

Software di Geometria Dinamica nell'insegnamento-apprendimento della geometria: esempi

Maria Flavia Mammana

Dipartimento di Matematica e Informatica – Università di Catania

fmammana@dmf.unict.it

1. Software di Geometria Dinamica

I Software di Geometria Dinamica (DGS) nascono alla fine degli anni '80. Il primo, *Cabri Géomètre*, viene presentato nel 1988 all'ICME 6 (*International Congress on Mathematical Education*) a Budapest. Negli anni a seguire tanti altri software analoghi a questo vengono sviluppati e proposti. Tra questi i più diffusi, accanto al primo, Geometer's Sketchpad e Geogebra. Una ampia lista si trova su Wikipedia, alla voce "[List_of_interactive_geometry_software](#)".

Ma cosa è un **DGS**? È un **S**oftware che permette di creare figure di **G**eometria e di gestirle in maniera **D**inamica. La figura viene costruita mediante l'uso di strumenti propri del software quali *Punto*, *Retta*, *Circonfenza*, *Retta perpendicolare*, *Retta parallela*, ... La figura ottenuta poi può essere manipolata mediante il "trascinamento" degli oggetti, mantenendo però le proprietà geometriche con cui è stata costruita.

La sempre maggiore diffusione dei DGS sta cambiando il modo in cui la geometria è insegnata nelle scuole. Essi permettono di lavorare in ambienti laboratoriali (secondo i suggerimenti dei curricula UMI) in cui gli

studenti confrontano idee, intuizioni, argomentazioni, e lavorano insieme per ottenere risultati utilizzando le loro capacità critiche in ambienti di apprendimento collaborativi (vedi il lavoro di E. Faggiano in questo stesso numero). In attività laboratoriali con l'utilizzo di DGS gli studenti si cimentano in attività di esplorazione, di congettura, di verifica, di dimostrazione.

In realtà, nonostante la grande diffusione delle tecnologie nelle scuole, a volte i docenti, per tradizione, cultura, usi, sono un po' restii all'innovazione. È altrettanto vero però che, generalmente, la loro "prevenzione" viene subito superata non appena essi stessi si rendono conto dei benefici che traggono dall'utilizzo del software, in termini di insegnamento, di attenzione e di coinvolgimento degli studenti.

Seguono alcuni esempi di attività che abbiamo sviluppato insieme a docenti della scuola secondaria di secondo grado che collaborano con noi all'interno nel Nucleo di Ricerca e Sperimentazione Didattica dell'Università di Catania.

Le attività che abbiamo sviluppato hanno impegnato i docenti per tutto l'anno scolastico (da Ottobre a Maggio). Le attività sono proposte agli studenti mediante schede (costruite insieme con i docenti) che hanno una forma tabellare a due colonne. La colonna di sinistra indica il nome dell'azione che poi viene richiesta a destra. Alcune azioni che abbiamo individuato sono: *costruzione, verifica, osserva, congettura, dimostrazione, definizione, ...* Non c'è una sequenza rigida con cui le azioni si susseguono nella scheda, e non è neanche detto che le azioni debbano essere tutte presenti nella stessa. Tra le azioni indicate figura anche *Invio al quaderno*, con cui si chiede allo studente di trascrivere su un proprio "quaderno" (che noi abbiamo chiamato "Quaderno dell'attività") definizioni e proprietà messe in luce via via. In tal modo, ogni studente, al completamento del laboratorio, dispone di un vero e proprio quaderno di appunti, che ha realizzato lui stesso, spesso di tipo elettronico (un file.doc).

2. Trasformazioni geometriche

"Chiunque decida di inserire (a piccole dosi o in modo massiccio) il tema delle trasformazioni geometriche nel suo insegnamento deve sapere che occorre lavorare con impegno e assiduità per non andare incontro a delusioni e insuccessi, come in passato è già avvenuto per altre innovazioni curriculari, introdotte con troppa faciloneria nelle nostre scuole" [V.Villani in Cominciamo dal Punto, 1995]. Infatti una trattazione tra-

dizionale del tema delle trasformazioni geometriche nell'insegnamento secondario generalmente è fatta mediante definizioni formali, esempi proprietà di base. L'insieme di nozioni così presentate agli studenti risulta loro difficile da acquisire. Inoltre, generalmente, l'argomento è trattato come capitolo a sé, privo di applicazioni nello sviluppo della geometria e gli studenti così non ne vedono l'utilità. Ecco dunque che il tema delle trasformazioni geometriche è spesso trascurato o non trattato affatto nelle scuole secondarie superiori.

La proposta didattica progettata si basa sull'uso del DGS e prevede che lo studente scopra definizioni, proprietà e applicazioni di alcune trasformazioni geometriche fondamentali.

Abbiamo scelto di presentare agli studenti ciascun tipo di trasformazione geometrica mediante una costruzione, senza utilizzare direttamente il corrispondente comando del DGSi (per intenderci abbiamo deciso di fare costruire agli studenti le "macro" delle trasformazioni). Questa scelta è stata fatta in modo che gli studenti capiscano bene il significato di ogni trasformazione. Riportiamo per esempio la costruzione indicata per la "traslazione" (il software da noi utilizzato è *Cabri Geometre*: nella scheda i comandi sono richiamati in grassetto corsivo).

TRASLAZIONE

Costruzione

Costruisci un **vettore** \overrightarrow{AB} e un **Punto** P.

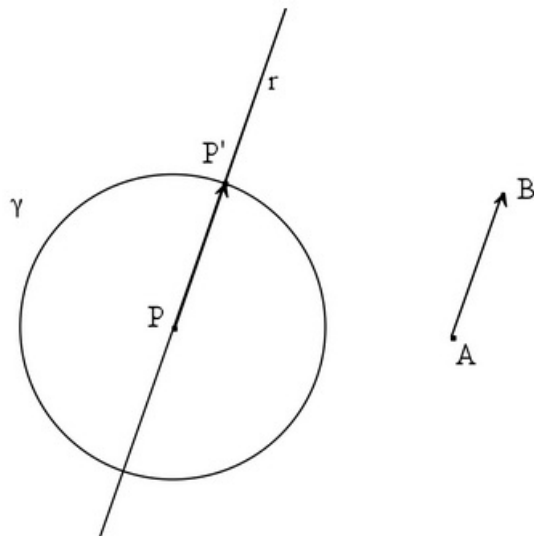
Costruisci la **retta parallela** al vettore \overrightarrow{AB} e passante per P.

Chiamala r.

Traccia con il **compasso** la circonferenza di raggio AB e centro P (con il **Puntatore** clicca nell'ordine sui punti A, B, P). Chiama tale circonferenza γ (vai su **nome**, clicca dentro la casella di testo col tasto destro del mouse, vai su **carattere**, poi **simbolo** e digita da tastiera la lettera g).

Costruisci, con **intersezione di due oggetti**, i punti comuni fra γ e r. Dei due punti trovati chiama P' quello per cui $\overrightarrow{PP'}$ è orientato nello stesso verso di \overrightarrow{AB} .

Costruisci il vettore $\overrightarrow{PP'}$.



TRASLAZIONE	
Osservazioni	Il vettore $\overrightarrow{PP'}$ è parallelo ad \overrightarrow{AB} Il vettore $\overrightarrow{PP'}$ ha lo stesso verso di \overrightarrow{AB} Il vettore $\overrightarrow{PP'}$ ha lo stesso modulo di \overrightarrow{AB} Cioè il vettore $\overrightarrow{PP'}$ è al vettore
Esplorazioni	Trascina uno dei punti P, A o B e con gli strumenti Parallelo? e Distanza o lunghezza verifica se le tue osservazioni sono ancora vere. SI - NO
Osservazioni	La costruzione permette di definire la funzione che a ogni punto P del piano associa il punto P' tale che il vettore $\overrightarrow{PP'}$ sia equivalente ad \overrightarrow{AB} . Tale funzione è una corrispondenza biunivoca tra i punti di uno stesso piano, cioè una trasformazione.
Definizione	Chiamiamo traslazione di vettore \overrightarrow{AB} la corrispondenza che ad ogni punto P associa il punto P' tale che il vettore che va da P a P' sia equivalente al vettore.
Invio al Quaderno	Trascrivi la definizione sul tuo "quaderno delle trasformazioni".
Strumenti di Cabri	Tra i comandi di Cabri, nel <i>Menu Trasformazioni</i> c'è lo strumento Traslazione , che dato un vettore costruisce il corrispondente di un punto, indicando prima il punto e poi il vettore.

Come si vede dalla scheda gli studenti, nella *Costruzione*, costruiscono oggetti secondo certe indicazioni, poi compiono delle *Esplorazioni*, *Osservazioni* ... Solo successivamente viene data la *Definizione*. Da questo momento in poi gli studenti possono utilizzare il comando Traslazione. La scheda è "molto guidata", ma è volutamente "guidata": TUTTI gli studenti della classe, bravi e meno bravi, devono capire per bene il concetto in questione. Comunque, in ogni scheda alcune parti sono sostituite da puntini che gli studenti devono riempire. Le prime schede sono molto guidate, mentre, andando avanti, le parti con i puntini sono sempre più frequenti.

L'attività continua poi con altri tipi di isometrie (simmetrie centrali, simmetrie assiali) e con le omotetie. Per ogni tipo di trasformazione sono state messe in evidenza le principali proprietà (presenza di punti uniti e di rette unite, proprietà di invarianza). Si esaminano poi alcune notevoli applicazioni riguardanti il triangolo mediale di un dato triangolo

(triangolo che ha per vertici i punti medi dei suoi lati), la retta di Eulero, il triangolo ortico (triangolo che ha per vertici i piedi delle sue altezze), la circonferenza di Feuerbach.

3. Dal piano allo spazio

La geometria dello spazio è indiscutibilmente più complessa di quella del piano. Essa presenta difficoltà sia di tipo concettuale sia difficoltà di tipo linguistico, ma soprattutto difficoltà nella realizzazione dei disegni in due dimensioni di figure a tre dimensioni: le rappresentazioni piane delle figure spaziali non possono mai essere fedeli perché non è possibile conservare tutte le lunghezze e le ampiezze degli angoli. Risultato è che, nella scuola secondaria di secondo grado, la geometria dello spazio è spesso trascurata quando non affrontata affatto.

I DGS vengono incontro agli studenti nel tentativo di recuperare l'interesse verso la geometria dello spazio ed ai docenti per aiutarli ad affrontare tali argomenti con maggiore facilità.

Esistono infatti diversi DGS 3D, cioè Software di Geometria Dinamica tridimensionali.

Essi permettono di cambiare il punto di vista dell'oggetto, di "muoverlo" nello spazio tridimensionale per osservarne meglio le caratteristiche.



Un'attività che abbiamo proposto è quella in cui gli studenti studiano alcune proprietà di un quadrilatero prima e poi le analoghe proprietà per un tetraedro.

Il passaggio dal piano allo spazio è fatto mediante lo strumento “*Ridefinizione di un punto*”: è dato un quadrilatero con le sue diagonali. *Ridefinendo* un vertice del quadrilatero e identificandolo con un nuovo punto dello spazio che non appartiene al piano degli altri tre vertici si ottiene un tetraedro. Et voilà! Con il maghetto Cabrì si passa dal piano allo spazio: i vertici del quadrilatero diventano i vertici del tetraedro, i lati e le diagonali del quadrilatero gli spigoli del tetraedro, le facce del quadrilatero quelle del tetraedro. Inoltre si osserva anche che proprietà di concorrenza nei quadrilateri, come la concorrenza delle bimediane, delle altezze, si mantengono anche per il tetraedro.

Anche questa volta abbiamo proposto agli allievi schede più o meno guidate (a seconda che si trattasse di classi intere o di classi ad hoc formate da studenti eccellenti provenienti da diverse scuole).

La manipolazione permessa da questi software ha mostrato, sia con studenti eccellenti che con classi intere, che la geometria dello spazio non è poi così inavvicinabile.

4. Proprietà algebriche nascoste

Il libro II degli *Elementi* di Euclide è noto come libro dell’algebra geometrica. Infatti, le proposizioni presentate in tale libro sono all’apparenza proposizioni di geometria che nascondono però ben note proprietà algebriche: la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, la formula del quadrato del binomio, del cubo del binomio, prodotti notevoli come la differenza di quadrati ...

Una rilettura delle proposizioni presenti nel libro II conduce quindi gli studenti alla scoperta di proprietà algebriche.

Per esempio la Proposizione 1 del Libro II afferma: *Se vi sono due segmenti e si divide uno di essi in un numero qualsiasi di segmenti, allora il rettangolo individuato dai due segmenti dati è equivalente alla somma dei rettangoli individuati dal segmento indiviso e da ciascuno dei segmenti in cui è stato suddiviso l’altro segmento dato.*

Letta la proposizione con gli studenti gli si chiede di rappresentarla graficamente con la seguente scheda:

Costruzione

Costruisci due **Segmenti** qualsiasi AB e CD.

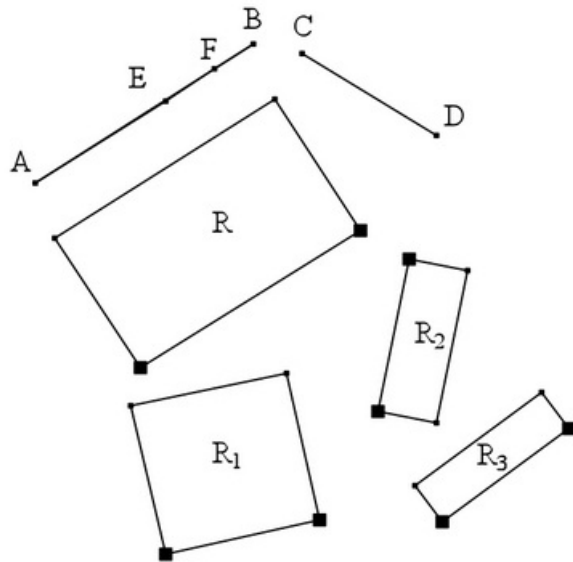
Su uno dei due segmenti, per esempio AB, segna a tuo piacimento un numero arbitrario di **Punti**, per esempio due, E ed F, come suggerito in figura.
Costruisci i **Segmenti** AE, EF e FB.

Con il simbolo $R(AB,CD)$ indica un rettangolo di lati uguali ad AB e CD.

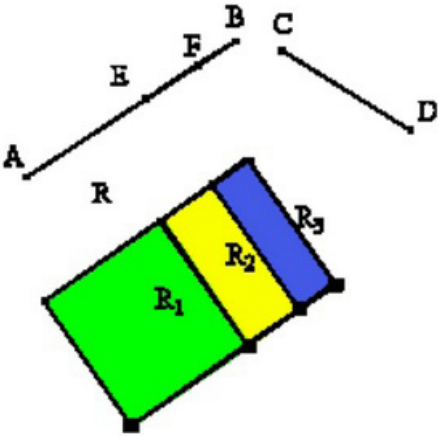
Con la macro **Quadrato-Rettangolo** costruisci un rettangolo $R(AB,CD)$, cliccando su un punto qualsiasi, e chiamalo R.

Con la macro **Quadrato-Rettangolo** costruisci:

- un rettangolo $R(AE,CD)$ e chiamalo R_1 ;
- un rettangolo $R(EF,CD)$ e chiamalo R_2 ;
- un rettangolo $R(FB,CD)$ e chiamalo R_3 .



Utilizza il comando **Riempimento** per colorare con colori diversi i rettangoli R_1 , R_2 , R_3 .

<p>Esplorazioni</p>	<p>Trascinando i punti evidenziati, blu o rossi, trasla o ruota opportunamente i rettangoli R₁, R₂ e R₃ in modo da ricoprire esattamente il rettangolo R.</p> 
<p>Verifica</p>	<p>LHai verificato con <i>Cabri</i> la Proposizione 1P, cioè:</p> $R(AB,CD) = R(AE,CD) + R(EF,CD) + R(FB,CD)$ <p>Puoi verificare ulteriormente la validità di tale relazione calcolando l'Area dei quattro rettangoli e utilizzando la Calcolatrice.</p> <p>Sposta adesso i punti E ed F (senza modificare l'ordine) e verifica che i rettangoli R₁, R₂ e R₃ ricoprono ancora il rettangolo R, riposizionandoli se occorre.</p>

Interpretazione algebrica della Proposizione 1P

Indica con a, b, c, d le misure dei segmenti da te costruiti. Poni:

$$\overline{CD} = a, \overline{AE} = b, \overline{EF} = c, \overline{FB} = d$$

Passando alle aree dei rettangoli, la relazione precedente può essere scritta:

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

Hai ritrovato per via geometrica la **proprietà** **della moltiplicazione rispetto all'addizione:**

il prodotto di un numero per una somma indicata è uguale

.....

La macro **Quadrato-Rettangolo** è uno strumento che abbiamo costruito e caricato sui computer degli studenti. Esso permette di costruire un quadrato o un rettangolo, note le sue dimensioni.

E sì! La **Definizione della Macro** di *Cabri* permette di costruire nuovi comandi indicando oggetti iniziali e oggetti finali di una costruzione. E' un comando fantastico! Spesso sottovalutato dai docenti. Nasconde grandi potenzialità didattiche. Ma questa è tutta un'altra storia ...