

3. Barra di Hopkinson in compressione ed in tensione: aspetti teorici fondamentali

Come descritto nei precedenti capitoli, l'apparato noto come barra di Hopkinson rappresenta il dispositivo fondamentale ed il più diffuso per testare e, successivamente, analizzare le proprietà dei materiali durante deformazioni ad elevati strain rate.

La versione più comune dell'apparato è la barra di Hopkinson in compressione (SPHB, Split Hopkinson Pressure Bar) utilizzata per caratterizzare materiali sottoposti a deformazioni in compressione la quale è composta, nella sua versione più tradizionale, da tre barre coassiali cilindriche denominate rispettivamente "impattore", "barra di input" e "barra di output". Il provino, solitamente anch'esso cilindrico, è interposto tra la barra di input e la barra di output (figura C.1).

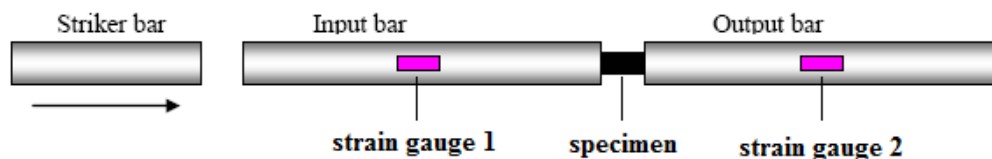


Figura C.1 – Hopkinson Bar in compressione (da M. Sasso, AIAS 2005)

Durante l'esecuzione di un test l'impattore viene accelerato contro la barra di input generando un'onda di pressione lungo quest'ultima. L'impulso così originato possiede un'ampiezza temporale pari a due volte il tempo necessario ad un'onda elastica a percorrere la lunghezza dell'impattore. Per tale ragione la lunghezza di quest'ultimo viene solitamente limitata a metà della barra di input, così da evitare la sovrapposizione delle onde incidente e riflessa (altrimenti dette onde di tipo 'alfa' e 'beta') su di essa (la scrittura di appositi codici di calcolo permette l'esecuzione dell'analisi di tensioni e

deformazioni unitarie anche quando si verifica la sovrapposizione di onde di tipo α e di tipo β).

Una volta che l'onda di tensione raggiunge l'interfaccia barra – provino si verificano diverse riflessioni lungo il provino stesso, incrementandone il livello di tensione fino al raggiungimento dell'equilibrio delle forze al suo interno. Nello stesso tempo un'onda di tensione avente lo stesso segno dell'onda incidente '*alfa*' sull'input bar si propaga lungo la barra di output ed un'onda di tensione di segno opposto è riflessa lungo la barra di input. Le barre sono progettate per operare nella parte elastica della caratteristica tensione – deformazione unitaria del materiale che le costituisce mentre il provino è sottoposto ad ampie deformazioni plastiche.

Due sezioni strumentate con estensimetri, poste al centro della barra di input e di output rispettivamente, convertono le deformazioni sulle barre suddette in segnali elettrici analogici proporzionali alle deformazioni cui le barre sono soggette durante la trasmissione delle onde di tensione elastiche.

I segnali forniti dagli strain gauges vengono registrati ed analizzati allo scopo di ottenere la caratteristica tensione-deformazione del materiale testato ad elevato strain rate. Per ottenere ciò è necessario che siano introdotte e verificate le seguenti ipotesi:

- Monoassialità delle tensioni lungo il provino e le barre
- Attrito trascurabile
- Lunghezza del provino trascurabile se paragonata alla lunghezza delle barre
- Propagazione monoassiale delle onde di tensione lungo le barre

La velocità di deformazione sul provino può essere determinata come una funzione della velocità delle particelle alle interfacce barra di input - provino e provino - barra di output (V_1 e V_2 rispettivamente) tramite la seguente equazione:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{V_1 - V_2}{L} \quad (C.1)$$

In cui 'L' rappresenta la lunghezza del provino. La velocità delle particelle 'V₁' è pari al prodotto della velocità longitudinale delle onde elastiche C₀ nelle barre moltiplicata per la deformazione totale ε_I - ε_R all'interfaccia tra barra di input e provino. Allo stesso modo la velocità delle particelle 'V₂' si ottiene moltiplicando la velocità del suono C₀ e la deformazione totale ε_T all'interfaccia provino - barra di output:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{C_0}{L} [\varepsilon_I(t) - \varepsilon_R(t) - \varepsilon_T(t)] \quad (C.2)$$

La tensione media sul provino è calcolata mediante l'equazione seguente:

$$\sigma(t) = \frac{P_1(t) + P_2(t)}{2A} \quad (C.3)$$

In cui P₁ e P₂ sono rispettivamente le forze alle interfacce provino - barra di input e provino - barra di output ed A rappresenta la sezione retta istantanea del provino. Poiché le barre sono progettate per operare in campo elastico la forza P₁ è uguale a:

$$P_1(t) = E[\varepsilon_I(t) + \varepsilon_R(t)] \cdot A_0 \quad (C.4)$$

In cui E rappresenta il modulo elastico delle barre, A₀ è l'area della sezione retta di queste ultime, ε_I ed ε_R sono le deformazioni unitarie nella barra di input prodotte dalle onde incidente e riflessa. Analogamente la forza P₂ è pari a:

$$P_2(t) = E[\varepsilon_T(t)] \cdot A_0 \quad (C.5)$$

In cui il simbolo ε_T rappresenta la deformazione sulla barra di output prodotta dall'onda di tensione trasmessa. Combinando le equazioni (C.5), (C.4) e (C.3) si ha:

$$\sigma(t) = \frac{E A_0}{2 A} [\varepsilon_I(t) + \varepsilon_r(t) + \varepsilon_T(t)] \quad (C.6)$$

Durante la deformazione uniforme del provino le tensioni alle due interfacce dello stesso devono essere eguali. L'assunzione che si abbia deformazione uniforme all'interno del provino permette di scrivere, osservando le equazioni (C.4) e (C.5):

$$\varepsilon_I(t) + \varepsilon_r(t) = \varepsilon_T(t) \quad (C.7)$$

La quale permette di semplificare le equazioni (C.6) e (C.2) in:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2c_0}{L} \varepsilon_R(t) \quad (C.8)$$

$$\sigma(t) = E \frac{A_0}{A} \varepsilon_T(t) \quad (C.9)$$

Integrando la (C.8) si ottengono le deformazioni unitarie nel provino:

$$\varepsilon = -\frac{2c_0}{L} \int \varepsilon_R(t) dt \quad (C.10)$$

Le equazioni (C.8), (C.9) e (C.10) consentono di determinare tensioni, deformazioni e velocità di deformazione durante un esperimento condotto su barra di Hopkinson. Le tensioni agenti sul provino risultano proporzionali all'onda di tensione trasmessa (sulla barra di output) mentre l'ampiezza dell'onda di tensione riflessa (sulla barra di input) è proporzionale allo strain rate cui il provino è soggetto.

A volte può essere necessario utilizzare input ed output bar di diversa sezione o costituite da diverso materiale. Questo può rendersi indispensabile, ad esempio, qualora il materiale da caratterizzare abbia una tensione nominale di rottura ridotta, per cui, allo scopo di incrementare l'ampiezza del segnale rilevato dagli strain gauges sulla barra di output, quest'ultima deve essere costituita da materiale avente modulo elastico ridotto. Di contro, specie per test sperimentali effettuati a strain rate elevati, è fondamentale che la barra di input abbia una resistenza tale da assicurare che quest'ultima non si snervi al passaggio dell'onda di tensione incidente sulla barra di input. In tal caso le equazioni (C.1) e (C.3) non possono essere semplificate per cui si avrà:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{V_1 - V_2}{L} = \frac{1}{L} [C_{INP}(\varepsilon_I(t) - \varepsilon_r(t)) - C_{OUT}\varepsilon_T(t)] \quad (C.11)$$

In cui i simboli ' C_{INP} ' e ' C_{OUT} ' denotano le velocità del suono rispettivamente nelle barre di input ed output. La (C.11) può essere scritta riscritta come:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{L} [C_{INP}(\varepsilon_I(t) + \varepsilon_r(t) - 2\varepsilon_r(t)) - C_{OUT}\varepsilon_T(t)] \quad (C.11b)$$

Considerando che le (C.4) e (C.5) divengono:

$$P_1(t) = E_{INP}[\varepsilon_I(t) + \varepsilon_r(t)] \cdot A_{INP} \quad (C.4b)$$

$$P_2(t) = E_{OUT}[\varepsilon_T(t)] \cdot A_{OUT} \quad (C.5b)$$

Dove 'E_{INP}' ed 'E_{OUT}' sono i moduli elastici delle barre di input e di output ed 'A_{INP}' ed 'A_{OUT}' sono le rispettive sezioni, Eguagliando è possibile scrivere:

$$\varepsilon_I(t) + \varepsilon_R(t) = \frac{A_{OUT} E_{OUT}}{A_{INP} E_{INP}} \varepsilon_T(t) \quad (C.12)$$

E sostituendo nella (C.11b) si ha:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{L} \left[C_{INP} \left(\frac{A_{OUT} E_{OUT}}{A_{INP} E_{INP}} \varepsilon_T(t) - 2\varepsilon_r(t) \right) - C_{OUT} \varepsilon_T(t) \right] \quad (C.13)$$

Integrando la (C.13) si ottiene l'andamento temporale degli strain:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{L} \int_0^T \left[C_{INP} \left(\frac{A_{OUT} E_{OUT}}{A_{INP} E_{INP}} \varepsilon_T(t) - 2\varepsilon_r(t) \right) - C_{OUT} \varepsilon_T(t) \right] dt \quad (C.14)$$

L'andamento temporale delle tensioni, dalle (C.3) – (C.5) vale:

$$\sigma(t) = \frac{P_1(t) + P_2(t)}{2A} = \frac{E_{INP} [\varepsilon_I(t) + \varepsilon_r(t)] \cdot A_{INP} + E_{OUT} [\varepsilon_T(t)] \cdot A_{OUT}}{2A} \quad (C.15)$$

Per cui, sostituendo la (C.12) si ha l'andamento temporale della tensione in funzione della sola deformazione della barra di output:

$$\sigma(t) = \frac{E_{INP} \left[\frac{A_{OUT} E_{OUT}}{A_{INP} E_{INP}} \varepsilon_T(t) \right] \cdot A_{INP} + E_{OUT} [\varepsilon_T(t)] \cdot A_{OUT}}{2A} \quad (C.16)$$

Gli aspetti teorici ed analitici relativi alla barra di Hopkinson in tensione (Split Hopkinson Tension Bar) sono sostanzialmente identici a quelli descritti per i test su SHPB eccetto che per il segno e la forma di onde di tensione e dei segnali registrati. Infatti le onde incidente e trasmessa, ovvero le onde di tipo ‘*alfa*’ sulle barre di input e di output rispettivamente, divengono in questo caso onde di tensione mentre l’onda riflessa sulla barra di input diviene un’onda in compressione. Quest’ultima, proporzionale allo strain rate nominale, presenta solitamente un andamento crescente durante i test, mentre l’onda trasmessa alla output bar, proporzionale alle tensioni ingegneristiche sul provino, raggiunge un valore massimo per poi iniziare a decrescere al sopraggiungere di deformazioni localizzate e necking sul provino.

Le principali differenze costruttive tra gli apparati barra di Hopkinson in compressione ed in trazione possono essere riassunte in:

- Differente metodo di generazione delle onde di tensione
- Differenti geometrie dei provini
- Diversa connessione tra provini e barre

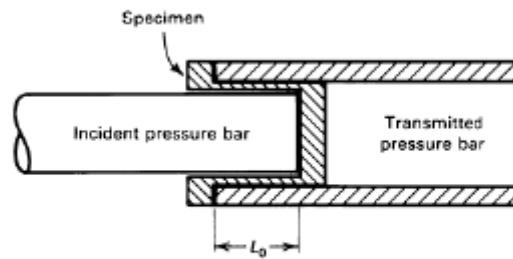
Contrariamente ai test ad elevato strain rate in compressione in cui si utilizza un provino cilindrico, per i test ad elevato strain rate in tensione viene utilizzato un provino filettato, nella maggioranza dei casi simile a quello utilizzato per test quasi statici in trazione ma di dimensioni ridotte. Poiché un test effettuato con Hopkinson Bar può fornire soltanto dati relativi allo spostamento relativo tra le estremità delle barre, deve essere utilizzata, per l’analisi dei dati sperimentali una gauge length effettiva, determinabile misurando le deformazioni lungo il provino durante un test di tipo quasi statico.

Al sopraggiungere del necking localizzato non è più possibile convertire i dati di forza e spostamento in dati di tipo sforzo e deformazione. Il range di utilizzo di test su Hopkinson bar può essere esteso dalla fotografia ad elevata velocità dei provini soggetti a necking. La maggiore difficoltà tecnica sta nella precisa sincronizzazione della registrazioni delle immagini registrate attraverso la macchina fotografica ad elevata velocità con gli effettivi istanti in cui si ha la deformazione del provino fino a eventuale rottura.



Figura C.2 - Provini per test ad elevata velocità di deformazione in tensione su Hopkinson Bar

Tra le differenti versioni di Hopkinson Bar in tensione vale la pena di descrivere brevemente le più diffuse ed efficaci: un primo tipo prevede l'utilizzo di una barra di input solida, mentre la barra di output consta di un tubo cavo. Il provino è dotato di geometria cava "a cappello" ed è essenzialmente composto di quattro barre in tensione di eguale sezione retta. Il principale vantaggio di tale tipo di tale tipo di apparato (figura C.3) consiste nel fatto che la generazione dell'impulso risulta identica a quella descritta per la barra di Hopkinson in compressione e che i test sono condotti in maniera identica. Il principale svantaggio è costituito dalla difficoltà di produzione del provino.



Specimen configuration

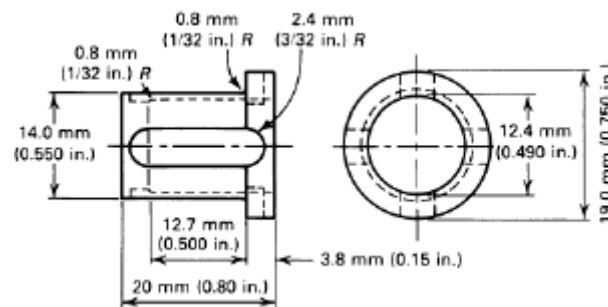


Figura C.3 – provino cavo per barra di Hopkinson in tensione
(ASM metal handbook Vol. 8 pag. 965)

Una seconda tipologia di SHTB prevede l'utilizzo di un provino filettato a "osso di cane" interposto tra le due barre. L'impulso è generato direttamente all'estremità della barra di input. Ciò è tipicamente ottenuto facendo impattare un proiettile tubolare accelerato tramite "gas gun" su un risalto anulare presente all'estremità della barra (vedi figura C.4). In alternativa l'onda di tensione può essere generata tramite la detonazione di esplosivo posto sull'estremità della barra provvista di risalto (figura C.5). Il principale svantaggio di questa soluzione consiste nella difficoltà di ottenere un impulso di ampiezza costante.

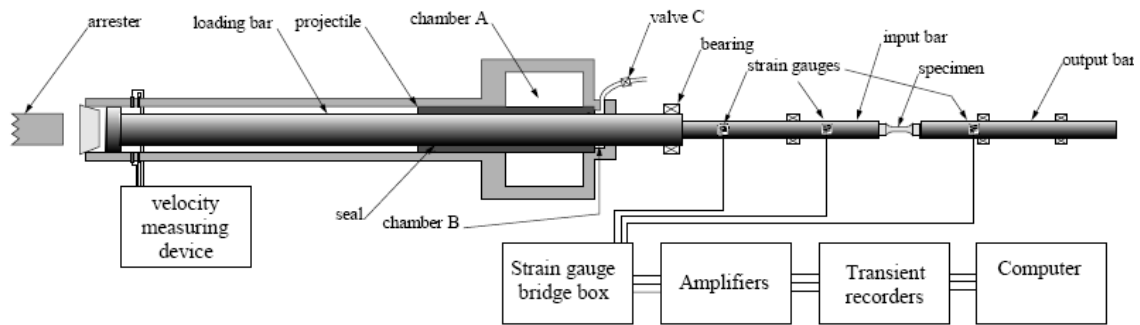


Figura C.4 – apparato SHTB (da N.Petricin “Impact Engineering” Lecture Notes, 2005)

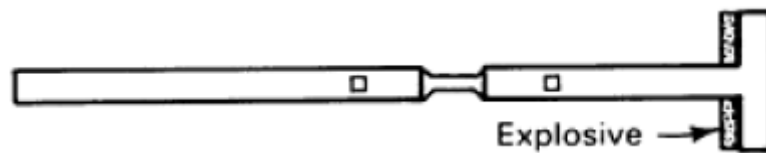


Figura C.5 – apparato SHTB generazione dell’onda di tensione per mezzo di esplosivo

Un’altra tipologia di barra di Hopkinson in tensione sta guadagnando popolarità negli ultimi anni. In questa versione l’onda di tensione è prodotta pre-caricando una porzione della barra di input grazie all’utilizzo di un incastro a rilascio rapido (figura C.6). Il rilascio improvviso dell’incastro produce un impulso della durata temporale pari al doppio del tempo necessario ad un onda di tensione a percorrere una distanza pari alla porzione di barra precaricata. I principali vantaggi dell’utilizzo di tale metodo sono una lunghezza delle onde di tensione facilmente regolabile ed una più uniforme distribuzione degli sforzi attraverso la sezione retta. Lo svantaggio consiste nell’utilizzo di un sistema abbastanza complesso (simile in tutto al sistema tipicamente utilizzato per barre di Hopkinson in torsione, Staab and Gilat 1991) composto da un incastro a “schiaccianoci” e da due cilindri idraulici, uno per il pretensionamento della barra e l’altro per la rottura del perno che consente il rapido rilascio dell’incastro (Staab and Gilat, 1991).

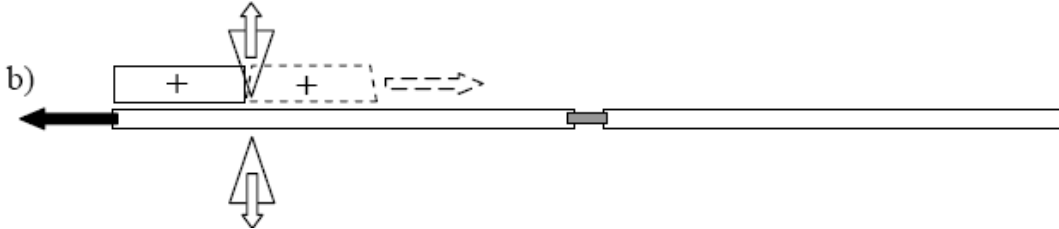


Figura C.6 – Barra di Hopkinson con porzione di barra di input precaricata

3.1 Miglioramenti nell'analisi dei dati da barra di Hopkinson

Tensioni e velocità delle particelle in una determinata sezione delle barre possono essere determinate dalle seguenti equazioni:

$$\sigma(x_G, t) = \alpha(x_G, t) + \beta(x_G, t) = E\varepsilon(x_G, t) \quad (C.17)$$

$$v(x_G, t) = \frac{\beta(x_G, t) - \alpha(x_G, t)}{\rho c} = \frac{\varepsilon(x_G, t)}{c} \quad (C.18)$$

In cui ' x_G ' indica la posizione longitudinale di un ipotetica sezione strumentata lungo la barra, ' ρ ' e ' c ' sono le densità e la velocità longitudinale di propagazione delle onde di tensione nel materiale rispettivamente. Gli spostamenti alle estremità del provino e le forze assiali su quest'ultimo sono determinate dalle:

$$\begin{aligned} \Delta u(t) &= u(x_{MAX}^{INP}, t) - u(x_{MIN}^{OUT}, t) = \\ &= \int_0^T v(x_{MAX}^{INP}, t) dt - \int_0^T v(x_{MIN}^{OUT}, t) dt = \end{aligned} \quad (C.19)$$

$$= \int_0^T \frac{\beta(x_{MAX}^{INP}, t) - \alpha(x_{MAX}^{INP}, t)}{\rho c} dt - \int_0^T \frac{\beta(x_{MIN}^{OUT}, t) - \alpha(x_{MIN}^{OUT}, t)}{\rho c} dt$$

$$F(t) = \frac{1}{2} [F(x_{MAX}^{INP}, t) + F(x_{MIN}^{OUT}, t)] =$$

$$= \frac{1}{2} \{A_{INP} [\alpha(x_{MAX}^{INP}, t) + \beta(x_{MAX}^{INP}, t)] + A_{OUT} [\alpha(x_{MIN}^{OUT}, t) + \beta(x_{MIN}^{OUT}, t)]\} \quad (C.20)$$

In cui x_{MAX}^{INP} ed x_{MIN}^{OUT} indicano le coordinate longitudinali dell'interfaccia barra di input – provino e barra di output – provino rispettivamente, A_{INP} ed A_{OUT} sono le sezioni rette di barra di input e barra di output, $F(x_{MAX}^{INP}, t)$ ed $F(x_{MIN}^{OUT}, t)$ sono le forze agenti sui due lati del provino in contatto con le barre.

Qualora un materiale molto duttile debba essere testato, la lunghezza dell'onda di tensione necessaria a portare il provino a rottura potrebbe essere maggiore della lunghezza della barra di input (impattore più lungo di metà della barra di input). In questo caso una sovrapposizione tra le onde di tensione incidente e riflessa (onde di tipo 'alfa' e 'beta') non può essere evitata, impedendo l'utilizzo delle equazioni (C.8) – (C.10) per l'analisi del comportamento meccanico ad elevato strain rate del materiale di interesse.

Il seguente algoritmo, utilizzato dai membri dell'Impact Engineering Lab dell'Università di Oxford per i test ad elevata velocità di deformazione implica l'utilizzo di due sezioni strumentate con estensimetri sulla barra di input. Esso permette la determinazione delle ampiezze delle onde incidenti e riflessa (onde di tipo 'alfa' e di tipo 'beta') quando la sovrapposizione di queste ultime non può essere evitata.

L'algoritmo può essere implementato in Matlab e permette di “disaccoppiare”, utilizzando i segnali registrati dalle tre sezioni strumentate con strain gauges (2 sulla barra di input e una sulla barra di output) le onde di tensione “alpha” e “beta” in

corrispondenza delle interfacce barre – provino nel tempo, e, quindi, di determinare attraverso le (C.19) e (C.20) le forze e gli spostamenti alle estremità del provino stesso.

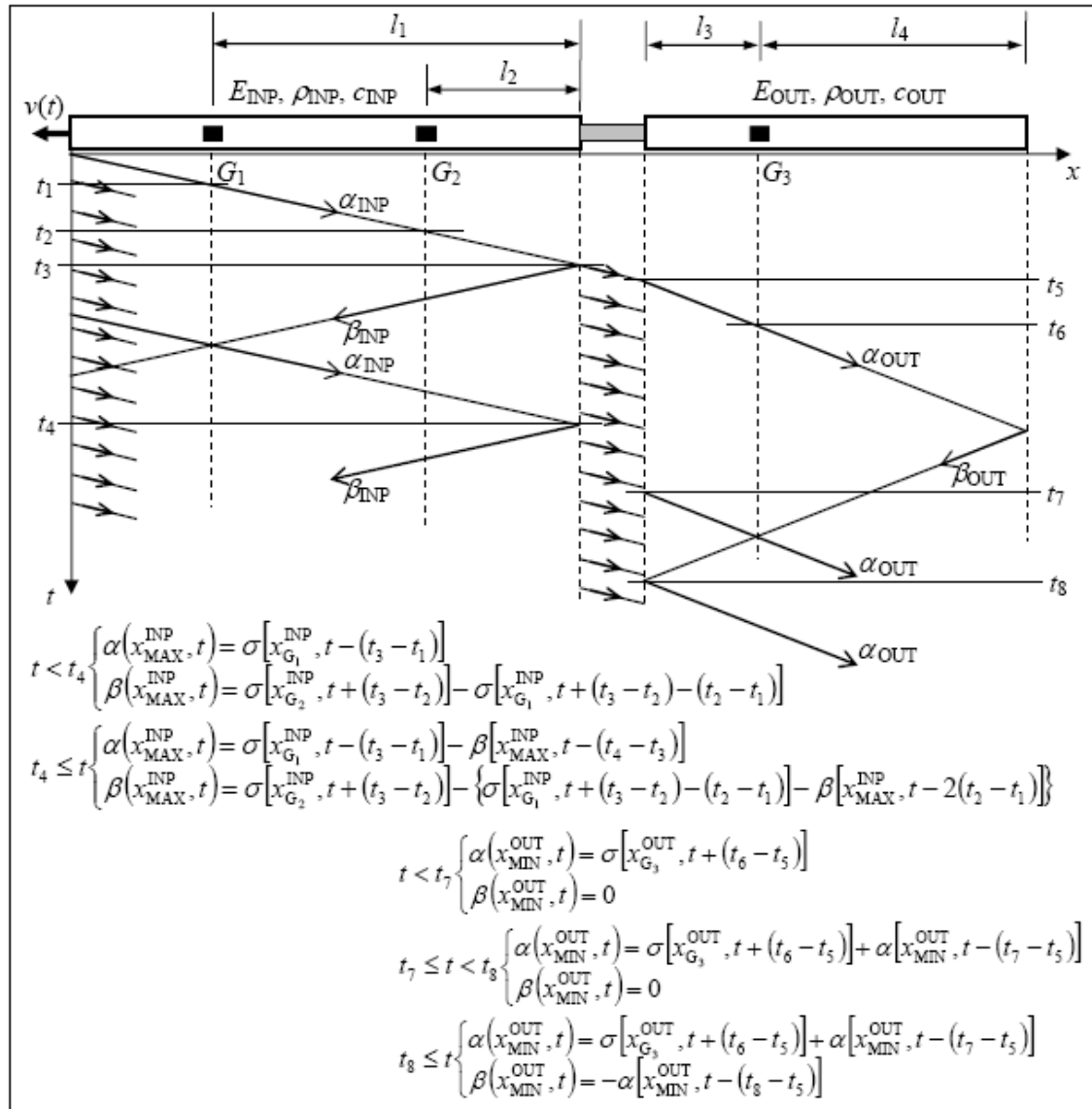


Figura C.7 : algoritmo per la determinazione delle onde di tensione ‘alpha’ e ‘beta’ nel caso in cui si presenti sovrapposizione temporale di queste ultime (N.Petricin, Impact Engineering lecture notes, 2005)

3.2 Verifica dell'equilibrio dinamico durante i test su Hopkinson Bar e validità dei test

Le equazioni classiche che legano le misure registrate dagli strain gauges al comportamento stress- strain nel provino che subisce deformazione richiede che vi sia equilibrio dinamico all'interno di quest'ultimo e, di conseguenza una deformazione uniforme. L'inerzia, sia longitudinale che radiale nel provino e i vincoli di attrito che si hanno nelle connessioni i quest'ultimo con le barre di input e di output si oppongono al raggiungimento di detto equilibrio.

Allo scopo di validare l'ottenimento dell'uniformità delle deformazioni e, quindi, la validità del test in questione, occorre paragonare gli stress sul provino, calcolati a partire dalle forze agenti alle due interfacce con le barre di input e di output:

- *Analisi degli stress all'interfaccia provino-barra di output.* Le tensioni risultano proporzionali alla deformazioni misurate sulla marra di output secondo la (C.9). gli stress in funzione del tempo così calcolati mostrano, tipicamente, un andamento con relative poche oscillazioni, in quanto il provino, deformandosi, smorza tutte le componenti in alta frequenza insite nell'onda incidente. Tale tipo di analisi riflette le condizioni che di anno nella parte di provino a contatto don la barra di output
- *Analisi degli stress all'interfaccia provino – barra di input.* La somma dei segnali sincronizzati delle onde incidente e riflessa (di segno opposto) registrati dagli strain gauges sulla barra di input è proporzionale agli stress che si hanno nella parte frontale del provino che volge verso la barra:

$$\sigma(t) = \frac{A_{INP}E_{INP}[\varepsilon_I(t) + \varepsilon_r(t)]}{A_S} \quad (C.21)$$

Sfortunatamente sia l'onda incidente che quella riflessa presentano parecchie oscillazioni, che, paragonate all'onda trasmessa, causano incertezza nell'interpretazione degli stress, specie in prossimità dello snervamento.

- Infine, un terzo tipo di analisi degli stress, prende in considerazione l'intero set delle tre forme d'onda registrate, incidente, riflessa e trasmessa. In questo caso l'andamento temporale degli stress è calcolato semplicemente come media delle due precedenti analisi e vale quindi:

$$\sigma(t) = \frac{A_{INP}E_{INP}[\varepsilon_I(t) + \varepsilon_r(t)] + A_{OUT} \cdot \varepsilon_T(t)}{2A_S} \quad (C.22)$$

L'equilibrio nel provino può essere verificato comparando i risultati delle tre analisi degli stress elencati sopra così come verificando la costanza dello strain rate. Quando vi è uniformità delle tensioni all'interno del provino gli stress ottenuti dall'analisi all'interfaccia con la barra di input oscillano attorno a quelli ottenuti attraverso l'analisi delle forze all'interfaccia provino – barra di output.

Le figure C.8 e C.9 mostrano il confronto tra le forze del provino calcolate alle due interfacce e l'andamento temporale dello strain rate. Come si nota le forze risultano simili a partire da un tempo pari a $3 \cdot 10^{-5}$ s mostrando che è stato ottenuto l'equilibrio dinamico all'interno del provino. Anche lo strain rate risulta sostanzialmente stabile, dimostrando che il test effettuato risulta valido ed accurato. L'ottenimento di uno strain rate sostanzialmente costante durante il test fornisce anche una validazione di un buon equilibrio tra lunghezza e velocità dello striker.

Al contrario, qualora lo stato tensionale non si presenti uniforme lungo il provino le forze calcolate all'interfaccia provino – barra di input divergono, eccedendo, talora notevolmente, i valori corrispondenti all'interfaccia con la barra di output.

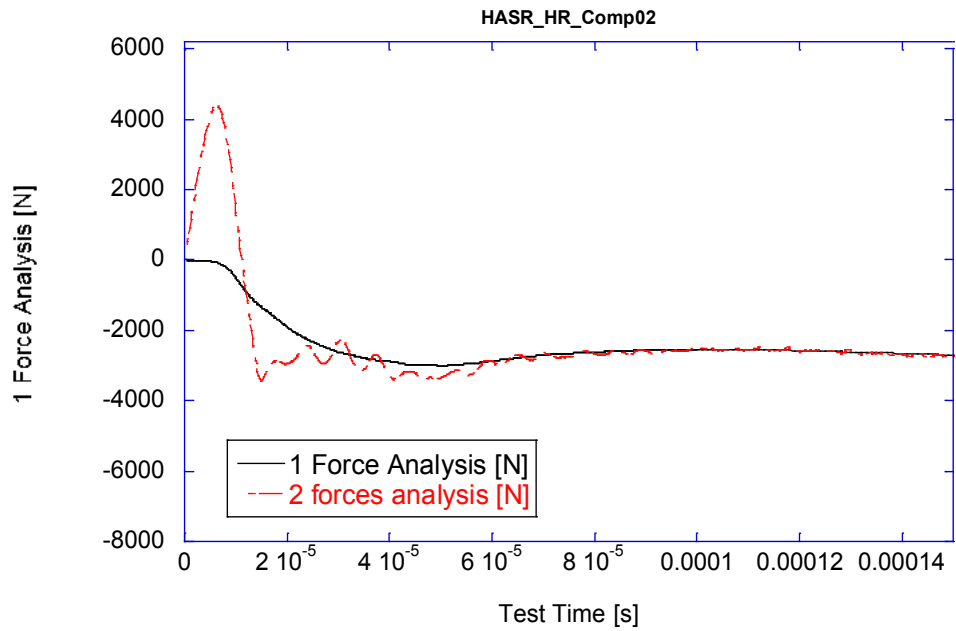


Figura C.8: confronto tra le forze agenti sul provino alle due interfacce con le barre di input e di output

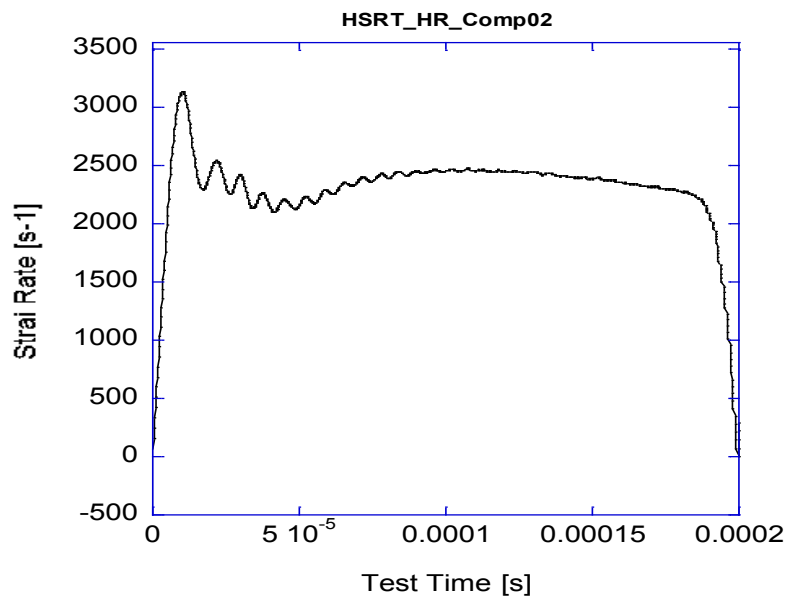


Figura C.9 : andamento temporale dello strain rate durante un test su SHPB

Alcuni materiali caratterizzati da una velocità longitudinale del suono ridotta, come ad esempio i materiali polimerici e le schiume da essi derivate, sono caratterizzati dal difficile raggiungimento dell'equilibrio dinamico. La figura C.10 mostra l'analisi delle forze in corrispondenza delle interfacce per un test in cui si ha raggiungimento parziale dell'equilibrio dinamico soltanto per valori di strain attorno al 10 %. L'andamento dello strain rate si presenta leggermente crescente per tutta la durata del test seppur possa essere considerato sostanzialmente stabile.

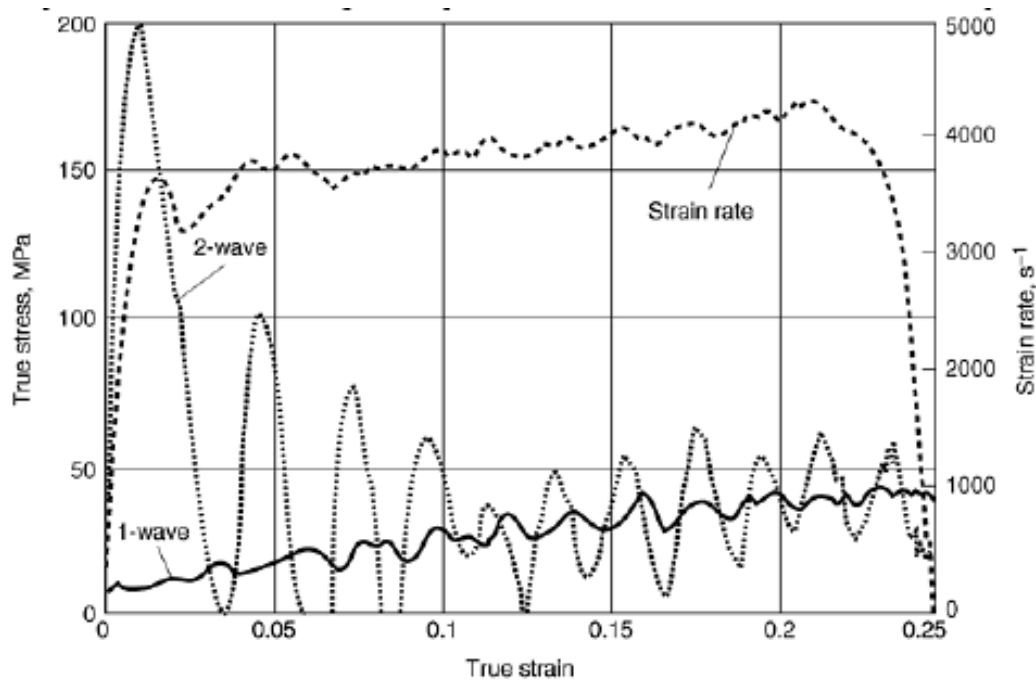


Figura C.10 : ritardo nell' equilibrio dinamico all'interno del provino

Per test ad elevata velocità di deformazione su materiali polimerici ed in generale su tutti i materiali caratterizzati da un rapporto tra rigidità e densità ridotto si raccomanda di utilizzare provini caratterizzati da un rapporto L/D tra lunghezza e diametro della sezione retta quanto più possibile ridotto. Gli errori dovuti alla inerzia radiale e

longitudinale, così come agli effetti di attrito possono essere ridotti scegliendo una geometria del provino che minimizzi la differenza tra le aree di provino e barre e che mantenga un rapporto L/D compreso tra 1.0 e 0.5.

Poiché occorre un determinato tempo per il raggiungimento dell'equilibrio dinamico non è possibile determinare il modulo elastico di un determinato materiale tramite prove sperimentali su Hopkinson bar. Infatti poiché in generale l'equilibrio avviene dopo un certo livello di strain più o meno elevato i dati relativi alla prima porzione di curva sforzo – deformazione non possono ritenersi attendibili.