidenziare aspetti similari della motivazione intrinseca e identificata negli studenti del Liceo Matematico.

A chiusura di questa sezione, viene chiesto di esprimere eventuali riflessioni sulle ricadute (percepite o sperate) delle «lezioni interdisciplinari» del Liceo Matematico, sia sui docenti che hanno partecipato a tale forma di didattica collaborativa, sia sugli studenti del Liceo Matematico. Il docente di Lettere, non avendo fatto alcuna co-docenza, si è espresso in riferimento alla co-progettazione evidenziando come dall'esperienza del Liceo Matematico sia nata tra i docenti della scuola una disponibilità al dialogo che non ha precedenti. In merito alle possibili ricadute in futuro sugli studenti, si è espresso in questi termini:

> P. *Spero che nasca appunto quell'attitudine di curiosità e la presenza di quegli strumenti concettuali che possono essere applicati indistintamente a tutte le discipline, voglio dire la capacità di leggere le strutture profonde, la capacità di utilizzare i dati in maniera da migliorare le competenze, per esempio le competenze di lettura di una serie di eventi, individuando cause ed effetti […] e quelle che nella Storia si chiamano strutture profonde nel tempo.*

Non è di poco conto la riflessione portata avanti dal docente P., che racchiude in sé la speranza che il Liceo Matematico dia vita ad una *curiositas* ad ampio respiro, un desiderio di conoscenza che abbraccia aree diverse. Il Liceo Matematico vuole proprio formare in tal senso i cittadini di domani, far sì che essi possano meglio comprendere la realtà ed intervenire su quest'ultima (Capone et al., 2017). Una docente di Matematica, proveniente dal corso di laurea in Statistica, ha affermato di aver avuto un beneficio formativo dall'esperienza del Liceo Matematico e che l'aspetto probabilmente più interessante per la classe è stato quello di poter apprendere la matematica sperimentando il dialogo interdisciplinare che costituisce l'essenza del Liceo Matematico stesso (Capone et al., 2017). Questo dialogo interdisciplinare si attua in orizzontale tra gli studenti e in verticale tra studenti e insegnanti ed è stato registrato anche in altri studi (Carullo et al., 2019). Un'altra docente di Matematica ha affermato di essere rimasta colpita dall'attenzione, dalla partecipazione e dalla motivazione ad apprendere la matematica nella classe considerata, fattore che ha suscitato in lei una spinta ad incrementare le proprie conoscenze e a fare sempre di meglio. La docente di Matematica e Fisica ha osservato solamente una certa incongruenza tra quanto la scuola possa offrire e la riduzione costante dei fondi ad essa dedicati, lamentando le opportunità mancate per molti studenti. La docente di Inglese, infine, ha sostenuto invece che, al termine del percorso del Liceo Matematico, gli studenti avrebbero capito «se sono veramente tagliati» per il Liceo Scientifico oppure no. Si pensa che questa riflessione sia emersa alla luce delle risposte precedenti e dell'importanza di saper vedere o creare dei nessi tra argomenti di varia natura, tra discipline differenti, tra lingue lontane nel tempo e nello spazio.

Contenuti, obiettivi, strumenti, metodologie, feedback ed eventuali modifiche: nell'anno scolastico in esame è stato co-progettato dal consiglio di classe ed è stato sviluppato un singolo modulo, centrato sul tema della *misura*. La parte realizzata al momento dell'intervista includeva essenzialmente lo sviluppo del tema in Statistica, con approfondimento della nomenclatura matematica (numeri, operazioni, espressioni matematiche) nella lingua inglese. Dopo alcune necessarie premesse su cos'è la Statistica e di cosa si occupa, si sono soffermati sulle applicazioni della Statistica alle scienze sperimentali e, in particolare, alla Fisica. È stata realizzata una raccolta dati, la tabulazione degli stessi e rappresentazioni grafiche dei dati raccolti (alcune non affatto banali, quali il diagramma ramo-foglia ed il box-plot), usando gli strumenti "Excel" ed "R" come tecnologie didattiche utili ai fini dell'apprendimento. Durante la parte di Statistica, pertanto, si è lavorato molto in aula informatica, con l'ausilio di software opportuni ma anche confrontando i risultati ottenuti con quelli costruiti manualmente (in riferimento al box-plot, realizzato sia manualmente sia con il software 'R'). Il consiglio ha scelto anche di usare degli artefatti quali anagrammi e crossword, per mezzo dei quali realizzare delle attività in piccoli gruppi, ed un doodle col quale fare una verifica finale partecipata da tutto il gruppo classe.

Le lezioni, per questa parte del modulo, sono state perlopiù partecipate, improntate al dialogo continuo con la classe, talvolta aperte con un brainstorming per cogliere l'attenzione della classe ed introdurre un argomento nuovo a partire dalle loro conoscenze o dalle loro convinzioni. Durante le lezioni, i docenti hanno spesso usufruito dello strumento didattico della LIM (di cui la scuola era ampiamente fornita) per proiettare i contenuti introduttivi alle lezioni e svolgere esercizi interattivi con la classe. Il modulo CLIL, sperimentato qualche anno prima con un'altra classe dello stesso grado, puntava a rinforzare la conoscenza di alcuni contenuti di base inerenti alla scrittura e la lettura dei numeri (naturali, interi, razionali, reali) in inglese e la trascrizione di espressioni matematica a partire dall'inglese e la "traduzione" di espressioni matematiche dalla "lingua matematica" in lingua inglese. Gli obiettivi erano strettamente legati all'uso della lingua inglese, ma si può ben dire che non potevano prescindere dalle abilità di calcolo e di espressione matematiche: i docenti puntavano a migliorare l'espressione dei concetti basilari di numerazione in italiano e in inglese. Per potenziare le abilità cognitive, sono stati comunque realizzati esercizi di vario genere (fill in the gaps, quadrati magici, …), in forma individuale e in piccoli gruppi. La LIM è stata usata in questa parte CLIL per proiettare mappe concettuali, svolgere esercizi interattivi e, seppur con qualche problema tecnico, svolgere attività di listening. Al termine del percorso interdisciplinare, gli studenti avrebbero dovuto presentare in piccoli gruppi un argomento a scelta, trattato durante il Liceo Matematico e approfondito nel corso dell'anno scolastico mediante ricerche testuali; la presentazione sarebbe stata un momento di condivisione con l'intera classe di quanto appreso su una tematica che li aveva particolarmente incuriositi e stimolati.

L'ultima parte, che non è stata realizzata per ragioni di tempo, riguarda il concetto di misura nell'antichità e nelle scienze sperimentali, l'agrimensura e gli strumenti di misurazione antichi: la diodra - una sorta di goniometro ripetitore -, il tetrante – una squadra usata per il tracciamento di perpendicolari, la groma e lo gnomone per misurare i terreni, e tanti altri. In fase di co-programmazione, il consiglio aveva scelto di introdurre questa parte con una lezione frontale in cui conoscere il sistema metrico romano, e di lasciare più spazio ai lavori di gruppo nei quali gli studenti avrebbero dovuto utilizzare le tecniche implicite nei testi per costruire alcuni strumenti semplici (ad es., la groma), progettare un accampamento militare usando un software didattico e costruire un piccolo accampamento con gli oggetti teorici e con gli oggetti concreti creati dalla classe. Ad esempio, nel sistema metrico romano un numero può essere pensato come la somma di altri ma anche come una somma di misure di superfici diverse che, messe insieme, rappresentano la configurazione di un dato territorio.

Riguardo ai feedback degli studenti, gli intervistati che hanno condotto le lezioni hanno notato un vivo interesse da parte loro durante lo svolgimento del modulo, con richieste di approfondimento degli argomenti trattati ed uno studio autonomo autoregolato (dal momento che non venivano attribuite delle valutazioni, la voglia di apprendere è stata evidentemente mossa da un'autoregolazione interna e, pertanto, da una motivazione intrinseca, legata al piacere di aver appreso qualcosa di nuovo). Questo risultato si discosta da quanto rilevato in un precedente caso di studio sull'uso della Storia della Matematica in classe (Lim & Chapman, 2015b): nello studio sperimentale, condotto con circa un centinaio di studenti di grado 11, le ricadute affettive dell'approccio adottato sono state solo minime, a fronte di risultati più significativi in termini di apprendimento e competenze acquisite. Qualcuno ha messo in evidenza il fatto che gli studenti (e in realtà, anche gli stessi docenti) si fossero divertiti: gli studenti erano coinvolti, realmente partecipi e incuriositi tanto dai contenuti nuovi, assenti nel curriculum del percorso di studi che avevano scelto, quanto dalle metodologie adottate che hanno portato ciascuno a "scoprire" qualcosa di più della matematica. Ciò è coerente con quanto emerso nella Fase 3. Si è visto, difatti, come la componente del "piacere", del "divertimento" sia stata rilevata e apprezzata da un elevato numero di studenti, specialmente all'interno della dimensione del gioco (si pensi alle attività come la codifica/decodifica di un codice cifrato, al "Gioco del 20", agli scacchi). A titolo esemplificativo, si riporta qui una risposta (solo in parte):

> G. *In termini di partecipazione e di interesse è stato notevole, perché le lezioni sono state realmente molto partecipate: molti sono stati gli interventi durante le lezioni e i ragazzi sono stati interessati e coinvolti. Su questo non c'è alcun dubbio.*

Quanto agli obiettivi raggiunti, in merito alla parte di CLIL, le docenti ritengono di averli pienamente raggiunti. Nello specifico, le docenti interessate hanno notato quanto sia stata responsabile e partecipata l'interazione tra gli alunni nello svolgimento degli esercizi di listening e di talking in lingua inglese. Riguardo alla parte di Statistica, al momento dell'intervista non era stato ancora somministrato un questionario in uscita, per cui i docenti non si sono espressi. È doveroso riportare le osservazioni di una docente sulla ricaduta quotidiana della didattica collaborativa nel lavoro svolto da ognuno di loro, ciascuno nella propria disciplina. La docente ha affermato che questo tipo di approccio interdisciplinare dovrebbe porsi come obiettivo ultimo quello di sviluppare nello studente «la capacità di cogliere, in maniera autonoma, relazioni e nessi laddove queste relazioni e questi nessi non gli vengono presentati, non sono esplicitate a priori dall'esterno».

CAPITOLO VII

Conclusioni

La ricerca sull'educazione matematica degli ultimi decenni ha visto una rapida evoluzione dei temi e dei contenuti di indagine, in parte dovuta a contributi teorici (come elaborazione di precedenti o nuovi quadri di ricerca), in parte dovuta a contributi legati a casi di studio o sperimentazioni didattiche. Alcuni degli aspetti attorno ai quali ruota la ricerca in Didattica della Matematica sono gli aspetti affettivi e gli aspetti cognitivi, considerati quali componenti dei processi di insegnamento e apprendimento della matematica (e non solo) in interrelazione fra di loro. Secondo alcuni studi (Turner et al., 1998; Malmivuori, 2007; Hannula, 2006), tale relazione è veicolata dalle emozioni provate dall'individuo; Rosetta Zan e altri sostengono, ad esempio, che le emozioni condizionano l'attenzione e la memoria (Zan et al., 2006). Gli aspetti affettivi (es. appassionare gli studenti alla disciplina) e cognitivi (es. sviluppare un pensiero critico) emergono anche nella definizione degli obiettivi di insegnamento-apprendimento della matematica perseguiti da docenti in servizio impegnati in differenti livelli scolari (Di Martino, 2017). Proprio agli insegnanti il filosofo Edgar Morin (2000) assegna un'importante missione sociale: quella di formare delle «teste ben fatte», anziché delle «teste ben piene», ossia di formare donne e uomini che abbiano «un'attitudine generale a porre e a trattare i problemi», e che dispongano di «princìpi organizzatori che permettano di collegare i saperi e dare loro un senso» (Morin, 2000, p.15). Nel suo saggio, Morin (2000) lamenta, difatti, una forte disgregazione tra i saperi e, in particolare, tra i cosiddetti saperi scientifici e quelli umanistici, auspicando una «riforma del pensiero» grazie alla quale sarebbe possibile riformare le menti, la società, l'insegnamento e, quindi, ricongiungere «le due culture disgiunte» (Morin, 2000, p.13). Una delle sfide più cruciali e difficili che gli insegnanti si trovano ad affrontare è poi quella di motivare (dal latino *movere*, mettere in movimento) gli studenti ad imparare (Ligorio & Cacciamani, 2013). Interesse, motivazione e valori sono tutti nodi connessi alla dimensione motivazionale, una delle tre dimensioni in cui Hannula (2012) classifica le teorie sull'affect legato alla matematica. Il costrutto della motivazione è stato declinato in differenti modi nel tempo e, come altri costrutti legati alla dimensione affettiva quali *beliefs, emotions, attitudes* (McLeod, 1992), il suo significato è inevitabilmente mutato nel passare dal ramo scientifico ove è nato (la Psicologia dell'Educazione, la Psicologia cognitiva, le Neuroscienze) alla didattica disciplinare.

Alcuni modelli teorici sulla motivazione si possono ritrovare in un importante lavoro di Ligorio e Cacciamani (Ligorio & Cacciamani, 2013). Qui si mettono in evidenza fattori diversi che possono intervenire nel motivare un individuo, a seconda della matrice teorica alla quale si fa riferimento. Le teorie comportamentiste sono basate sui *bisogni*: le azioni sarebbero il risultato di pressioni esterne o di bisogni -relativamente generali- percepiti all'interno della persona. Nel modello cognitivista l'attenzione si sposta dai bisogni agli *obiettivi* in funzione dei quali l'individuo dirige il proprio comportamento verso un risultato atteso e dà così un senso alle proprie azioni. Altre ancora, spostano il focus sulle *convinzioni* della persona circa la propria intelligenza, la percezione di autoefficacia (che si sperimenta, ad esempio, in esperienze di padronanza nelle quali il soggetto attribuisce il proprio successo a fattori interni) (Bandura, 1994) e tutto ciò che costituisce il motivo di un proprio successo o fallimento; si tratta di aspetti che possono influenzare la scelta di un dato compito e il grado di coinvolgimento della persona. Una prima distinzione, riguardo alle teorie sulla motivazione, riguarda dunque i motivi e gli obiettivi: i primi sono legati a bisogni o desideri provati e spiegano il perché la persona sta agendo in un certo modo; i secondi indicano invece la direzione verso la quale si sta muovendo l'individuo e la qualità del coinvolgimento in specifiche situazioni (Ligorio & Cacciamani, 2013). Secondo Hannula (2006), ad esempio, la motivazione di un individuo consiste nella capacità di regolare il proprio comportamento; tale capacità è «strutturata secondo bisogni e obiettivi» ed è in legame diretto con le emozioni prova (Hannula, 2006, p.175, trad.). Le emozioni (e così anche la motivazione) sono osservabili solo parzialmente, attraverso il linguaggio del corpo o le espressioni del viso mentre il soggetto si trova in una data situazione. Esse si manifestano con gioia, soddisfazione, interesse e altre emozioni positive quando la situazione è motivante per la persona; con emozioni negative quali tristezza, rabbia, frustrazione nel caso opposto (Hannula, 2006). Da questo punto di vista, il comportamento costituisce una manifestazione attendibile della motivazione di un individuo. Un'ulteriore distinzione rintracciata nella letteratura sussiste tra motivazione *intrinseca* e motivazione *estrinseca* (Middleton & Spanias, 1999). Se la motivazione intrinseca è legata al fatto che ci si impegna in un'attività per il piacere di farlo, perché interessati a quell'attività indipendentemente dal fatto di poter ricevere un riconoscimento esterno, la motivazione estrinseca è invece legata a pressioni provenienti dall'esterno (ad esempio, dagli adulti di riferimento), ad un vantaggio personale (ad esempio, lo sviluppo di competenze utili ai fini lavorativi) o un premio. Il concetto di motivazione intrinseca può sembrare un tentativo di coniugare l'idea che le persone siano guidate dal voler soddisfare dei bisogni/desideri con l'idea che esse si impegnano in un'attività perché vogliono farlo, non perché ne sentano il bisogno (Ligorio & Cacciamani, 2013). Molti ricercatori concordano tuttavia nel ritenere che alla base di una motivazione intrinseca risieda la possibilità stessa di scegliere l'attività a cui partecipare o il compito da svolgere. Skinner e altri (Skinner et al., 2009) parlano di *risultati motivazionali* per indicare quelle azioni intenzionali in cui la motivazione di un soggetto si manifesta, prende forma a partire da stimoli esterni al soggetto stesso. Si parla di *engagement* quando si intraprende un'azione motivata, diretta verso un obiettivo ben preciso, e quando la si persegue anche dinanzi ad ostacoli o difficoltà (Skinner et al., 2009). Si parla di *disaffection* quando invece si manifestano passività, riluttanza, disattenzione, tristezza, autocommiserazione, noia e altre emozioni negative (Skinner et al., 2009). La tendenza alla dicotomia sopra menzionata è stata superata da quelle teorie che hanno visto la possibilità di passare da una condizione di motivazione estrinseca (in cui il comportamento della persona è controllato da fattori esterni alla persona) ad una condizione di motivazione intrinseca (in cui invece il comportamento della persona è autoregolato o autocontrollato).

Nel presente lavoro di tesi viene discusso il modello teorico di Edward Deci e Richard Ryan (Deci e Ryan, 1985; Ryan & Deci, 2000) che rappresenta un anello di congiunzione tra le teorie degli obiettivi e quelle sui bisogni della persona: la teoria dell'autodeterminazione. Gli autori ritengono che, per ottenere una piena comprensione dei comportamenti diretti verso un obiettivo e, più in generale, del benessere di una persona, sia necessario riferirsi ai bisogni fondamentali di quella persona; essi conferiscono agli obiettivi una connotazione psicologica e guidano un comportamento autoregolato o autodeterminato (Ligorio & Cacciamani, 2013). La teoria si basa infatti sull'assunto che un comportamento diretto verso un obiettivo è influenzato dai bisogni che accomunano tutti gli esseri viventi e che gli autori stessi definiscono "innati" (Ryan & Deci, 2000, p.68). Sono il bisogno di autonomia, il bisogno di competenza e il bisogno di interazione sociale (Baumeister & Leary, 1995; Hannula, 2006; Ryan & Deci, 2000). Il bisogno di autonomia tende ad orientare il comportamento verso obiettivi autodeterminati, secondo azioni scelte personalmente: si rivela, ad esempio, nell'allievo che è motivato perché può scegliere il problema su cui lavorare, le fonti da consultare e le modalità con cui presentare il frutto del suo lavoro ai compagni e al docente. Il bisogno di competenza si rileva in quanti perseguono obiettivi legati all'acquisizione di competenze utili a comprendere e manipolare la realtà: un esempio lo si può facilmente trovare negli studenti che si impegnano a svolgere un compito perché vogliono diventare un giorno dei professionisti in un dato settore. Il bisogno di interazione sociale è in ultimo la tendenza a scegliere quelle situazioni in cui si lavora insieme ad uno o più partner e si può sperimentare il senso di appartenenza ad un gruppo. Il soddisfacimento di questi tre bisogni è, nella teoria sopracitata, la condizione basilare affinché un individuo si impegni liberamente in un'attività autodeterminata, indipendentemente dagli obiettivi che in seguito vorrà raggiungere (Deci & Ryan, 1985). Essere autodeterminati è, nella SDT (*Self-Determination Theory),* la libertà di scegliere quei comportamenti che differenziano principalmente la motivazione intrinseca dalla motivazione estrinseca.

Nella versione successiva di tale teoria (Ryan & Deci, 2000) gli autori descrivono il possibile sviluppo dell'autodeterminazione di un individuo, sviluppo che dipende dal grado di interiorizzazione dei valori e delle norme comportamentali. In tal senso, la motivazione può essere categorizzata in termini di forme, ma anche lungo un continuum di autodeterminazione, che va dall'amotivazione (cioè, uno stato privo di motivazione) alla motivazione controllata, e alla motivazione autonoma (Deci & Ryan, 1985; Ryan & Deci, 2000). Il punto iniziale consiste nell'assenza di motivazione (*amotivation*): una condizione in cui non si percepisce alcun controllo interno né libertà di scelta delle attività in cui impegnarsi, con conseguente ininfluenza delle esperienze fallimentari o di successo sulla percezione di sé. Quattro diverse forme di regolazione ricadono nella categoria della regolazione estrinseca. Una prima forma di *regolazione* del proprio comportamento è quella *esterna*, mossa da vincoli, pressioni, ricompense o punizioni provenienti dall'esterno (è questo il caso dello studente che svolge i compiti assegnati in vista di una ricompensa da parte del docente o perché teme di ricevere una punizione). Si tratta di una motivazione che nasce con una bassa internalizzazione dei valori e delle norme comportamentali. Le ragioni di un comportamento sono riconosciute ma interamente associate ad un *perceived locus of causality* (PLOC) esterno. Le persone tendono, di conseguenza, a percepire meno scelte libere a fronte di pressioni esterne alla propria persona (ad esempio, le aspettative degli altri) e si concentrano maggiormente sul raggiungimento di risultati positivi (riconoscimenti tangibili) o sull'evitare conseguenze percepite come negative (Deci & Ryan, 1985; Ryan & Deci, 2000). Il successivo livello di regolazione guarda più alle emozioni provate ed è definito *regolazione introiettata*: è questa che entra in gioco quando si fa qualcosa perché si sente di doverlo fare, o perché si vuole evitare di provare emozioni quali il senso di colpa e vergogna (ad esempio, ci si potrebbe impegnare nello svolgimento dei compiti assegnati per non trovarsi impreparati ad una interrogazione). Quando il comportamento viene invece regolato perché lo si ritiene importante per sé, per i propri personali obiettivi si attribuisce consapevolmente un valore ai propri obiettivi comportamentali: si parla in tal caso di *regolazione identificata*. La forma più autodeterminata della motivazione estrinseca è la *regolazione integrata*: essa risulta dalla coesistenza e integrazione armoniosa di due opposte tendenze, quella di perseguire i valori percepiti come importanti per sé e quella di compiere azioni regolate da fattori esterni. Quando le persone accettano i valori e i regolamenti come parte del sé (elevata internalizzazione), tendono ad avere un *perceived locus of causality* interno. Esse percepiranno una maggiore autodeterminazione dei comportamenti e si concentreranno in misura maggiore sul raggiungimento dei bisogni e dei valori auto-approvati. L'ultimo livello è quello della *motivazione intrinseca* alla conoscenza, basata sul piacere della scoperta, sul piacere di superare le proprie aspettative e di sentirsi ricompensati dalle sensazioni (ad esempio, la gioia, l'eccitazione) provate. Si è visto come le esperienze sfidanti, il feedback positivo sulle prestazioni e la libertà dalla valutazione intervengono sulla percezione di competenza e, dunque, facilitano la motivazione intrinseca (Ryan & Deci, 2000). La SDT propone l'idea che le emozioni forniscono informazioni che guidano comportamenti e motivazioni di un individuo (Deci & Ryan, 1985). Per esempio, come sempre sostenuto dalla SDT, le persone saranno intrinsecamente motivate a partecipare ad attività autodeterminate che suscitano in loro sensazioni di interesse, piacere ed eccitazione. Al contrario, quando le persone rispondono automaticamente alle loro emozioni, possono produrre comportamenti non autodeterminati (Deci & Ryan, 1985). Dunque, i motivatori primari sono, nella visione di Deci e Ryan (Deci &Ryan, 1985), le esperienze interne spontanee che accompagnano il comportamento di una persona. Anche se la teoria ruota essenzialmente intorno alla motivazione intrinseca, non assegna alla motivazione estrinseca (o esterna) una connotazione necessariamente negativa (Ligorio & Cacciamani, 2013). Se la ricompensa che un'azione prefigura è in grado di stimolare la percezione di autocompetenza e di autodeterminazione, allora costituisce di fatto un contesto sociale a supporto dell'*engagement*, che favorisce l'interesse e l'impegno per lo svolgimento di un dato compito. Se invece la ricompensa è percepita come una forma di controllo esterno, l'interesse ne risulta piuttosto diminuito.

La teoria dell'autodeterminazione di Deci e Ryan (Ryan & Deci, 1986; Deci & Ryan, 2000) costituisce il principale riferimento teorico del progetto di tesi. Unitamente ad essa si è fatto riferimento ad altri quadri teorici sottesi alla teoria della motivazione intrinseca: il *Pedagigical Content Knowledge* (PCK), il *collaborative teaching*, la Teoria della Mediazione Semiotica, il laboratorio di matematica e l'interdisciplinarità. Essi costituiscono contesti didattici e formativi che possono agire a supporto dei fattori affettivi nell'apprendimento della matematica. Il PCK nasce in seno all'idea di Shulman (1986) che la conoscenza del contenuto di una materia di insegnamento e la conoscenza degli aspetti pedagogici legati al contenuto insegnato siano inscindibili. Il PCK costituisce proprio un miscuglio dei due aspetti della conoscenza, quella pedagogica e quella del contenuto, nella prassi didattica. Secondo Mishra e Koehler (Mishra & Koehler, 2006), il PCK dell'insegnante entra in gioco nel trasformare un contenuto della propria disciplina d'insegnamento, trovando esempi, analogie, dimostrazioni più efficaci e modi differenti di rappresentare quel contenuto per renderlo accessibile ad uno studente. Per fare ciò, l'insegnante dovrebbe attingere ad un'ampia "riserva" di forme di rappresentazione dei nodi concettuali della propria disciplina d'insegnamento, derivanti sia dalla pratica didattica, sia da ricerche personali. Intervenire a sostegno dello sviluppo del PCK di un docente, è secondo Shulman (1986), essenziale per un apprendimento efficace. Da una prima revisione nella letteratura (Depaepe F. et al., 2013), si evince come gli studi precedenti sul tema adottino due possibili prospettive: una “cognitiva”, secondo la quale il PCK dipende soltanto dalla formazione dei docenti; l’altra “inquadrata”, secondo la quale il PCK si può svelare nella pratica didattica e sviluppare durante la partecipazione ad attività formative in comunità professionali (discussioni di gruppo, workshop, mentoring).

Le forme di didattica collaborativa attuate in comunità professionali di docenti possono contribuire in modo significativo allo sviluppo del PCK dei docenti. È quanto dimostrato in un recente studio sperimentale (Egodawatte et al., 2011) sul PCK di una comunità di docenti impegnati nella didattica collaborativa realizzata nelle forme del *co-planning* e *co-teaching*. Dal lavoro condotto dai ricercatori, si è visto come i docenti coinvolti abbiano sensibilmente sviluppato le proprie conoscenze pedagogiche, abbiano riscontrato nella didattica collaborativa un’occasione di sviluppo professionale e al contempo abbiano raggiunto gli obiettivi curriculari fissati, con conseguente miglioramento della qualità del processo di insegnamento/apprendimento (Egodawatte et al., 2011). Alcuni fattori che rendono proficuo il *collaborative teaching* consistono nel condividere lo stesso contesto d’insegnamento (Jao & McDougall, 2016), nel mettere a disposizione risorse e pratiche didattiche (Harris et al., 2006; Muijs et al., 2010), nel perseguire obiettivi condivisi da tutti i componenti del gruppo (Lamanauskas, 2014; Muijs, 2008; Sydow, 2000). Il PCK e il *collaborative teaching* costituiscono entrambe delle opportunità di sviluppo professionale dei docenti e convergono sull’importanza della dimensione sociale dell’apprendimento, la chiave di lettura delle teorie post-costruttiviste e post-Vygotskij sviluppate intorno agli anni Novanta (Baccaglini-Frank et al., 2018). Esse hanno contribuito al superamento del modello di insegnamento «trasmissivo» delle teorie di stampo comportamentista in favore di un modello «transitivo» (Egodawatte et al., 2011), in linea con le idee costruttiviste, nel quale la relazione instaurata tra docente e alunno/a è rivalutata e valorizzata. Il modello «transitivo» è ciò che caratterizza la «Teoria della Mediazione Semiotica» (TMS), sviluppata in Italia dalle ricercatrici Bartolini Bussi e Mariotti (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009). Nella cornice teorica della TMS è possibile analizzare quelle attività didattiche che si avvalgono dell’uso di artefatti. Secondo tale teoria, la conoscenza viene costruita all’interno della comunità di apprendimento di cui fanno parte il docente e il discente: il primo svolge il ruolo di *mediatore* di un contenuto (il sapere matematico), il secondo è coinvolto in un'attività che richieda l'uso di un *artefatto* o parti di esso ed è guidato dal docente nel passaggio dai segni legati all'artefatto ai significati matematici mediati dall'artefatto stesso.

L'attività mediata dall'artefatto ed anche la tecnica del *collaborative teaching* si sposano bene in un particolare contesto didattico che è il *laboratorio*. Livia Giacardi (2011) fa risalire il germe dell'idea di laboratorio di matematica agli inizi del Novecento. Da allora, pedagogisti, didattici e matematici esperti discutono e sostengono l'introduzione di attività laboratoriali nella pratica scolastica (Sabena et al., 2019). Questa metodologia ha dunque delle radici lontane e poggia su una tradizione consolidata soprattutto nel primo ciclo di studi (Sabena et al., 2019). Il laboratorio di matematica costituisce ancora oggi un "luogo" figurato privilegiato per la costruzione di significati matematici attraverso l'esplorazione e la sperimentazione. Un luogo che coinvolge persone (studenti e insegnanti), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi) e strumenti (di stampo tradizionale o tecnologicamente avanzati) (UMI-CIIM, 2003). In qualche modo l'ambiente del laboratorio di matematica è assimilabile a quello della «bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti» (UMI-CIIM, 2003, p.26). Qui viene dato ampio spazio alle attività di problem solving (ma non solo), alla discussione matematica, alle congetture, sperimentazioni e argomentazioni, nel tentativo di favorire una costruzione di competenze personali e collettive (MIUR, 2012). Si potrebbe dire che l'alunno/a, durante il lavoro in laboratorio, veste i panni di un matematico che studia una situazione reale o un problema concreto, di cui non ha a disposizione una risoluzione immediata. Nel fare ciò, egli/ella usa strumenti concreti, integra le conoscenze e competenze di cui dispone, formula ipotesi, verifica, dimostra, generalizza, procedendo in un *continuum* che include gli aspetti teorici e pratici della matematica (Bolondi, 2006). Il laboratorio di matematica è anche una "palestra" che vuole educare le giovani generazioni a fare scelte consapevoli, a partecipare attivamente allo sviluppo economico e culturale della società e agire con senso di responsabilità (MIUR, 2018).

I documenti istituzionali più recenti del MIUR (MIUR, 2018; MIUR, 2012) sono in risonanza con questa idea di laboratorio. In essi emerge anche una prospettiva relativamente nuova di insegnamento e apprendimento della matematica: quella dell'interdisciplinarità. Negli ultimi decenni, in particolare, si è intensificato nella ricerca in Didattica della Matematica l'interesse per una didattica interdisciplinare della matematica. Alcuni studi, ne parlano in termini di approccio interdisciplinare all'insegnamento e apprendimento della matematica (Razmak & Bèlanger, 2016; Williams et al., 2016). Secondo alcuni ricercatori (Razmak & Bèlanger, 2016), un approccio interdisciplinare può facilitare il raggiungimento di una conoscenza più completa del mondo circostante. Ciò è confermato anche nel rapporto OCSE del 2019 (OECD, 2019b) sulle prospettive future dell'educazione e delle competenze. Qui si suggerisce di presentare agli studenti una conoscenza che sia già interconnessa (quindi, di presentare nel curriculum i saperi come interconnessi), in modo che possa meglio riflettere la complessità del mondo attuale e le sfide che esso pone alle future generazioni. I sistemi educativi mondiali –si legge nel rapporto OCSE su citato- guardano con vivo interesse verso la comprensione delle discipline come sistemi interconnessi anziché distinti, svincolati gli uni dagli altri (OECD, 2019b). In ambito educativo, si è cercato di promuovere, in senso più generale, un approccio di apprendimento integrativo (Ignjatovic, 2020) che passi attraverso esperienze di apprendimento più ricche e più autentiche per gli studenti. Un siffatto approccio farebbe da traino per la risoluzione di problemi sempre più complessi e sempre più vicini al mondo attuale. Nella pratica educativa, non si tratta di usare un certo contesto scientifico per assolvere ad un compito matematico né di usare la matematica per spiegare le leggi di qualche scienza (es. chimica, fisica, biologia); ciò si è visto che non è sufficiente (Lamanauskas, 2014). Colella (2016), ad esempio, suggerisce che «occorre decostruire e ricostruire l'immaginario scientifico a favore di un'idea di scienza contemporanea, non stereotipata, facendo emergere – prosegue Colella - la natura interdisciplinare della tecnica e della scienza, selezionando contenuti che abbiano connessioni con la società, con l'ambiente, con l'etica, con l'economia e con la politica». Prima ancora, bisognerebbe risolvere il problema dovuto al fatto che gli insegnanti lavorano spesso individualmente e si occupano soprattutto della loro materia, promuovendo invece un profondo dialogo interdisciplinare tra i docenti che insegnano discipline diverse (Lamanauskas, 2014).

L'interdisciplinarità può essere pensata secondo Collen (Collen, 2002) come un *continuum* di relazioni tra discipline, che passa attraverso i suoi molteplici livelli di complessità (mono/multi/inter/trans/meta-disciplinare). Un recente lavoro di revisione sulla didattica interdisciplinare della matematica (Williams & Roth, 2019), discute alcuni risultati emersi in letteratura derivanti da un insegnamento della disciplina contestualizzato, relazionato e sviluppato insieme ad altre discipline (in termini di metodi, contenuti, conoscenze, competenze). È emerso che alcuni risultati positivi per gli studenti si sono già registrati, soprattutto nelle discipline STEM, e sono riassumibili in termini di apprendimento più stimolante e più efficace, capacità di integrare conoscenze e abilità di diverse discipline, conoscenza più profonda e autentica della natura della matematica e del ruolo che essa riveste in altre discipline. In verità, già nei documenti del 2010 (MIUR, 2010a, 2010b, 2010c), appare evidente «il riferimento al valore culturale della matematica, come prodotto umano che si è sviluppato nel tempo» (Baccaglini Frank et al., 2019, p.162). Un prodotto che è stato coltivato dai matematici del passato, sviluppato anche grazie alla Didattica della Matematica (che dalla sua nascita, verso la metà degli '80, cerca di indagare le difficoltà degli studenti nell'apprendere la matematica e, così facendo, di favorire l'apprendimento auspicato dal discente) e curato anche dal punto di vista normativo. Ciò è accaduto specialmente dopo la riforma Gentile (1923) che in Italia segnava l'egemonia della cultura umanistica su quella scientifica (e matematica), contrariamente a quanto avveniva nel resto d'Europa. E se pochi decenni dopo venne seriamente riformato l'insegnamento medio inferiore con la creazione della Scuola Media Unica (1963), ci volle molto più tempo per una riforma compiuta dei Licei e degli Istituti Tecnici, come spiega Pepe (2016). Questi ultimi, infatti, non subirono «radicali riforme rispetto all'assetto che avevano avuto nel periodo fascista, ma la storia degli insegnamenti scolastici, non è fatta solo di grandi riforme, ma anche di continui, e a volte estesi, aggiustamenti». (Pepe, 2016, p.14).

Una voce nuova nel panorama ordinamentale dell'istruzione in Italia proviene proprio da un gruppo di ricercatori in Didattica della Matematica che nel 2014 hanno lanciato l'iniziativa dei Licei Matematici in Italia. Essa promuove coerenza tra le Indicazioni Nazionali e le Linee Guida ministeriali da una parte, e la prassi scolastica dall'altro. Le azioni didattiche dei Licei Matematici si caratterizzano per l'adozione di approcci didattici laboratoriali interdisciplinari (nel senso di mono-/multi-/pluri-/inter-/metadisciplinari) ed il ricorso a metodologie e tecnologie didattiche innovative. La matematica studiata è posta in relazione con altri rami della conoscenza, in un'ottica squisitamente e intrinsecamente trasversale. È una matematica pura e applicata al tempo stesso, per far sì che i giovani possano apprezzarne la bellezza, l'uso nelle altre scienze e l'importanza rivestita nella ricerca di soluzioni alle problematiche della nuova scienza. Nei contributi di approfondimento OCSE-PISA del 2012, Colella (2016) scrive a tal proposito:

> *È fondamentale per tutte/i, ragazze e ragazzi, creare un rapporto continuo tra matematica e realtà, che partendo da situazioni concrete (compiti di realtà) passi ai modelli, alle procedure e ai principi per poi tornare a riutilizzarli in contesti vari e diversificati.*
>
> *(Colella, 2016, p.219)*

Le finalità formative e educative del Liceo Matematico si possono rintracciare nei contributi pubblicati dai ricercatori di vari Dipartimenti (Capone et al., 2020; Adesso et al., 2019; Di Paola & Collura, 2019; Cerroni, 2018; Capone et al., 2017). Esse sono allineate con quanto riportato nelle indicazioni ministeriali (MIUR, 2010b; MIUR, 2010c; MIUR, 2010d). Inoltre, sembrano procedere nella medesima direzione raccomandata dall'Europa (Consiglio dell'Unione Europea, 2018) e in quella indicata dall'OCSE circa le prospettive future dell'educazione e delle competenze (OECD, 2019b). Esse spaziano dall'acquisizione da parte degli studenti di «una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico» allo sviluppo capacità relative all'argomentazione e alla modellizzazione (MIUR, 2010d, p.22); dalla capacità di leggere e interpretare in modo consapevole la realtà circostante, con un atteggiamento improntato alla collaborazione ed uno spirito critico, alla promozione dell'interesse e attitudine alla ricerca scientifica; dall'integrazione dei nuclei fondanti delle discipline allo sviluppo di un'attitudine generale a superare la frammentazione dei saperi lamentata da Morin (Morin, 2000). Spicca, dunque, tra esse la necessità di creare quello che Colella chiama «rapporto continuo tra matematica e realtà» (Colella, 2016, p.219). È fondamentale per tutti/e, secondo Colella (2016), creare questo rapporto partendo da situazioni concrete (compiti di realtà) e arrivando ai princìpi, alle teorie, ai modelli per poi ritornare ai contesti reali diversificati in cui questi modelli per così dire "teorici" troverebbero applicazione.

Agli alunni e alle alunne di tutta Italia l'iniziativa del Liceo Matematico guarda con estrema attenzione, nella consapevolezza che puntare su un'istruzione di elevata qualità sia il migliore investimento possibile per una società (Consiglio dell'Unione Europea, 2018). Investire nello sviluppo delle capacità e delle competenze base dei futuri cittadini, in una concezione comune e aggiornata delle competenze chiave, costituisce solo il primo passo per promuovere l'istruzione, la formazione e l'apprendimento non formale in Europa (Consiglio dell'Unione Europea, 2018). A scendere in campo, al fianco degli studenti e studentesse, nelle classi di Liceo Matematico, sono i ricercatori universitari e i docenti di scuola, per i quali l'iniziativa costituisce un'esperienza di sviluppo professionale. In virtù di un patto o protocollo d'intesa stipulato tra le singole istituzioni scolastiche che aderiscono al progetto di Liceo Matematico e i Dipartimenti di Matematica dell'Ateneo di riferimento, i docenti universitari si impegnano anzitutto a fornire una formazione adeguata e specifica ai docenti delle scuole sui contenuti da trattare con gli allievi. Entrambe le parti partecipano alla definizione delle scelte metodologiche e di contenuto da adottare, tenendo conto di più fattori: il Pecup dello studente, le specifiche competenze di indirizzo e la rete territoriale in cui è inserita ogni singola scuola. Le proposte didattiche emerse negli anni sono molteplici ma in tutte vi sono dei tratti comuni: il carattere laboratoriale e interdisciplinare, la forte collaborazione scuola-università e l'adozione di un approccio di apprendimento integrativo. In ciascuna la matematica svolge in modo singolare il ruolo di collante culturale (Capone et al, 2017).

Il Liceo Matematico non guarda, ad ogni modo, solo al mondo degli studenti, né solamente alle ricadute del progetto sulla formazione e prestazione di ragazzi e ragazze nella didattica curricolare e nel mondo del lavoro. Si pone, anzi, il problema di formare i docenti. Tra le sue finalità, difatti, rientra proprio la creazione di «una stretta collaborazione tra il mondo della scuola e il mondo accademico», attraverso corsi di aggiornamento, convegni e seminari tematici, focus group, workshops, libri (Carullo et al., 2019, p.286). Questa collaborazione è messa in atto soprattutto «attraverso la presenza fisica e costante di ricercatori» all'interno delle scuole: è a loro che «i docenti delle scuole, che aderiscono al progetto, possono rivolgersi durante tutto il percorso che li vede protagonisti quali fonte principale dell'educazione e della crescita delle nuove generazioni» (Carullo et al., 2019, p.283). Secondo i primi studi condotti sul caso, le prasseologie della comunità di ricercatori, gli incontri di formazione e la didattica collaborativa messa in atto nei vari team di lavoro (tra docenti di scuola e docenti universitari) sembrano intervenire sul PCK del/della docente (Branchetti et al., 2019; Di Paola & Collura, 2020) e influenzare positivamente le prasseologie dei/delle docenti. Nel secondo caso, assume particolare rilievo il contributo di Carullo e altri (Carullo et al., 2019) nel quale si descrive il punto di vista dei docenti che hanno vissuto in prima persona l'innovazione didattico-educativa promossa dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Salerno. Al termine del ciclo completo delle classi d'esordio di Liceo Matematico, i docenti hanno risposto ad un questionario strutturato, incentrato sull'efficacia del progetto in relazione alla formazione ricevuta dai ricercatori universitari. In merito ai dati analizzati sembra emergere una grande soddisfazione da parte della maggioranza degli intervistati, una soddisfazione che nasce in seno alla collaborazione con i ricercatori dell'Università di Salerno:

> *[...] alcuni affermano di aver acquisito maggior sicurezza nelle proposte didattiche agli studenti e ritengono essenziale la collaborazione con ricercatori in didattica della matematica; altri mettono in evidenza la ricaduta didattica sugli studenti in termini di miglioramento delle competenze; altri ancora sottolineano la proficuità di una azione didattica interdisciplinare che parta dal confronto tra i docenti di diverse discipline.*
>
> *(Carullo et al., 2019, p.283-284)*

Si sottolinea che molti riferiscono che la pratica d'aula è stata influenzata dalla ricerca in Didattica della Matematica, confermando la proficuità di una didattica collaborativa - che coinvolge il mondo della scuola e il mondo accademico - ai fini di un miglioramento della didattica (Lamanauskas, 2014).

Parlando di motivazione per l'apprendimento della matematica, didattica collaborativa e di lezioni improntate all'interdisciplinarità nelle proposte didattiche dei Licei Matematici in Italia sorgono importanti questioni che non hanno ancora trovato una risposta in letteratura, alle quali si è cercato di dare una risposta in questo lavoro di tesi:

Q_1: In che misura le lezioni interdisciplinari di un Liceo Matematico contribuiscono ad una motivazione autodeterminata verso l'apprendimento della matematica negli studenti di grado 9[119]?

Q_2: In che modo i percorsi interdisciplinari centrati sulla Storia della Matematica possono influenzare la motivazione verso la matematica in uno studente di grado 9 del Liceo Matematico?

Q_3: In che termini il collaborative teaching nel contesto del Liceo Matematico può intervenire sulla motivazione verso la matematica negli studenti di grado 9?

Q_4: Quali sono le possibili ricadute del collaborative teaching, attuato per realizzare lezioni interdisciplinari, sulla crescita formativa e professionale dei docenti del Liceo Matematico?

La ricerca condotta, prosecuzione di un precedente lavoro (Collura & Di Paola, 2020), si colloca nella stessa direzione di altri lavori sulla didattica collaborativa in percorsi didattici interdisciplinari attuati nella Scuola Secondaria Superiore (Carullo et al., 2019; Hurd & Weilbacher 2018, Jao & McDougall 2016, Capone et al. 2017; Lamanauskas, 2014). Ad oggi, tuttavia, non è stato ancora indagato il rapporto tra la didattica interdisciplinare che caratterizza i percorsi di Liceo Matematico e la motivazione degli studenti verso l'apprendimento della matematica. Come detto più volte, l'iniziativa del Liceo Matematico è relativamente recente (la sperimentazione nasce nel 2014) ed è segnata da un carattere

[119] Si tratta degli studenti di 14-15 anni che frequentano il primo anno di una Scuola Secondaria Superiore di II grado.

estremamente interdisciplinare, teso a contribuire alla formazione degli studenti come cittadini e come uomini e donne, sul piano culturale e sul piano sociale. Il Liceo Matematico, secondo quanto sinora discusso, abbraccia la tradizione del laboratorio di matematica per adattarla alle sfide del mondo attuale e promuovere una formazione culturale ad ampio raggio negli studenti, futuri cittadini del mondo. Le finalità educative del Liceo Matematico vanno finanche oltre l'approfondimento degli argomenti trattati in matematica. Esse guardano in direzione della crescita culturale e sociale di ragazzi e ragazze, della crescita professionale dei loro docenti, di un miglioramento dell'azione didattica e di un conseguente contributo allo sviluppo delle scienze e della società tutta. Le prime ricerche sul Liceo Matematico finora sono state incentrate in misura maggiore sullo sviluppo della mathematical literacy (OECD, 2019a) degli studenti (es. Capone et al., 2020; Aquino et al., 2018; Massotti, 2017; Capone et al., 2016a) e sulla formazione dei docenti (es. Branchetti et al., 2019; Cerroni et al., 2018) che sui fattori motivazionali (es. Adesso et al., 2019). Con il presente lavoro si vuole offrire un contributo alla ricerca studiando le ricadute del collaborative teaching e di un approccio didattico interdisciplinare sulla motivazione verso la matematica negli studenti di Liceo Matematico di grado 9. L'assunto di partenza della ricerca qui descritta risiede nel presupposto che il Liceo Matematico possa rappresentare un contesto capace di supportare l'autonomia e il senso di competenza dell'allievo/a e, dunque, capace di favorire in lui/lei lo sviluppo di una motivazione intrinseca, secondo il modello della SDT (Deci & Ryan, 1985; Ryan & Deci, 2000).

La sperimentazione condotta poggia le sue fondamenta teoriche nel quadro della SDT su citato e in altri quadri ad esso sottesi. Più specificamente, i quadri teorici del PCK e della TMS usati nel lavoro di tesi costituiscono i capisaldi della progettazione e successiva implementazione delle attività didattiche che hanno interessato i destinatari della ricerca condotta. I quadri del collaborative teaching, del laboratorio di matematica e dell'interdisciplinarità costituiscono invece le lenti teoriche grazie alle quali è stato possibile leggere e analizzare i dati raccolti e, di conseguenza, rispondere alle domande di ricerca. I destinatari principali della ricerca sono gli studenti di grado 9, frequentanti il primo anno di Liceo Matematico nell'anno scolastico 2018/19 (campione sperimentale); in parte, la ricerca si rivolge anche ai loro docenti. I Licei Matematici che hanno preso parte alla sperimentazione sono stati selezionati secondo criteri ben precisi (come meglio argomentato nel corpo della tesi). Nello specifico, il campione di studenti coinvolto è costituito da due sottocampioni: gli studenti di grado 9 frequentanti nell'a.s. 2018/2019 un indirizzo di Liceo Matematico e gli studenti coetanei (campione di controllo) iscritti in altri indirizzi degli stessi istituti frequentati dal primo sottocampione. I primi sono i protagonisti nelle Fasi 1 e 2 (insieme al campione di controllo costituito dai loro coetanei) e nella Fasi 3 della ricerca, durante le quali si è cercato di rispondere alle prime tre domande di ricerca. Ai loro docenti o, per meglio dire, ad una parte rappresentativa di essi, ci si è rivolti nella Fase 4 della ricerca, durante la quale si è cercato di rispondere alla quarta domanda di ricerca. Per indagare se e in che misura l'esperienza del Liceo Matematico avesse diretto la motivazione di ogni alunno/a verso l'autodeterminazione è stato somministrato in Fase 1 e 2 un questionario con domande a risposta chiusa sulla motivazione, traendo spunto da un altro lavoro (Lim & Chapman, 2014a, p.354). La somministrazione del test è avvenuta per via telematica (tramite Google Moduli) e in forma anonima, per gli studenti del Liceo Matematico (sottocampione 1) e per i coetanei della medesima scuola (sottocampione 2), in due momenti distinti dell'anno scolastico 2018/19. Il primo momento è stato marzo 2019; il secondo, al termine dell'anno scolastico, ossia nei mesi di maggio e giugno 2019. Per semplicità di lettura dei dati, si è scelto di indicare come 'dataset 1' le risposte complessivamente registrate nei due sottocampioni in Fase 1; come 'dataset 2' le risposte registrate in Fase 2. L'obiettivo perseguito è stato quello di individuare eventuali differenze dell'indice della motivazione (Self-Determination Index o, più semplicemente, SDI) tra i due sottocampioni. Il confronto, a livello quantitativo, tra le risposte pervenute dai due sottocampioni nel primo momento e nel secondo momento avrebbe permesso di evidenziare eventuali differenze in termini di motivazione e rispondere alla prima domanda di ricerca. Il risultato atteso era la presenza, al termine del primo anno di Liceo Matematico, di una motivazione complessivamente più intrinseca nel primo sottocampione. Pur se non rientra tra gli scopi diretti della presente ricerca, si è voluto rilevare anche eventuali differenze di genere nei dati analizzati in questa prima fase. Per indagare il "rapporto con la matematica" negli studenti di Liceo Matematico e come il percorso didattico abbia influenzato la loro motivazione si è scelto di somministrare loro durante la Fase 3, sempre in via telematica, un questionario con domande aperte e chiuse sull'esperienza del Liceo Matematico e su come l'avessero vissuta e interiorizzata a livello affettivo. L'obiettivo perseguito consiste nel capire in che modo l'uso della Storia della Matematica e l'adozione di una didattica collaborativa nelle lezioni interdisciplinari possano aver diretto il comportamento dei/delle discenti verso una motivazione più autodeterminata. Per indagare le ricadute del collaborative teaching si è scelto di coinvolgere nella Fase 4 i docenti dei Licei Matematici di Palermo quale parte rappresentativa dell'intera popolazione di docenti dei Licei Matematici; lo strumento di indagine scelto è l'intervista semistrutturata, rivolta in via diretta a ogni docente singolarmente. I quesiti dell'intervista sono inerenti ai moduli interdisciplinari co-progettati dal gruppo di lavoro, i fattori (emotivi, cognitivi, logistici) che possono intervenire sullo sviluppo professionale e personale e le ricadute sulla dimensione affettiva degli studenti.

Sulla base degli esiti registrati nelle prime due fasi della ricerca, l'analisi quantitativa delle risposte ha messo in evidenza notevoli differenze nella distribuzione dell'indice SDI nei due sottocampioni, tanto nella Fase 1 quanto nella Fase 2 della ricerca. Dai box-plot elaborati è stato possibile osservare anzitutto una discreta variazione dell'ampiezza del Range in favore del sottocampione 2. Si è registrato, inoltre, un certo incremento del numero di punti isolati nel sottocampione 2 (uno soltanto in Fase 1, ben otto in Fase 2). Dalla loro presenza deriva una maggiore diffusione tra i valori al di sotto della mediana (Figura 17). I quartili riferiti al sottocampione 1 assumono tanto in Fase 1 quanto in Fase 2 valori perlopiù superiori rispetto ai valori assunti dai corrispondenti quartili nel sottocampione 2. Tenendo in considerazione il primo quartile, si sottolinea che almeno il 75% degli studenti del campione sperimentale ha un indice SDI uguale o superiore a 0,05 nella Fase 1 (Figura 11) e a -0,55 nella Fase 2 (Figura 16); almeno il 75% degli studenti del campione di controllo ha un indice SDI uguale o superiore a -0,77 nella Fase 1 (Figura 12) e a -1,05 nella Fase 2 (Figura 17). Inoltre, la percentuale di studenti con indice SDI non nullo in Fase 1 è pari circa al 76% nel sottocampione 1, al 66% nel sottocampione 2. Tali percentuali si abbassano di 5 punti percentuali in Fase 2. La frazione di studenti con una regolazione controllata si è mantenuta uguale a circa un terzo circa in ambedue i sottocampioni. Tali differenze percentuali tra i due sottocampioni sono imputabili alla numerosità dei singoli sottocampioni che è notevolmente variata dalla Fase 1 alla Fase 2 (gli studenti del Liceo Matematico costituiscono circa il 25% degli studenti coinvolti in Fase 1 ed il 16% degli studenti coinvolti in Fase 2), e vanno lette alla luce degli esiti della Fase 3. Per confrontare la distribuzione dell'indice SDI nei due sottocampioni, nei due momenti distinti, si è scelto di procedere confrontando anche i valori medi che tale variabile ha assunto nel dataset 1 (Tabella 9) e nel dataset 2 (Tabella 14). In entrambi i casi, si è notato che la variabile SDI risulta maggiore, in media, nel gruppo sperimentale (sottocampione 1) rispetto al gruppo di controllo (sottocampione 2). Nello specifico, la differenza tra le due medie è più alta nel gruppo sperimentale di 0,9121 punti (Tabella 9) in Fase 1. Questo dato viene confermato anche nella Fase 2, nonostante la differenza tra le due medie (0,8429 punti, come mostrato in Tabella 15), sia leggermente inferiore rispetto a quella rilevata nella Fase 1. Il t-test a campioni indipendenti, effettuato nel dataset 1 (ovvero, nel campione coinvolto in Fase 1) e nel dataset 2 (ovvero nel campione coinvolto in Fase 2), ha confermato che tale differenza tra le medie risulta essere statisticamente significativa. Questo dato è estremamente rilevante e si può interpretare affermando che l'indice SDI si distribuisce con valori mediamente più elevati nel gruppo sperimentale costituito dagli studenti del Liceo Matematico, tanto in Fase 1 quanto in Fase 2. Un fattore determinante è stato senza dubbio la minore numerosità di quest'ultimo rispetto al gruppo di controllo ma insieme ad esso si potrebbe considerare tutta quella parte del sottocampione 2 che si definirebbe "amotivato" o "demotivato", che non vede alcun interesse, alcuna utilità o ragione valida (sia essa interna o esterna alla persona) per studiare la matematica. L'atteggiamento di *disaffection* porterebbe a non compiere determinate azioni, influenzando in modo diretto (in senso prettamente negativo) l'apprendimento del soggetto (Skinner et al., 2009). Ciò si potrebbe spiegare guardando ai molteplici percorsi interdisciplinari che hanno stimolato negli studenti del Liceo Matematico la visione di una matematica utile per sé stessi, per il lavoro o il percorso di studi che vorranno intraprendere (contribuendo ad una motivazione identificata) o finanche la visione di una matematica che è bella, piacevole, interessante e stimolante (contribuendo ad incrementare una motivazione propriamente intrinseca). Questo avrebbe potuto determinare una maggiore influenza sull'indice SDI degli item riferiti ai comportamenti di regolazione autonoma. Questi ultimi si riferiscono, infatti, ad una motivazione il cui luogo di causalità è collocato perlopiù all'interno della persona, radicato negli atteggiamenti di coinvolgimento personale, di curiosità, di pensiero costruttivo. Di conseguenza, si spiegherebbero i maggiori valori dell'indice SDI nel sottocampione 1. Di contro, nel resto del campione, una iniziale motivazione verso l'apprendimento della matematica può non aver trovato un terreno fertile nel quale svilupparsi e dirigere un comportamento verso l'autonomia del soggetto. È possibile che questo abbia determinato l'inferiorità dei valori dei quartili riferiti al sottocampione 2 in Fase 1 (Figura 11) quanto in Fase 2 (Figura 16). Fanno eccezione quei valori anomali superiori al terzo quartile registrati in Fase 2 (Figura 16), rappresentanti quella parte estremamente ridotta di studenti che vogliono apprendere la matematica per ragioni più interne che esterne, più rivolte all'*engagement* che alla *disaffection*. Le osservazioni fatte sembrano confermare quanto emerso da un precedente studio (Wilkie & Sullivan, 2018) che mette in evidenza come un contesto di supporto/non di supporto possa influenzare positivamente/negativamente la *motivazione* di un allievo. Il contesto può facilitare o ostacolare gli auto-sistemi (autopercezioni, orientamento al risultato, autoefficacia) e aiutare lo studente a sviluppare i meccanismi di autoregolazione con cui scegliere le azioni da compiere e le attività alle quali partecipare (Wilkie & Sullivan, 2018).

Complessivamente, dunque, è possibile affermare che la ricerca condotta ha confermato l'esito atteso, ossia che la motivazione negli studenti di grado 9 intervistati e frequentanti un Liceo Matematico fosse maggiormente intrinseca o identificata rispetto ai coetanei non frequentanti un Liceo Matematico. Ciò confermerebbe, alla luce della SDT (Ryan & Deci, 2000; Deci & Ryan, 1985), il fatto che il Liceo Matematico si possa configurare come uno dei contesti sociali che agiscono a supporto dei bisogni di autonomia e di competenza della persona. Collegare i concetti matematici ad altre discipline, alla vita reale e alle future carriere che potrebbero intraprendere gli studenti sembra infatti aver orientato il comportamento di studenti e studentesse del campione sperimentale verso una motivazione più autodeterminata. Il Liceo Matematico, dunque, per il gruppo di studenti coinvolto nella ricerca condotta, avrebbe contribuito a far emergere quelle caratteristiche positive (piacere, soddisfazione, curiosità, laboriosità, ...) che si riferiscono per l'appunto alla motivazione intrinseca. Dal momento che il campione in esame si può a ragione considerare quale rappresentativo dell'intera popolazione di studenti del Liceo Matematico coinvolti in percorsi interdisciplinari, è possibile affermare che tali percorsi possano costituire un terreno fertile per coltivare e far emergere quelle espressioni vitali della tendenza naturale dell'uomo alla crescita; espressioni della curiosità, del pensiero costruttivo, della fiducia in sé (self-confidence) e del piacere provato nell'apprendere la matematica che si riferiscono proprio alla motivazione intrinseca verso l'apprendimento della matematica.

Anche nell'analizzare la distribuzione della variabile SDI in relazione al Genere (Femminile, Maschile) è emersa una sostanziale differenza tra i due gruppi considerati, tanto in Fase 1 quanto in Fase 2. Il t-test a campioni indipendenti ha permesso di verificare che anche in questo caso la differenza nella media della variabile SDI tra le due modalità della variabile Genere (cioè, tra il gruppo dei Maschi e quello delle Femmine) risulta statisticamente significativa sia nel dataset 1, sia nel dataset 2. In particolare, la media del sottogruppo Femmine è significativamente più alta di circa 1,50 rispetto alla media del gruppo Maschi nel dataset 1 (Tabella 12); è significativamente più alta di circa 0,56 rispetto alla media del gruppo Maschi nel dataset 2 (Tabella 16). I risultati discussi sinora lasciano presupporre che tale differenza potrebbe risultare significativa all'interno del solo gruppo sperimentale. Nessuno studio, tuttavia, è stato ancora realizzato in merito ad una possibile differenza di genere nella distribuzione dell'indice SDI tra alunni e alunne di Liceo Matematico. Questo lavoro apre dunque la strada a ulteriori linee di ricerca sul tema del gap gender, una tematica che merita un approfondimento ben più ampio di quello che è stato possibile fare nel presente lavoro di tesi.

Alla luce di quanto discusso sugli esiti della Fase 3, è possibile concludere che il questionario rivolto al campione sperimentale ha messo in evidenza vari aspetti del comportamento degli studenti, sia in positivo che in negativo. Un esiguo numero di studenti non ha trovato l'esperienza del Liceo Matematico utile o interessante e, per tali ragioni, si potrebbe dire che è stata demotivata a partecipare alle attività. La parte più consistente del campione ha trovato invece l'esperienza molto positiva e l'ha descritta usando aggettivi quali «interessante», «bella», «piacevole», «divertente», «utile». Quest'ultima ha rintracciato nelle lezioni un momento in cui studiare e apprendere «con piacere» o finanche «con leggerezza», un'opportunità preziosa per arricchire il proprio bagaglio culturale e sviluppare competenze in quella materia per la quale si sentiva già portata (o si sentiva già «bravo» – «brava»). Il Liceo Matematico, con le lezioni interdisciplinari condotte ha consentito loro di aprire una finestra sul mondo e di vederlo matematicamente (Sbaragli, 2011), andando oltre quei segni, quei numeri, quelle lettere che a volte possono offuscare il senso più autentico del 'fare matematica'. Le materie scientifiche e la matematica in modo particolare, sostiene Lamanauskas (2014), vengono spesse volte insegnate a scuola seguendo pedissequamente e ciecamente le formule ed i teoremi presenti nei libri di testo. Dal suo punto di vista, mancherebbero apparentemente esempi pratici e situazioni problematiche reali che aumenterebbero le possibilità per gli alunni di familiarizzare con l'applicazione pratica della matematica e delle scienze. In accordo con Sbaragli (2011), presupposto necessario «per poter vedere il mondo con gli occhi della matematica» è il conseguimento di una preparazione specifica, opportuna; una preparazione che potrebbe essere offerta da un Liceo Matematico. Il fine ultimo di una preparazione che guardi ad una conoscenza non frammentaria né divisa in compartimenti, ma che abbraccia più discipline di studio, più metodi di insegnamento e apprendimento non può che essere la preparazione dei futuri cittadini, con l'auspicio che siano un giorno capaci di «ragionare in modo matematico», usare nuovi modelli matematici per predire fenomeni, prendere delle scelte fondate, muoversi ed agire consapevolmente nel mondo grazie ad una profonda, autentica literacy matematica (OECD, 2019a). A tal proposito, D'Andrea (2019) osserva che la modellistica matematica assolve un ruolo estremamente importante nello sviluppo delle scienze e, dunque, nello sviluppo della società stessa. Ma, per formare degli allievi competenti, è fondamentale la competenza del docente (Sbaragli, 2011). Nel caso di un Liceo Matematico come quelli coinvolti nella ricerca in cui le lezioni improntate all'interdisciplinarità sono tenute, oltre che pianificate, da più docenti contemporaneamente, occorre che questa competenza sia molteplice (perché le lezioni sono tenute in co-docenza, da due o più persone contemporaneamente) e versatile (perché si adatti ad un progetto formativo a lungo termine e interdisciplinare). Co-pianificare e co-insegnare si può considerare a ragione quale attività produttiva con un oggetto/motivo comune alle discipline coinvolte, integrate l'una all'altra in termini di conoscenze, pratiche e metodologie: in poche parole, è un'attività interdisciplinare (Repko, 2007). In questa sede non si vuole tuttavia approfondire ulteriormente ciò che riguarda le competenze dei docenti in servizio. Si è cercato piuttosto di analizzare in che modo la collaborazione tra i docenti (*collaborative teaching*) che hanno preso parte al Liceo Matematico possa eventualmente costituire un'occasione di sviluppo professionale.

Riprendendo la quarta domanda di ricerca: «Quali sono le possibili ricadute del collaborative teaching, attuato per realizzare lezioni interdisciplinari, sulla crescita formativa e professionale dei docenti del Liceo Matematico?» si può affermare, sulla base degli esiti della Fase 4, che l'esperienza del collaborative teaching ha avuto un riscontro complessivamente positivo secondo ciascun docente intervistato. Da un lato, ha favorito un confronto costruttivo con i colleghi sulle metodologie d'insegnamento; ha permesso di ampliare le proprie conoscenze e di rapportarsi a tematiche differenti da quelle affrontate in precedenza (mediante un approccio interdisciplinare all'educazione matematica); ha ravvivato l'interesse per la disciplina insegnata e la passione per l'insegnamento in sé, in virtù di un'autentica valorizzazione del proprio e altrui lavoro; ha supportato lo sviluppo degli obiettivi di apprendimento e fatto sì che gli alunni potessero acquisire competenze e carpire interessi che, possibilmente, non sarebbero emersi in altre situazioni didattiche. Questo trova conferma in precedenti studi (Lamanauskas, 2014; Di Paola & Collura, 2020) dove si mette in evidenza che la didattica collaborativa veicola l'approfondimento e ampliamento delle competenze dei singoli insegnanti; favorisce lo scambio di buone esperienze educative e rafforza la fiducia tra specialisti di vari settori; interviene sul PCK di ogni docente. Inoltre, in accordo con Lamanauskas (2014), si è visto che la didattica collaborativa consente di organizzare progetti educativi comuni, di generare idee educative innovative e di ricercare una più stretta integrazione tra scienza e matematica, ma anche tra scienza e tradizione umanistica. Dall'altro, guardando ai fattori affettivi (in termini di percezione del *successo in matematica*, *atteggiamento verso la matematica*, *visione della matematica* e *utilità della matematica*) e motivazionali degli studenti verso l'apprendimento della matematica, l'esperienza del Liceo Matematico ha dato, dal punto di vista dei docenti, la possibilità di "vedere" e "toccare" con mano alcune applicazioni della matematica nei contesti di vita reale; di sperimentare concetti matematici e proposizioni attraverso l'uso di artefatti quali "R" o "Geogebra", per citarne alcuni; di cogliere possibili relazioni tra la matematica e altre discipline; di comprendere il ruolo della matematica nello sviluppo storico del concetto di misura; di suscitare un interesse per lo studio delle discipline tutte in misura maggiore che in altre situazioni didattiche. Non rimangono esclusi gli aspetti legati ai traguardi formativi quali lo sviluppo di competenze che rientrano nel più ampio concetto di Mathematical literacy (PISA, 2012; OECD, 2019a) e lo sviluppo di «un'attitudine generale a porre e a trattare problemi» (Morin, 2000, p.15) – non solo in matematica-. In riferimento ai quadri teorici presi qui in esame, tutto ciò rientra nella sfera dei *loci of causality* interni all'individuo, dai quali trae origine una motivazione intrinseca per l'apprendimento della matematica. Un ulteriore aspetto emerso è legato ai contenuti interdisciplinari e al fatto che le conoscenze *costruite* insieme agli alunni abbiano rafforzato o quantomeno introdotto negli allievi l'idea di un sapere unico che si esplica in più discipline, tra le quali il confine è sottile o è solo un pregiudizio delle persone. Questo aspetto si realizza nella percezione, da parte dei discenti, che esista una conoscenza unica anziché frammentata in scienza e umanesimo; un sapere che abbraccia la storia dell'umanità e delle civiltà che si susseguono. Risulta essenziale precisare che tali risultati prendono vita dall'approccio interdisciplinare adottato: la chiave di volta che, limitatamente al campione coinvolto, ha permesso di coltivare negli studenti la motivazione per la matematica e di rendere più profondo ed efficace il processo di apprendimento e insegnamento. Il Liceo Matematico può quindi, usando le parole di Morin (2000), fornire occasioni e spunti per sviluppare quei principi organizzatori che consentono di «collegare i saperi e di dare loro senso» (Morin, 2000, p.15). In altre parole, può fornire un valido contributo alla formazione di «teste ben fatte», come le chiama Morin (2000) nel saggio in cui teorizza la riforma del pensiero e dell'insegnamento.

In conclusione, questo studio ha fornito alcune prove a sostegno del ruolo che i percorsi interdisciplinari dei Licei Matematici d'Italia, aventi come perno la Storia della Matematica e attuati in forme di didattica collaborativa (co-planning e co-teaching) tra docenti di scuola possono agire in maniera significativa a supporto della motivazione per la matematica in studenti di grado 9. Guardando alla motivazione dalla prospettiva della SDT (Ryan & Deci, 1985; Deci & Ryan, 2000), si è visto come l'innovazione didattica Liceo Matematico possa dirigere il comportamento di ragazzi e ragazze verso una motivazione intrinseca per l'apprendimento della matematica. In questo particolare ambiente di lavoro (il laboratorio di matematica) viene costruita la conoscenza da allievi e allieve insieme ai loro docenti, mediante un approccio di apprendimento interdisciplinare, in un rapporto continuo tra matematica e società, tra scienza e umanesimo. Questo risultato sembra confermare che il Liceo Matematico, almeno per il campione coinvolto nella ricerca, costituisce un contesto che supporta i bisogni di autonomia, competenza e relazione sociale. Inoltre, i dati rilevati sembrano fornire risultati incoraggianti circa un possibile miglioramento dell'impatto che l'insegnamento e apprendimento della matematica ha sulle giovani generazioni.

Gli strumenti usati nel presente lavoro di tesi sono risultati dunque adeguati a rispondere alle domande di ricerca, in prima istanza, per misurare la motivazione nel continuum indicato dalla SDT nel campione di studenti coinvolto. Secondariamente, hanno permesso di identificare le sfumature della suddetta motivazione nei ragazzi e nelle ragazze del Liceo Matematico, in relazione ai percorsi interdisciplinari, nei quali hanno indossato i panni dei giovani ricercatori. Infine, sono stati utili per carpire i benefici riscontrabili nei docenti delle scuole che hanno aderito al progetto sperimentale del Liceo Matematico. Il test strutturato e usato nelle prime due fasi della ricerca potrebbe anche essere usato per esplorare gli effetti di qualche riforma istituzionale sui fattori motivazionali degli studenti. Un incremento del punteggio in relazione a quelle sottoscale che si trovano all'estremità autodeterminata del continuum della motivazione (nella SDT) andrebbe a confermare che la riforma ha avuto l'effetto desiderato. Rimangono, tuttavia, inesplorate alcune questioni che questo lavoro non ha messo in luce e si configurano come problemi aperti dal lavoro qui argomentato:

- quali considerazioni possono essere fatte sui dataset analizzati riguardo al punteggio delle singole sottoscale della motivazione, secondo la SDT?

- esiste una correlazione tra l'elevato indice SDI degli studenti in uscita (di grado 13) da un Liceo Matematico e le scelte di studio o di lavoro in ambito STEM?
- come è possibile mantenere "alta" la motivazione degli studenti di Liceo Matematico verso l'apprendimento della matematica?
- esiste una differenza di genere nell'atteggiamento verso la matematica nei Licei Matematici?
- il Liceo Matematico può superare il *gap gender* registrato in passato nelle prestazioni e nella percezione di auto-efficacia da parte delle ragazze?

La necessità di rispondere a queste problematiche è basata su studi centrati sui fattori affettivi (es. Hannula et al., 2019), sui fattori motivazionali per una possibile scelta di carriere in ambito STEM (es. Middleton et al., 2019) e sulle prospettive di genere (es. Colella, 2016), oltre che dalle indicazioni nazionali ed europee sull'istruzione e formazione (es. Consiglio dell'Unione Europea, 2018; OECD, 2019a; OECD, 2019b). Successivi contributi potrebbero focalizzarsi sui quesiti sopra indicati o approfondire i dati raccolti nella sperimentazione qui discussa. Verosimilmente, cambiando le condizioni in cui la sperimentazione è stata attuata (altri destinatari, altri percorsi di Liceo Matematico, altri gradi di istruzione) porterebbero a risultati differenti da quelli descritti nel presente lavoro. Ad ogni modo, assume un grande rilievo proseguire la ricerca in queste direzioni. Conoscere i modi in cui una disciplina così difficile come la matematica possa essere comunicata, possa attrarre e motivare i giovani costituisce di per sé un fattore di arricchimento per l'intera comunità educante (Baccaglini-Franck et al., 2018).

APPENDICE A

Questionario per gli studenti

Il presente questionario riguarda un progetto di ricerca in Didattica della Matematica che sta interessando diverse scuole sul territorio italiano tra quelle che hanno attivato almeno una sezione prima di Liceo Matematico per l A.S. 2018/19. Le risposte fornite verranno raccolte in forma del tutto
anonima e non avranno alcuna influenza sul tuo rendimento scolastico in Matematica.

INFORMAZIONI GENERALI

Le seguenti domande serviranno a classificare per genere ed età le risposte fornite al presente questionario e a differenziare le risposte degli studenti iscritti al Liceo Matematico.

Genere Maschio Femmina

Quanti anni hai?

____

Sei uno studente del Liceo Matematico? **SÌ** **NO**

Perché trascorri del tempo a studiare matematica?

Per rispondere alla domanda, usa la scala sottostante:

1= Non corrisponde per nulla

2 = Corrisponde in parte

3= Corrisponde abbastanza

4= Corrisponde molto

5= Corrisponde esattamente

Per ciascuna della seguenti affermazioni, segna il numero che meglio indica quanto le seguenti affermazioni corrispondono a qualche ragione per cui passi del tempo a studiare matematica.

Perché trascorri del tempo a studiare matematica?

1= Non corrisponde per nulla, 2 = Corrisponde in parte, 3= Corrisponde abbastanza

4= Corrisponde molto, 5= Corrisponde esattamente

Sinceramente non lo so. Sento che sto solo perdendo tempo a studiare matematica.	1	2	3	4	5
Perché voglio far vedere agli altri (ad esempio agli insegnanti, alla famiglia, agli amici) che vado bene in matematica.	1	2	3	4	5
Perché voglio mostrare a me stesso/a che posso essere bravo/a in matematica.	1	2	3	4	5
Non ne sono sicuro/a; non vedo come la matematica mi possa essere utile.	1	2	3	4	5
Perché senza un bel voto in matematica, non sarò capace di trovare un lavoro ben pagato in futuro.	1	2	3	4	5
Perché credo che la matematica migliorerà le mie competenze di lavoro.	1	2	3	4	5
Per il piacere che provo quando scopro cose nuove in matematica che non avevo mai imparato prima.	1	2	3	4	5
Per ottenere in futuro un lavoro più importante di chi non ha studiato matematica.	1	2	3	4	5
Per mostrare a me stesso che sono intelligente.	1	2	3	4	5
Per ottenere un lavoro ben pagato in futuro.	1	2	3	4	5
Per il piacere che provo quando mi sento completamente preso da ciò che i matematici hanno scoperto.	1	2	3	4	5
Perché quello che imparo adesso in matematica mi sarà utile per il corso	1	2	3	4	5

universitario che mi piacerebbe fare poi.					
Perché voglio sentire la soddisfazione personale di capire la matematica.	1	2	3	4	5
Perché studiare matematica mi servirà in futuro.	1	2	3	4	5
Per il piacere che provo quando conosco altre cose di matematica.	1	2	3	4	5
Perché voglio avere “la bella vita” più avanti.	1	2	3	4	5
Non lo so; non riesco a capire cosa sto facendo in matematica.	1	2	3	4	5
Perché penso che la matematica mi aiuterà a prepararmi meglio per quello che mi piacerebbe fare nella vita.	1	2	3	4	5
Non riesco a vedere perché sto studiando matematica e, francamente, non mi importa nulla.	1	2	3	4	5
Per il fatto che, quando vado bene in matematica, mi sento importante.	1	2	3	4	5
Per il piacere che provo quando imparo come funzionano le cose nella vita, grazie alla matematica.	1	2	3	4	5

Grazie per la collaborazione!

APPENDICE B

Questionario per studenti di primo anno del Liceo Matematico

Il presente questionario è finalizzato alla raccolta di informazioni, inerenti alla motivazione degli studenti del Liceo Matematico verso l'apprendimento della matematica, utili ai fini di una ricerca in Didattica della Matematica in Italia. Le domande che ti saranno poste riguardano il tuo atteggiamento verso la matematica prima e dopo il Liceo Matematico. Il questionario è formulato in forma anonima e non sarà oggetto di valutazione. Ti preghiamo di rispondere con sincerità e ponendo attenzione a ogni domanda, per il buon esito della ricerca. Grazie per la tua preziosa collaborazione!

LA SCELTA DEL LM

1 Ho scelto di iscrivermi al Liceo Matematico perché………………..

2 Se dovessi descrivere le ore di Liceo Matematico ad un amico di un'altra scuola, cosa gli diresti?

LA TUA ESPERIENZA DEL LM

3 Qual era il tuo rapporto con la matematica prima di iniziare il Liceo Matematico?

4 Descrivi un'attività del LM che ti ha particolarmente colpito e ciò che hai imparato.

5 Dopo le attività svolte in aula, hai approfondito autonomamente qualche argomento?

6 Quanto ritieni che il LM abbia influito *positivamente* sulla motivazione per l'apprendimento della matematica? 1 2 3 4 5

7 Secondo te, in che modo il Liceo Matematico potrebbe modificare la "visione" della matematica da parte di uno studente?

8 In una scala da 1 a 5 (dove 1 = "per niente utile", 5 = "moltissimo utile"), quanto ritieni utile per la tua formazione in matematica lo svolgimento delle lezioni del Liceo Matematico? 1 2 3 4 5

9 Ripensando alle lezioni svolte durante tutto l'anno ritieni che il Liceo Matematico abbia cambiato il tuo rapporto con la matematica? Sì __ No __

10 Se hai risposto sì alla domanda precedente, in che senso? (interesse, piacere, valore assegnato alla disciplina, emozioni, voglia di apprendere, stimolo della curiosità….) ____

11 Com'è cambiata la tua motivazione per lo studio della matematica dopo l'esperienza del LM?

UN "ALTRO" LM

12 Rifaresti la scelta di iscriverti al Liceo Matematico? Se sì, perché?

13 Quali modifiche vorresti apportare alla programmazione del Liceo Matematico per il prossimo anno scolastico?

	Numero maggiore di ore
	Più lavori di gruppo
	Più escursioni esterne
	Altro (specificare)

14 Se potessi approfondire degli argomenti di matematica e di qualche altra disciplina che quest'anno non è stata inclusa nelle lezioni interdisciplinari del Liceo Matematico, di quale disciplina si tratterebbe?

APPENDICE C

Background docente

Nome

Titolo di studio

Conseguito presso

Quale materia insegna attualmente?

Da quanto tempo lavora in questa scuola?

Da quanti anni insegna?

Perché è diventato/a un/una insegnante?

A) *Sfide e successo*

A1) In base alla Sua esperienza, com'è cambiato il contesto scolastico negli ultimi anni e quali cambiamenti ritiene siano in atto?

A2) Quali sfide si è posta la Sua scuola proponendo il Liceo Matematico come percorso di studi?

B) *Successo degli studenti e obiettivi del docente*

B1) Secondo Lei, cosa considerano gli studenti del Liceo Matematico come un "successo in matematica"?

B2) Come descriverebbe i Suoi obiettivi d'insegnamento verso la classe del Liceo Matematico?

C) *Collaborazione tra docenti*

C1) è stata attuata una collaborazione tra i docenti del Liceo Matematico per co-pianificare e/o co-insegnare durante le ore del Liceo Matematico?

C2) Aveva collaborato prima con altri docenti (non necessariamente del Suo dipartimento) per co-pianificare e/o co-insegnare?

C3) Secondo Lei, come può la collaborazione tra docenti influenzare l'atteggiamento degli alunni verso la matematica?

C4) Quali benefici ha ricevuto dalla collaborazione con altri colleghi del Suo stesso dipartimento?

C5) Tale collaborazione ha influenzato la comunicazione tra Voi docenti? Se sì, in che termini?

C6) Quali benefici ha ricevuto dalla collaborazione con i colleghi di altri dipartimenti? (Es. accesso a idee, materiali, strategie e abilità altrui, pianificazione lezione, percezione della qualità del proprio insegnamento, sviluppo professionale, gratificazione professionale, …)

C7) Secondo Lei, quali benefici hanno ricevuto gli studenti (o riceveranno in futuro) da tale collaborazione intra- e interdipartimentale?

C8) Eventuali riflessioni o osservazioni sulle ricadute (percepite o sperate) delle "lezioni interdisciplinari" del Liceo Matematico nella Sua scuola sia sui docenti che hanno collaborato e cooperato, sia sugli studenti del Liceo Matematico.

D)In relazione ai singoli "temi" trattati durante l'anno scolastico 2018/19, si chiedono le seguenti informazioni:

- Contenuti

- Obiettivi prefissati

- Modalità di svolgimento (attività, strumenti/artefatti usati o da usare, …)

- eventuali risposte positive o negative degli alunni

- obiettivi eventualmente raggiunti ed eventuali modifiche da apportare alla futura programmazione.

BIBLIOGRAFIA

Adesso, M.G., Capone, R., Fiore, O., Tortoriello F.S. (2019). Discovering Neglected Synthetic Geometry on Social Networks: Learning Maths as in the Historical Italian Academies. In: É. Barbin – U. T. Jankvist – T. H. Kjeldsen – B. Smestad – C. Tzanakis (eds.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education (ESU 8)*, Oslo, 2019, Vol.1, pp. 561-573.

An, S. A., Zhang, M., Tillman, D. A., Lesser, L. M., Siemssen, A., & Tinajero, J. V. (2016). Learning to Teach Music-Themed Mathematics: An Examination of Preservice Teachers' Beliefs about Developing and Implementing Interdisciplinary Mathematics Pedagogy. *Mathematics Teacher Education and Development, 18*(1), 20-36.

An, S. A. (2017). Preservice teachers' knowledge of interdisciplinary pedagogy: the case of elementary mathematics–science integrated lessons. *ZDM, 49*(2), 237-248.

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L. & Robutti, O. (a cura di) (2004). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Ciclo secondario*. Lucca: Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri".

Aquino, D., Brunetto, C., Cirmi, G. R., D'Asero, S., Faraci, F., Mammana, M. F., ... & Zuccarello, P. A. (2018). Dalle strategie ai teoremi. *Giornate di studio dell'Insegnante di MATematica*, 85.

Baccaglini-Frank, A., Di Martino, P., Natalini, R. & Rosolini, P. (2018). *Didattica della matematica*. Mondadori Università.

Bakhtin, M. M. (1981). *The dialogic imagination: Four essays*. Austin, TX: University of Texas Press.

Bandura, A. (1994). Self-efficacy. In V. S. Ramachaudran (Ed.), *Encyclopedia of human behavior* (Vol. 4, pp. 71-81). New York: Academic Press. (Reprinted in H. Friedman [Ed.], *Encyclopedia of mental health*. San Diego: Academic Press, 1998).

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *32*(3), 270-294.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education*, *746-783*.

Bartolini Bussi, M. G., & Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Springer Science & Business Media.

Bartolini Bussi, M.G., Boni, M. & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica.* Modena: CDE.

Baumeister, R. F., & Leary, M. R. (1995). The need to belong: desire for interpersonal attachments as a fundamental human motivation. *Psychological bulletin, 117*(3), 497-529.

Béguin, P., & Rabardel, P. (2000). Designing for instrument-mediated activity. *Scandinavian Journal of Information Systems, 12*(1), 172-190.

Bolondi, G. (2006). Metodologia e didattica: il laboratorio. *Rassegna, Periodico quadrimestrale dell'Istituto Pedagogico provinciale per il gruppo linguistico italiano, numero speciale dedicato alla Didattica della Matematica, 29*.

Bourdieu, P. (2000). Pascalian meditations. Stanford, CA: Stanford University Press.

Branchetti, L., Capone, R., & Tortoriello, F. (2019). High school teacher training challenges in the Italian interdisciplinary project Liceo Matematico. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (No. 7). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Brigaglia A., Masotto G. (1982). L'ambiente matematico in Italia negli anni dopo l'Unità. In "Il Circolo Matematico di Palermo", Bari: Edizioni Dedalo. [Chapter in a Book about an important association of Mathematicians in Palermo]

Calderhead, J., and Gates P. (1993). "Introduction." In Conceptualizing Reflection in Teacher Development, edited by J. Calderhead and P. Gates, 1–10. London: Falmer. *Journal of Educational and Psychological Consultation 1*(1): 69–86.

Canestri G., & Ricuperati G. (1976). *La scuola in Italia dalla Legge Casati a oggi*. Torino: Loescher.

Capone, R., Adesso, M. G., Del Regno, F., Lombardi, L., & Tortoriello, F. S. (2020). Mathematical competencies: a case study on semiotic systems and argumentation in an Italian High School. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 1-16.

Capone, R., Rogora, E., & Tortoriello, F. S. (2017). La matematica come collante culturale nell'insegnamento. *Matematica Cultura e Società, 2*(3), 293-303.

Capone, R., D'Acunto, I., Del Sorbo, M.R., Tortoriello, F.S. (2016a). La Fisica del Liceo Matematico, In: *102° Congresso Nazionale della Società Italiana di Fisica*, p. 100.

Capone, R., Dello Iacono, U., Tortoriello, F.S., Vincenzi, G. (2016b). Math High School: A Teaching Proposal. In: L. Radford – F. Furinghetti – T. Hausberger (eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics*, Montpellier, 2016.

Carullo, C., Pugliese, P., Tortoriello, F.S. (2019). IL PROGETTO LICEO MATEMATICO: IL PUNTO DI VISTA DEGLI INSEGNANTI DOPO CINQUE ANNI DI ATTIVITÀ. In (a cura di) R. Bonino, D. Marocchi, M. Rinaudo, M. Serio, *Atti del IX Convegno Nazionale Di. Fi. Ma. – 2019* (pp.283-289). Università di Torino.

Castelnuovo E. (1963). *Didattica della matematica.* La Nuova Italia, Firenze. In Arzarello, F., & Bartolini Bussi, M.G. (a cura di), *Didattica della matematica*. Torino: UTET Università.

Castelnuovo G. (1919). La riforma dell'insegnamento matematico secondario nei riguardi dell'Italia, *Bollettino della Mathesis*, XI, p. 5.

Castelnuovo G. (1907). Il valore didattico della matematica e della fisica, *Rivista di Scienza*, 1, 329-337.

Cerroni C., Di Paola, B., Cozzo, A., Giangalanti, A., Tondo, I. (2018). L'esperienza del corso di formazione sul Liceo Matematico: il caso del linguaggio ed epistemologia delle scienze umane e naturali. In: *Seminario Nazionale sui Licei Matematici*, 2018.

Cerroni C. (2018a). La storia della matematica in classe: percorso di storia e teoria della crittografia. In B. D'Amore, & S. Sbaragli (a cura di), *La Didattica della Matematica, strumento concreto in aula* (pp. 143-144). Bologna: Pitagora Editrice.

Cerroni, C. (2018b). Codici e segreti: percorso di crittografia tra storia e interdisciplinarità. In *Giocare con la matematica: dall'apprendimento informale all'apprendimento formale* (Vol. 1, No. 2, pp. 129-130). GRIM.

Ciarrapico, L., & Berni, M. (2017). *I curricoli di matematica, gli ordinamenti scolastici e le riforme dal 1940 al 2015.* Unione Matematica Italiana.

Ciarrapico, L. (2002). L'insegnamento della matematica dal passato recente all'attualità. *Archimede-Rivista di Matematiche Pure e Applicate, 54*(3), 123-129.

Clark, C., Moss, P.A., Goering, S., Herter, R. J., Lamar, B., Leonard, D., Robbins, S., Russell, M., Templin, M., & Wascha, K. (1996). Collaboration as dialogue: Teachers and researchers engaged in conversation and professional development. *American Educational Research Journal, 33*(1), 193–231.

Colella, P. (2016). Ragazze e scienze hard: sviluppare l'auto-efficacia. Prospettive di genere nella didattica della matematica. In Palmerio, L. (a cura di), *Ocse Pisa 2012. Contributi di approfondimento* (pp.201-221). FrancoAngeli.

Collen, A. (2002). Disciplinarity in the pursuit of knowledge. In *Emergence in complex, cognitive, social, and biological systems* (pp. 285-296). Springer, Boston, MA.

Contò, F., & Fiore, M. (Eds.). (2020). *Ragionando di sviluppo locale: una lettura" nuova" di tematiche "antiche"*.Milano: FrancoAngeli, pp.418-432.

Cowan, G. (1998). *Statistical data analysis*. New York: Oxford University Press.

D'Ambrosio, U. (1999). Literacy, matheracy, and technocracy: A trivium for today. *Mathematical thinking and learning, 1(2)*, 131-153.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). "Competenze": obiettivo per chi costruisce il proprio sapere. *La matematica e la sua didattica, 3*, 327-338.

D'Andrea, L. (2019). MATEMATICA E SOCIETÀ. In (a cura di) R. Bonino, D. Marocchi, M. Rinaudo, M. Serio, *Atti del IX Convegno Nazionale Di. Fi. Ma. – 2019* (pp.128-132). Università di Torino.

Deci, E., & Ryan, R. M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior*. Springer Science & Business Media.

Deci, E.L., & Ryan, R.M. (2000). The" what" and" why" of goal pursuits: Human needs and the self-determination of behavior. *Psychological inquiry, 11*(4), 227-268.

Depaepe, F., Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and teacher education, 34*, 12-25.

Di Martino, P., & Marcheschi, A. (2018). Il ruolo dell'argomentazione nell'educazione matematica. In: (a cura di): Livia Giacardi, Cristina Sabena, Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2017-2018. L'Artistica Editrice, Savigliano, 49-58.

Di Martino, P. (2017). Problem solving e argomentazione matematica. *Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula*, (1), 23 - 37.

Di Paola, B., & Collura, D. (2020). Collaborative Teaching in the Italian" Liceo Matematico": A Case Study of Co-Planning and Co-Teaching. In *ICMI Study 25-Study Conference-Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups* (Vol. 25, pp. 278-285). INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION EDITORS.

Doig, B., Williams, J., Swanson, D., Borromeo Ferri, R., & Drake, P. (2019*). Interdisciplinary Mathematics Education: The State of the Art and Beyond.*

Doig, B., & Willams, J. (2019). Conclusion to Interdisciplinary Mathematics Education. In *Interdisciplinary Mathematics Education. The State of the Art and Beyond*; Doig, B., Williams, J., Swanson, D., Borromeo, R., Drake, P., Eds, (pp. 299-302). Springer, Cham.

DuFour, R. (2004). What is a "professional learning community"? *Educational Leadership, 61*(8), 6–11.

Dunne, F., B. Nave, and A. Lewis. 2000. "Critical Friends: Teachers Helping to Improve Student Learning." *Phi Delta Kappa International Research Bulletin 28*: 9–12.

Durkheim, É. (1893). De la division du travail social [division of social labour]. Paris: Felix Alcan.

Durksen, T. L., Way, J., Bobis, J., Anderson, J., Skilling, K., & Martin, A. J. (2017). Motivation and engagement in mathematics: a qualitative framework for teacher-student interactions. *Mathematics Education Research Journal, 29*(2), 163-181

Egodawatte, G., McDougall, D., & Stoilescu, D. (2011). The effects of teacher collaboration in Grade 9 Applied Mathematics. *Educational Research for Policy and Practice, 10*(3), 189-209.

Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit. https://doi.org/10.1017/CBO9781139814744.

Enriques F. (1921). Insegnamento dinamico, *Periodico di matematiche*, s. IV, I, pp. 6-16.

Fandiño Pinilla M.I. (2003). "Diventare competente", una sfida con radici antropologiche. In: D'Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). Competenze in matematica. Bologna: Pitagora.

Fennema, E. &. (1976). Fennema-sherman mathematics attitudes scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. *Journal for Research in Mathematics Education, 7*(5), 324–326.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora Editrice.

Frapolli A., Sbaragli S. (2012). Dare senso alla matematica. *Scuola ticinese. XLI,* III, 313, pag. 15-16.

Furinghetti, F. (1998). Mathematics teacher education in Italy: A glorious past, an uncertain present, a promising future. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(3), 341-48.

Furner, J. M., & Kumar, D. D. (2007). The mathematics and science integration argument: A stand for teacher education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 3*(3), 185-189.

Giacardi, L., & Scoth, R. (2014). Secondary school mathematics teaching from the early nineteenth century to the mid-twentieth century in Italy. In *Handbook on the history of mathematics education* (pp. 201-228). Springer, New York, NY.

Giacardi, L. (2011). L'emergere dell'idea di laboratorio di matematica agli inizi del Novecento. *Atti del V Convegno Nazionale Di. Fi. Ma - 2011*, 55-66.

Giacardi, L. M. (2006). *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia* (pp. 1-416). Lumières Internationales.

Grolnick, W. S., & Ryan, R. M. (1989). Parent styles associated with children's self-regulation and competence in school. *Journal of educational psychology, 81*(2), 143.

Grossman, P., Wineburg, S., & Woolworth, S. (2001). Toward a theory of teacher community. *The teachers college record, 103*, 942-1012.

Gutierrez, R. (1996). Practices, beliefs, and cultures of high school mathematics departments: Understanding their influence on student advancement. *Journal of Curriculum Studies, 28*(5), 495–529.

Hair, J., Anderson, R. E., Tatham, R. L., & Black, W. C. (1995). *Multivariate data analysis*. New Jersey: Prentice-Hall Inc.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: Embodied and social theories. *Research in Mathematics Education, 14*(2), 137–161.

Hannula, M. S., Leder, G. C., Morselli, F., Vollstedt, M., & Zhang, Q. (2019). *Affect and mathematics education: Fresh perspectives on motivation, engagement, and identity*. Springer Nature.

Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 165–178.

Harris, A., Chapman, C., Muijs, D., Russ, J., & Stoll, L. (2006). Improving schools in challenging circumstances: Exploring the possible. *School Effectiveness and School Improvement, 17*, 409–424.

Heider, E (1958). *The psychology of interpersonal relations*. New York: Wiley.

Ignjatović, G. (2020). INTEGRATIVE LEARNING APPROACH IN ESP/ELP: Theoretical framework of intradisciplinary, multidisciplinary, interdisciplinary, and transdisciplinary integration. *Зборник радова Правног факултета у Нишу*, (88), 179-198.

Impedovo, M. (2008). Matematica dinamica. *La matematica e la sua didattica, 22*(1), 138-146.

Jao, L., & McDougall, D. (2016). Moving beyond the barriers: Supporting meaningful teacher collaboration to improve secondary school mathematics. *Teacher Development, 20*(4), 557-573.

Klein, J. T. (2010). A taxonomy of interdisciplinarity. In R. Frodeman, J. T. Klein, & M. Mitcham (Eds.), *The Oxford handbook of interdisciplinarity*, 15–30. Oxford: Oxford University Press.

Lamanauskas, V. (2014). Science and math teachers' collaboration: How to develop it seeking pupil's success at school. *Problems of Education in the 21st Century, 62*(62), 5-7.

Lattuca, L. (2001). *Creating interdisciplinarity: Interdisciplinary research and teaching among college and university faculty*. Nashville, TN: Vanderbilt University Press.

Leder, G. C. (2019). Mathematics-related beliefs and affect. In *Affect and Mathematics Education* (pp. 15-35). Springer, Cham.

Levesque, C., Zuehlke, A. N., Stanek, L. R., & Ryan, R. M. (2004). Autonomy and competence in German and American university students: A comparative study based on self-determination theory. *Journal of Educational Psychology, 96*(1), 68.

Lieberman, A. (1990). *Schools as Collaborative Cultures: Creating the Future Now*. The Falmer Press, Taylor and Francis Inc., 1900 Frost Road, Suite 101, Bristol, PA 19007.

Ligorio, M. B., & Cacciamani, S. (2013). *Psicologia dell'educazione*. Roma: Carocci editore.

Lim, S. Y., & Chapman, E. (2015a). Adapting the academic motivation scale for use in pre-tertiary mathematics classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, *27*(3), 331-357.

Lim, S. Y., & Chapman E. (2015b). Effects of using history as a tool to teach mathematics on students' attitudes, anxiety, motivation and achievement in grade 11 classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 90*(2), 189-212.

Lim, S. Y., & Chapman E. (2013a). Development of a short form of the attitudes toward mathematics inventory. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 145-164.

Lim, S. Y., & Chapman E. (2013b). An investigation of the fennema-sherman mathematics anxiety subscale. *Measurement and Evaluation in Counseling and Development, 46*(1), 26–37.

Lynch, M. (1985). Discipline and the material form of images. *Social Studies of Science, 15*, 37–66.

Maass, K., Geiger, V., Ariza, M. R., & Goos, M. (2019). The role of mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM, 51*(6), 869-884.

Madlung, A., Bremer, M., Himelblau, E., & Tullis, A. (2011). A study assessing the potential of negative effects in interdisciplinary math–biology instruction. *CBE—Life Sciences Education, 10*(1), 43-54.

Malmivuori, ML. (2007). Affect and self-regulation. *Educational Studies in Mathematics 63*(2), pp. 149-164.

Mandler, G. (1989). *Affect and Learning: Causes and consequences of emotional interactions*, in McLeod D. and Adams V. M. (eds.). Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective, 1989, 3-19.

Mariotti, M. A., & Maffia, A. (2018). Dall'utilizzo degli artefatti ai significati matematici: il ruolo dell'insegnante nel processo di mediazione semiotica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *4*, 50-64.

Massotti G. (2017). Liceo matematico, un nuovo progetto formativo, *Archimede 1*, 38-42.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. New York: Freeman.

McLeod, D. B., & Adams, V. M. (Eds.). (1989). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. Springer-Verlag Publishing. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3614-6.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*, 575-596.

Menghini, M. (2016). History of Mathematics Education-Italy. *arXiv preprint arXiv:1603.08499*.

Menghini M. (2010). La geometria intuitiva nella scuola media italiana del '900. *La matematica nella società e nella cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, *3*(3), 399-429.

Middleton, J. A., Mangu, D., & Lee, A. (2019). A longitudinal study of mathematics and science motivation patterns for STEM-intending high schoolers in the US. In *Affect and Mathematics Education* (pp. 89-105). Springer, Cham.

Middleton, J. A., & Spanias, P. A. (1999). Motivation for achievement in mathematics: Findings, generalizations, and criticisms of the research. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(1), 65-88.

Ministero Pubblica Istruzione (1918). I programmi delle scuole medie e la loro revisione, Roma: Tipografia operaia romana cooperativa [Proposals of syllabi for secondary school in Italy]

Mishra, P., & Koehler, M.J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054.

Morin, E. (1993). *Introduzione al pensiero complesso: Gli strumenti per affrontare la sfida della complessità.* Milano: Sperling & Kupfer.

Morin, E. (2000). *La testa ben fatta: riforma dell'insegnamento e riforma del pensiero*. Milano: Cortina.

Muijs, D., Ainscow, M., &West, M. (2006). *Why network? Theoretical perspectives on the value of networking and collaboration*. Nottingham: NCSL.

Muijs, D., West, M., & Ainscow, M. (2010). Why network? Theoretical perspectives on networking. *School Effectiveness and School Improvement, 21*(1), 5–26.

Norman, D. A. (1993). *Things that make us smart.* London: Addison-Wesley.

OECD (1972). *Interdisciplinarity: Problems of teaching and research in universities*. Paris: Organization for Economic Cooperation and Development.

OECD (2019a), *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework,* PISA, OECD Publishing, Paris, *https://doi.org/10.1787/b25efab8-en.*

Paola, D. (2007). Dal laboratorio alla lezione: descrizione di un esempio. *Innovazione Educativa, Supplemento per l'Emilia-Romagna, TECNODID editrice, Napoli*, (8), 13-20.

Pepe, L. (2016). *Insegnare matematica. Storia degli insegnamenti matematici in Italia* (Vol. 27, pp. 1-541). Clueb.

Pellerey, M. (2004). Le competenze individuali e il portfolio.

Perry, J. (1913). *Elementary Practical Mathematics*, London: Macmillan and Co.

Pezzano, T. (2013). La scuola laboratorio di John Dewey: la "sperimentazione" dell'individuo per la democrazia. *Nuova Secondaria Ricerca*, (2).

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies-Approche cognitive des instruments contemporains. A. Colin, Paris, p.135 f.f.

Razmak, J., & Bélanger, C. H. (2016). Interdisciplinary Approach: A Lever to Business Innovation. *International Journal of Higher Education, 5*(2), 173-182.

Repko, A. F. (2008). Interdisciplinary research; process and theory, 2d ed. (2011, December). *Reference & Research Book News, 26* (6).

Repko, A. F. (2007). How the theories of common ground and cognitive interdisciplinarity are informing the debate on interdisciplinary integration. *Issues in Integrative Studies, 25*, 1-31.

Robutti, O., & Arzarello, F. (2018). La matematica nei licei matematici. In: (a cura di): Livia Giacardi, Cristina Sabena, Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2017-2018. L'Artistica Editrice, Savigliano, 109-121.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American psychologist, 55*(1), 68-78.

Sabena, C., Ferri, F., Martignone, F., & Robotti, E. (2019). *Insegnare e apprendere matematica nella scuola dell'infanzia e primaria* (pp. 1-295). Mondadori Università.

Sbaragli, S. (2011). Le competenze nell'ambito della matematica. *Difficoltà in matematica, 7*(2), 143-156.

Schoenfeld, A. H. (2002). Making mathematics work for all children: Issues of standards, testing, and equity. *Educational Researcher, 31*(1), 13–25.

Schoenfeld A.H. (1992), *Learning to Think Matematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics*.

Schuck, S., & Grootenboer, P. (2000). Affective issues in mathematics education. *Review of mathematics education in Australasia, 2003,* 53-74.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* 15(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57, 1-21.

Skinner, E. A., Kindermann, T. A., Connell, J. P., & Wellborn, J. G. (2009). *Engagement and disaffection as organizational constructs in the dynamics of motivational development*.

Stember, M. (1991). Advancing the social sciences through the interdisciplinary enterprise. *The Social Science Journal, 28*(1), 1–14.

Strathern, M. (2004). *Commons and borderlands: Working papers on interdisciplinarity, accountability and the flow of knowledge*. Sean Kingston Pub.

Suazo-Flores, E., Walker III, W. S., Alyami, H., Aqazade, M., Kastberg, S. E., & Hahn, S. (2019). *MATHEMATICS EDUCATION RESEARCHERS'INTERDISCIPLINARY COLLABORATION PRACTICES.*

Swetz, F. (1995). To know and to teach: Mathematical pedagogy from a historical context. *Educational Studies in Mathematics, 29*, 73-88.

Sydow, J. (2000). Understanding the constitution of inter-organizational trust. In C. Lane & R. Bachmann (Eds.), *Trust within and between organizations: Conceptual issues and empirical applications* (pp. 31– 63). Oxford: Oxford University Press.

Taherdoost, H., Sahibuddin, S., & Jalaliyoon, N. (2014). Exploratory factor analysis; Concepts and Theory. Jerzy Balicki. Advances in Applied and Pure Mathematics, 27, WSEAS, 375-382, Mathematics and Computers in Science and Engineering Series, 978-960-474-380-3. ffhal02557344f

Tapia, M., & Marsh, G. E. (2004). An instrument to measure mathematics attitudes. *Academic Exchange Quarterly, 8*(2), 16-22.

Thomas, J. A., & J. E. Pedersen (2003). "Reforming Elementary Science Teacher Preparation: What about Extant Teaching Beliefs?" *School Science and Mathematics 103* (7): 319–330.

Tóth-Király, I., Orosz, G., Dombi, E., Jagodics, B., Farkas, D., & Amoura, C. (2017). Cross-cultural comparative examination of the Academic Motivation Scale using exploratory structural equation modeling. *Personality and Individual Differences*, *106*, 130-135.

Turner, J. C., Thorpe, P. K., & Meyer, D. K. (1998). Students' reports of motivation and negative affect: A theoretical and empirical analysis. *Journal of educational Psychology, 90*(4), 758-771.

Tytler, R., Williams, G., Hobbs, L., & Anderson, J. (2019). Challenges and opportunities for a STEM interdisciplinary agenda. In *Interdisciplinary mathematics education* (pp. 51-81). Springer, Cham.

Uttuso, A., Collura, D.M., Buttitta G., Cerroni, C., Di Paola, B. (2019), Un esempio di co-planning tra docenti nel Liceo Matematico, *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics) 2*, *Numero speciale n.5,* 97-98.

Vailati, G. (1906), *Idee pedagogiche di H.G. Wells*, in S III, pp. 291-295.

Vallerand, R. J., Pelletier, L. G., Blais, M. R., Brière, N. M., Senécal, C., & Vallières, E. F. (1992). The academic motivation scale: a measure of intrinsic, extrinsic, and amotivation in education. *Educational and Psychological Measurement, 52*, 1003.

Vallerand, R. J., & Ratelle, C. F. (2002). Intrinsic and extrinsic motivation: A hierarchical model. In E. L. Deci & R. M. Ryan (Eds.), *Handbook of self-determination research* (pp. 37-63). Rochester, NY: University of Rochester Press

Vitale, C. (2002). *INTRODUZIONE ALLA STATISTICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE*. Napoli: Edizioni Scientifiche Italiane.

Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 147–188). Armonk, NY: Sharpe.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice*. New York: Cambridge University Press.

White, R. W. (1959). Motivation reconsidered: The concept of competence. *Psychological review*, *66*(5), 297-333.

Williams, J., & Roth, W. M. (2019). Theoretical perspectives on interdisciplinary mathematics education. In *Interdisciplinary Mathematics Education. The State of the Art and Beyond*; Doig, B., Williams, J., Swanson, D., Borromeo, R., Drake, P., Eds, (pp. 13-34). Springer, Cham.

Williams, J., Roth, W. M., Swanson, D., Doig, B., Groves, S., Omuvwie, M., Ferri, R. B., & Mousoulides, N. (2016). *Interdisciplinary mathematics education*. Springer Nature.

Wilkie, K. J., & Sullivan, P. (2018). Exploring intrinsic and extrinsic motivational aspects of middle school students' aspirations for their mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 97(*3), 235-254.

Zan R., Brown L., Evans J., Hannula M. S. (2006). Affect in mathematics education: an introduction. *Educational Studies in Mathematics, 63*: 113-121.

Zucchermaglio C. (1996). *Vygotskij in azienda*. Roma: Carocci.

Sitografia

Consiglio dell'Unione Europea (2018). Raccomandazione del Consiglio del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente (2018/C 189/01), reperibile online all'indirizzo: https://eurlex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=IT

MIUR. Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale, Firenze, Le Monnier, consultabile on-line all'indirizzo: http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf (D.M. n. 254/16.11.2012, Gazz. Uff. n. 30/05.02.2013)

MIUR. Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca (2018). Nota prot. n. 3645 del 1° marzo 2018. *Indicazioni nazionali e nuovi scenari per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione,* consultabile on-line all'indirizzo: http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni-nazionali-e-nuovi-scenari.pdf

Consiglio dell'Unione Europea (2008), reperibile online all'indirizzo: https://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/PDF/?uri=CELEX:32008H0506(01)&from=DA)

MIUR, Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2010a). *DPR 87/2010, 88/2010, 89/2010)*, reperibile online all'indirizzo: https://www.gazzettaufficiale.it/eli/gu/2010/06/15/137/so/128/sg/pdf

MIUR. Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca (2010b). *Istituti Tecnici. Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento, reperibile online all'indirizzo:* http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_tecnici/INDIC/_LINEE_GUIDA_TECNICI_.pdf

MIUR. Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca (2010c*). Istituti Professionali. Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento, reperibile online all'indirizzo:* http://www.indire.it/lucabas/lkmw_upload/nuovi_professionali/dx_2/allegati.pdf

MIUR. Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca (2010d). *Indicazioni nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento per i licei, reperibile online all'indirizzo:* http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

OECD (2019b). OECD Future of Education and Skills 2030. *Conceptual learnig framework. Knowledge for 2030*. Reperibile alla pagina web https://www.oecd.org/education/2030-project/teaching-and-learning/learning/knowledge/Knowledge_for_2030_concept_note.pdf

Unesco International Bureau of Education. (2013*). Glossary of curriculum terminology*. reperibile alla pagina http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/ibe-glossary-curriculum.pdf