

Analisi elastoplastica di pali soggetti a forze orizzontali in testa

E. MOTTA*

SOMMARIO. Nella pratica corrente il problema dei pali soggetti a forze orizzontali in testa viene di norma affrontato con le note soluzioni elastiche in forma adimensionale di Matlock e Reese. Queste ultime, tuttavia, non prendono in considerazione il possibile raggiungimento di stati di plasticizzazione del terreno all'intorno del palo e inoltre non tengono conto della non linearità delle curve carico-spostamenti orizzontali, che è osservabile sperimentalmente. Un modo più completo e corretto per l'analisi è costituito dall'utilizzo della modellazione con curve p-y, potendosi in questo modo prendere in considerazione anche «l'aspetto plastico» del problema. Tale tecnica risolutiva è di norma di tipo numerico e richiede l'uso di codici di calcolo più o meno sofisticati la cui utilizzazione potrebbe non essere giustificata se non si hanno informazioni di dettaglio sul terreno. Nel presente articolo viene presentata una soluzione alternativa attraverso una modellazione del complesso palo-terreno effettuata con curve di trasferimento p-y di tipo elastico-perfettamente plastico. Tale modellazione permette di ricavare una soluzione approssimata in forma chiusa che fornisce l'estensione della zona di plasticizzazione del terreno in cui è immerso il palo, come anche le caratteristiche di sollecitazione e la deformata del palo. Il tener conto della resistenza ultima del terreno fa ritenere che i risultati possano essere più realistici rispetto a quelli deducibili da una semplice teoria elastica.

Sono inoltre presentate alcune espressioni in forma adimensionale che permettono di generalizzare la soluzione in termini di spostamento orizzontale alla testa del palo, nei casi di resistenza limite orizzontale del terreno costante o variabile con la profondità con legge triangolare. Sono presi in considerazione sia il caso di palo libero in testa che il caso di palo incastrato.

Vengono infine mostrati alcuni confronti con prove di carico su pali strumentati in vera grandezza sia per validare il modello proposto sia per stimare quale possa essere l'ordine di grandezza delle rigidità dei legami costitutivi delle curve p-y da utilizzare in un modello elastico-perfettamente plastico.

1. Introduzione

Il comportamento di un palo soggetto a forze orizzontali in testa, è un classico esempio di interazione terreno-struttura che ricorre assai di frequente nel campo ingegneristico. La soluzione di un tale problema consiste nella valutazione degli spostamenti del palo, delle reazioni offerte dal terreno al movimento del palo e delle conseguenti caratteristiche di sollecitazione. Una modellazione frequentemente utilizzata è quella di considerare il palo immerso in un letto di molle elastiche alla Winkler e quindi caratterizzate da una proporzionalità tra reazioni del terreno e spostamenti del palo. La costante di proporzionalità, o modulo di reazione orizzontale del terreno, è strettamente dipendente dalle caratteristiche geomeccaniche del terreno medesimo, anche se non può considerarsi una caratteristica intrinseca dello stesso, dipendendo da vari fattori fra cui il diametro del palo. Con una modellazione di tipo elastico, la determinazione delle caratteristiche di deformazione e di sollecitazione può essere agevolmente affrontata attraverso tecniche analitiche o numeriche. Si ricordano al proposito le note soluzioni di MATLOCK e REESE [1960] fornite in forma adimensionale. Il pregio di tale modellazione consiste nella semplicità concettuale ed al tempo stesso nella attendibilità dei risultati, almeno sotto certe condizioni di carico. Un difetto non trascurabile è invece quello

di non tenere conto del possibile raggiungimento delle condizioni di plasticizzazione del terreno e quindi della resistenza limite del terreno alle azioni orizzontali; cosicché, quanto maggiori sono le azioni orizzontali applicate alla testa del palo, tanto maggiore può essere la divergenza della soluzione elastica dalla realtà fisica, sia in termini di deformata che di caratteristiche di sollecitazione.

Un modo completamente differente di affrontare il problema è quello suggerito da BROMS [1964a, 1964b] che considera il terreno, come anche il palo, a comportamento rigido-plastico, distinguendo i possibili meccanismi di rottura del sistema palo-terreno. In quest'ultimo caso si prescinde dall'esame dell'aspetto deformativo, assumendo che venga mobilitata la resistenza limite del terreno, indipendentemente dall'entità degli spostamenti. Tale modo di procedere permette di risalire alla forza orizzontale limite che produce il collasso del sistema palo-terreno.

Un utile e conveniente superamento dei modelli precedenti è costituito dall'uso delle curve p-y [MATLOCK, 1970; MATLOCK *et al.*, 1975], che legano l'entità del carico p trasmesso al terreno con il valore dello spostamento orizzontale y del palo. Le curve p-y, quindi, permettono di tenere conto degli aspetti deformativi del complesso palo-terreno, come anche dell'eventuale plasticizzazione del terreno. Il problema fondamentale di tale modellazione è quello di determinare correttamente il tipo curve p-y. Comunemente si fa riferimento a curve p-y di tipo iper-

* Ricercatore, Facoltà di Ingegneria, Università di Catania.

bolico o anche a forma di parabola cubica; [MATLOCK 1970; ROBERTSON *et al.*, 1989]. In entrambi i casi, per la caratterizzazione delle curve, è necessaria la conoscenza di due parametri caratteristici. Per le curve di tipo iperbolico i parametri sono costituiti dalla pendenza all'origine della curva e dalla resistenza limite del terreno alle azioni orizzontali. Per le curve paraboliche sono necessari la conoscenza della resistenza limite alle azioni orizzontali e il valore dello spostamento corrispondente alla mobilitazione del 50% della resistenza limite. L'utilizzo delle curve p-y è una valida metodologia che permette di simulare in maniera sufficientemente fedele il meccanismo di interazione palo-terreno; tuttavia essa richiede l'applicazione di metodi numerici e quindi di programmi di calcolo più o meno sofisticati la cui applicazione potrebbe non essere giustificata se non si hanno informazioni di dettaglio sul terreno e quindi sulla «forma» delle stesse curve p-y. In tali circostanze, se si rinuncia alla modellazione rigorosa dei legami costitutivi p-y e si utilizzano curve a comportamento elastico-perfettamente plastico, come ad esempio illustrato in Fig. 1, è possibile risalire ad una soluzione elastoplastica approssimata in forma chiusa che permette di valutare la risposta del complesso palo-terreno, con facile ed immediata applicazione.

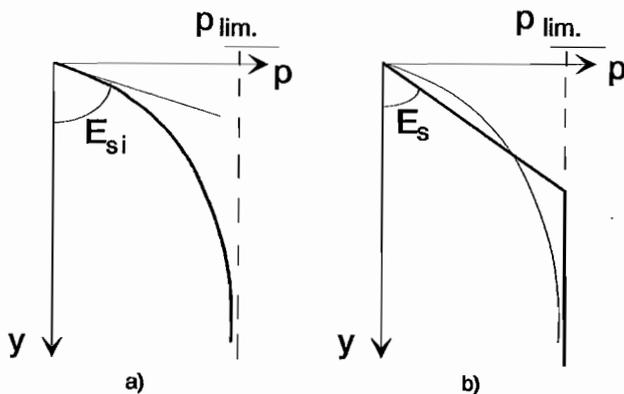


Fig. 1 - Possibili curve p-y in un'analisi elastoplastica: a) legame iperbolico; b) legame elastico-perfettamente plastico.

2. Modellazione attraverso curve p-y elastiche perfettamente plastiche

Per la soluzione che viene presentata vengono fatte le seguenti ipotesi di base:

- 1) il palo è a sezione costante per tutta la profondità e si comporta come un materiale perfettamente elastico;
- 2) il palo è libero di traslare e di ruotare in testa ed è soggetto ad una azione orizzontale H_0 e ad una coppia M_0 ;

- 3) le curve p-y che rappresentano l'interazione tra palo e terreno hanno comportamento elastico-perfettamente plastico;
- 4) la resistenza limite del terreno alle azioni orizzontali varia linearmente con la profondità, potendo assumere al piano di campagna anche valore non nullo;
- 5) la pendenza E_s delle curve p-y si mantiene costante con la profondità.

L'ultima delle ipotesi suddette è forse la più debole dal momento che, di norma, per i terreni incoerenti o per i terreni coesivi normalmente consolidati, è più corretto assumere una variazione lineare di E_s con la profondità. A tale limitazione può in parte ovviarsi tenendo conto in qualche misura di un valore di E_s mediato lungo una profondità significativa del palo. L'ipotesi di E_s costante, comunque, regge assai bene se ci si riferisce ai terreni coesivi sovraconsolidati per i quali di norma è lecito ritenere che la rigidità delle curve p-y, come anche la resistenza laterale limite, siano costanti con la profondità.

Le ipotesi suddette conducono all'interazione palo-terreno sinteticamente illustrata in Fig. 2, in cui vengono distinte due zone. Nella zona 1, a causa dei maggiori spostamenti del palo, viene attinta la resistenza laterale limite alle azioni orizzontali e quindi il terreno è «plasticizzato». Punti come A sono quindi ad uno stato plastico nelle corrispondenti curve p-y. Nella zona 2, a comportamento «elastico», gli spostamenti orizzontali non sono sufficienti a fare attingere il valore limite della reazione laterale del terreno; i punti come C nella zona 2 sono pertanto in uno stato «elastico» nelle corrispondenti curve p-y. Il punto B, posto ad una profondità z_p

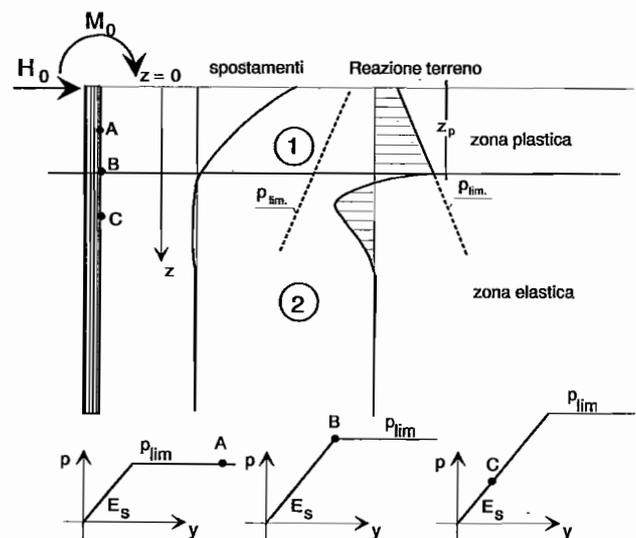


Fig. 2 - Schema dell'interazione palo-terreno con curve p-y elastiche-perfettamente plastiche.

dalla superficie, rappresenta il confine fra comportamento plastico ed elastico delle curve p-y. Naturalmente, maggiori sono le azioni orizzontali H_0 e M_0 applicate alla testa del palo, maggiore sarà l'estensione della zona plastica: pertanto z_p risulta funzione di H_0 e M_0 .

Per la soluzione del problema si può ricorrere alla equazione della linea elastica di un palo [HETENYI, 1946]:

$$E I y^{IV}(z) = p(z) \quad (1)$$

nella quale:

E = modulo di Young del palo

I = momento di inerzia della sezione trasversale del palo

$y(z)$ = spostamento orizzontale del palo alla profondità z

$p(z)$ = reazione orizzontale del terreno alla profondità z

La (1) è una equazione differenziale del quarto ordine, che può essere risolta definendo il valore di $p(z)$ ed imponendo le opportune condizioni al contorno. In questo caso tuttavia è necessario distinguere il valore di $p(z)$ nella zona a comportamento plastico da quello relativo alla zona a comportamento elastico. Se, come detto nelle ipotesi, la resistenza limite varia linearmente con la profondità, segue che

nella zona 1:

$$p_1(z) = -(p_0 + \beta z) \quad (z < z_p) \quad (2)$$

nella zona 2:

$$p_2(z) = -E_s y(z) \quad (z > z_p) \quad (3)$$

dove:

p_0 = carico laterale limite alla quota $z=0$ ($F L^{-1}$)

β = pendenza della legge di variazione del carico limite laterale ($F L^{-2}$)

E_s = pendenza delle curve p-y nel tratto elastico ($F L^{-2}$)

L'Eq. (1) pertanto, porta alla definizione di due differenti funzioni, y_1 e y_2 , rispettivamente per la zona plastica e per quella elastica e quindi alla definizione di 8 costanti di integrazione da definire in base alle condizioni al contorno. A tali costanti va inoltre aggiunta un'ulteriore incognita rappresentata dalla profondità z_p della zona plastica. In definitiva occorrerebbe risolvere un sistema di 9 equazioni in nove incognite. Il sistema è, comunque, disaccoppiato, cosicché è possibile risalire ai valori delle incognite con il procedimento che di seguito si illustra.

Campo Plastico

Nella zona plastica (zona 1), la reazione del terreno ha attinto il valore limite, cosicché tale valore $p(z)$, e quelli del taglio $T(z)$, del momento flettente $M(z)$, della rotazione $\Phi(z)$ e dello spostamento $y(z)$ valgono rispettivamente:

$$\begin{aligned} p_1(z) &= E I y_1^{IV} = -(p_0 + \beta z) \\ T_1(z) &= E I y_1^{III} = -p_0 z - \beta z^2/2 + C_1 \\ M_1(z) &= E I y_1^{II} = -p_0 z^2/2 - \beta z^3/6 + C_1 z + C_2 \\ \Phi_1(z) &= y_1^I = (-p_0 z^3/6 - \beta z^4/24 + C_1 z^2/2 + C_2 z + C_3)/E I \\ y_1(z) &= (-p_0 z^4/24 - \beta z^5/120 + C_1 z^3/6 + C_2 z^2/2 + C_3 z + C_4)/E I \end{aligned} \quad (4)$$

Le condizioni al contorno alla testa del palo ($z=0$), porgono:

$$E I y_1^{II}(0) = M_0 \quad (5)$$

$$E I y_1^{III}(0) = H_0 \quad (6)$$

da cui:

$$C_1 = H_0 \quad (7)$$

$$C_2 = M_0 \quad (8)$$

e quindi le (8) possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned} p_1(z) &= E I y_1^{IV} = -(p_0 + \beta z) \\ T_1(z) &= E I y_1^{III} = -p_0 z - \beta z^2/2 + H_0 \\ M_1(z) &= E I y_1^{II} = -p_0 z^2/2 - \beta z^3/6 + H_0 z + M_0 \\ \Phi_1(z) &= y_1^I = (-p_0 z^3/6 - \beta z^4/24 + H_0 z^2/2 + M_0 z + C_3)/E I \\ y_1(z) &= (-p_0 z^4/24 - \beta z^5/120 + H_0 z^3/6 + M_0 z^2/2 + C_3 z + C_4)/E I \end{aligned} \quad (9)$$

Campo Elastico

Nella zona 2 (zona a comportamento elastico delle curve p-y), l'equazione della linea elastica del palo si scrive:

$$E I y_2^{IV} + E_s y = 0 \quad (10)$$

ponendo:

$$\lambda = (4 E I / E_s)^{1/4} \quad (11)$$

La soluzione della (10) è data dall'espressione:

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{-z/\lambda} [C_5 \sin(z/\lambda) + C_6 \cos(z/\lambda)] + \\ &+ e^{z/\lambda} [C_7 \sin(z/\lambda) + C_8 \cos(z/\lambda)] \end{aligned} \quad (12)$$

I pali di fondazione, per gli usuali valori delle loro caratteristiche geometriche e meccaniche e delle caratteristiche meccaniche del terreno, sono strutture di elevata snellezza ed in termini di modello alla

Winkler possono essere considerati infinitamente lunghi ($L/\lambda > 5$). Sotto tali ipotesi allora non si commette un errore apprezzabile se nella (12) si omettono i termini crescenti in z . Si può scrivere quindi:

$$y_2 = e^{-z/\lambda} [C_5 \sin(z/\lambda) + C_6 \cos(z/\lambda)] \quad (13)$$

Va osservato che per la valutazione della snellezza, in questo caso più che al valore della lunghezza complessiva L del palo, deve farsi riferimento alla lunghezza del tratto $L_e = L - z_p$ in cui le curve p - y hanno comportamento elastico. Poiché tuttavia il valore di z_p è di norma piccolo rispetto ad L , il valore della snellezza non si modifica sostanzialmente. Cosicché la reazione del terreno, il taglio, il momento flettente, la rotazione e lo spostamento del palo nella zona elastica possono scriversi rispettivamente:

$$p_2(z) = E I y_2^{IV} = -E_s e^{-z/\lambda} [C_5 \sin(z/\lambda) + C_6 \cos(z/\lambda)]$$

$$T_2(z) = E I y_2^{III} = -2 E I e^{-z/\lambda} [-C_5 \sin(z/\lambda) + \cos(z/\lambda) + C_6(\sin(z/\lambda) - \cos(z/\lambda))]/\lambda^3$$

$$M_2(z) = E I y_2^{II} = E I e^{-z/\lambda} [-C_5 \cos(z/\lambda) + C_6 \sin(z/\lambda)]/\lambda^2 \quad (14)$$

$$\Phi_2(z) = y_2^I = -e^{-z/\lambda} [C_5(\sin(z/\lambda) - \cos(z/\lambda)) + C_6(\cos(z/\lambda) + \sin(z/\lambda))]/\lambda$$

$$y_2(z) = e^{-z/\lambda} [C_5 \sin(z/\lambda) + C_6 \cos(z/\lambda)]$$

Con C_5 e C_6 costanti da determinare sulla base delle condizioni al contorno.

Alla quota z_p dovrà ovviamente aversi:

$$\begin{aligned} M_1(z_p) &= M_2(z_p) \\ T_1(z_p) &= T_2(z_p) \\ y_2(z_p) &= (p_0 + \beta z_p)/E_s \end{aligned} \quad (15)$$

Le (15), dopo qualche passaggio che si omette per brevità di esposizione, conducono alla seguente relazione:

$$B(z_p) - A(z_p) - C(z_p) = 0 \quad (16)$$

dove:

$$A(z_p) = (p_0 + \beta z_p) / E_s \quad (17)$$

$$B(z_p) = (-p_0 z_p^2/2 - \beta z_p^3/6 + H_0 z_p + M_0)\lambda^2 / (2 E I) \quad (18)$$

$$C(z_p) = (p_0 z_p + \beta z_p^2/2 - H_0) \lambda^3 / (2 E I) \quad (19)$$

Sostituendo i valori di $A(z_p)$, $B(z_p)$, $C(z_p)$ nella (16), si ottiene la seguente equazione di 3° grado che fornisce la quota z_p di passaggio tra le condizioni «plastiche» e quelle «elastiche» delle curve p - y :

$$\beta z_p^3 + 3(p_0 + \lambda\beta)z_p^2 + 6(p_0\lambda + \lambda^2\beta/2 - H_0) \cdot z_p - 6(M_0 + H_0\lambda - p_0\lambda^2/2) = 0 \quad (20)$$

Caso di resistenza laterale variabile linearmente con la profondità

Se β è diverso da zero, l'equazione può essere risolta per via numerica o attraverso le soluzioni note che qui si richiamano brevemente.

Posto:

$$\begin{aligned} m &= (2\beta H_0 + p_0^2)/\beta^2 \\ n &= (3\beta p_0 H_0 - 3\beta^2 M_0 + p_0^3 - \lambda^3 \beta^3/2)/\beta^3 \\ Q &= n^2 - m^3 \end{aligned}$$

Se $Q > 0$, allora l'unica radice reale è data da:

$$z_p = M + N - p_0 / \beta - \lambda$$

dove:

$$M = (-n + Q^{1/2})^{1/3}$$

$$N = (-n - Q^{1/2})^{1/3}$$

Se $Q < 0$, allora esistono 3 radici reali distinte fra le quali ricercare l'eventuale unica soluzione compatibile con le condizioni al contorno ($0 < z_p < L$), e precisamente:

$$\begin{aligned} z_{p1} &= 2(m)^{1/2} \cos(\theta/3) - p_0/\beta - \lambda \\ z_{p2} &= -2(m)^{1/2} \cos(\theta/3 + 60^\circ) - p_0/\beta - \lambda \\ z_{p3} &= -2(m)^{1/2} \cos(\theta/3 - 60^\circ) - p_0/\beta - \lambda \end{aligned}$$

essendo:

$$\cos(\theta) = -n/(m)^{3/2}$$

Caso di resistenza laterale costante con la profondità

In questo caso ($\beta = 0$), la soluzione si semplifica, divenendo la (20) un'equazione di 2° grado. Si ottiene così:

$$z_p = H_0/p_0 + (H_0^2/p_0^2 + 2M_0/p_0)^{1/2} - \lambda \quad (21)$$

Segue che la minima forza orizzontale H_{\min} necessaria a plasticizzare il terreno risulta:

$$H_{\min} = p_0\lambda/2 - M_0/\lambda \quad (22)$$

Se la coppia M_0 è provocata dalla stessa forza orizzontale con eccentricità «e», si ricava:

$$H_{\min} = p_0\lambda/[2(1 + e/\lambda)] \quad (23)$$

Per valori di H_0 minori di H_{\min} , l'interazione palo-terreno è puramente elastica ed il modello cade in difetto.

Una volta determinato il valore della profondità della zona plastica z_p , si possono ricavare tutte le altre costanti necessarie alla definizione del problema. In particolare risulta:

$$C_5 = e^{z_p/\lambda} [A(z_p)\sin(z_p/\lambda) - B(z_p)\cos(z_p/\lambda)] \quad (24)$$

$$C_6 = e^{z_p/\lambda} [A(z_p)\cos(z_p/\lambda) + B(z_p)\sin(z_p/\lambda)] \quad (25)$$

Imponendo ancora la congruenza delle rotazioni e degli spostamenti alla profondità $z = z_p$, si ricavano i valori delle restanti costanti C_3 e C_4 presenti nelle (9):

$$C_3 = \beta z_p^4 / 24 + \lambda \beta z_p^3 / 12 + p_0 \lambda z_p^2 / 4 + p_0 z_p^3 / 6 - p_0 \lambda^3 / 4 - \lambda^3 \beta z_p / 4 - H_0 z_p^2 / 2 - M_0 z_p - H_0 \lambda z_p / 2 - M_0 \lambda / 2 \quad (26)$$

$$C_4 = p_0 \lambda^4 / 4 + \beta \lambda^4 z_p / 4 + p_0 z_p^4 / 24 + \beta z_p^5 / 120 - H_0 z_p^3 / 6 - M_0 z_p^2 / 2 - C_3 z_p \quad (27)$$

Questi ultimi due valori, divisi per la rigidezza flessionale (EI) del palo, forniscono rispettivamente la rotazione e lo spostamento orizzontale alla testa del palo:

$$\Phi_0 = C_3 / EI \quad (28)$$

$$y_0 = C_4 / EI \quad (29)$$

Sostituendo infine i valori delle costanti C_3 , C_4 , C_5 e C_6 nelle (9) e (14), la deformata e le sollecitazioni del palo risultano del tutto determinate.

A titolo di esempio, nelle Figg. 3 e 4 sono riportati i tipici risultati deducibili dalla analisi presentata per il caso di un palo circolare di diametro $D = 0.80$ m e di lunghezza $L = 24$ m, soggetto ad una forza e ad una coppia in testa. Il terreno è stato ipotizzato di tipo incoerente e sotto falda, con angolo di attrito $\varphi' = 35^\circ$ e con peso sommerso dell'unità di volume pari a $\gamma' = 10$ kN/m³. Il valore della resistenza limite è stato assunto con legge di variazione lineare con la profondità con valore nullo a quota $z = 0$ ($p_0 = 0$) e con pendenza $\beta = N_\phi D K_p \gamma'$ [BROMS, 1964b], con $N_\phi = 3$. Per il palo si è considerato un modulo di Young $E = 25.000$ MPa (250.000 Kg/cm²), mentre come valore della rigidezza delle molle simulanti il tratto elastico delle curve p-y, si è preso un valore $E_s = 200.000$ kN/m². Questo è stato desunto considerando per E_s una legge del tipo $E_s = n_h z$, con $n_h = 1.5$ kN/cm³ e prendendone un valore mediato sui primi dieci diametri del palo. La forza orizzontale H_0 applicata alla testa del palo è stata fatta variare tra 50 e 500 kN, considerando anche il caso di una coppia di intensità $M_0 = H_0 \times 0.50$ m. E' utile osservare dalla Fig.3, come, a dispetto delle ipotesi semplificative adottate nel modello, questo permette

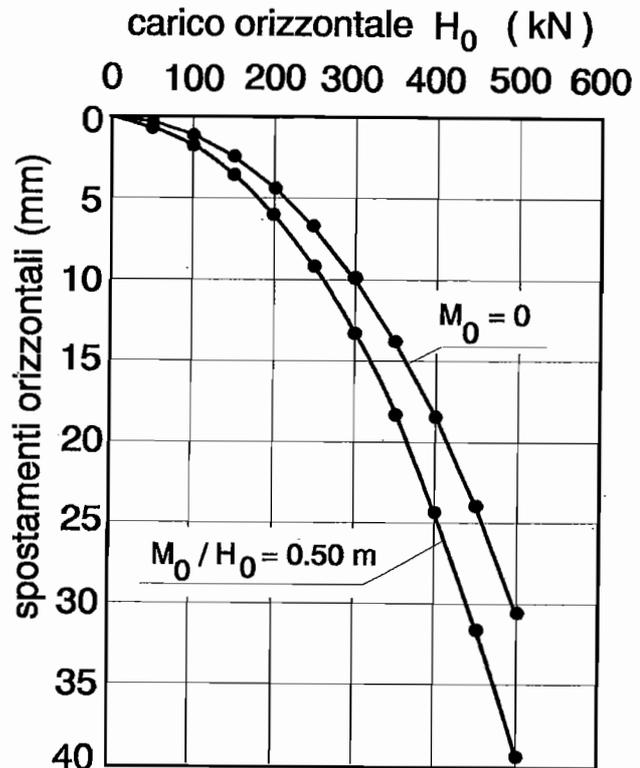


Fig. 3 - Curve teoriche forze-spostamenti in testa deducibili dall'analisi.

di cogliere in modo apprezzabile la non linearità del legame forze-spostamenti. La Fig. 4 riporta la deformata, il taglio, il momento flettente e le reazioni del terreno valutati per $H_0 = 500$ kN e $M_0 = 0$. Per quest'ultimo caso si è determinata una profondità della zona plastica $z_p = 4.37$ m. Il massimo momento flettente desunto dall'analisi è pari a circa 1120 kNm. È significativo osservare che, se si assume tale valore come momento ultimo del palo, la teoria di Broms fornisce un valore di H_{max} praticamente coincidente con il valore di H_0 utilizzato nell'esempio.

3. Soluzioni adimensionali

L'Eq. (20) può essere convenientemente riscritta in termini adimensionali nel seguente modo:

$$\frac{\lambda^2 \beta}{H_0} t^3 + 3 \left(\frac{\lambda^2 \beta}{H_0} + \frac{p_0 \lambda}{H_0} \right) t^2 + 6 \left(\frac{p_0 \lambda}{H_0} + \frac{\lambda^2 \beta}{2H_0} - 1 \right) - 6 \left(1 + \frac{M_0}{H_0 \lambda} - \frac{p_0 \lambda}{2H_0} \right) = 0 \quad (20')$$

dove:

$$t = z_p / \lambda$$

e dove i termini $H_0/p_0\lambda$, $H_0/\lambda^2\beta$, $M_0/H_0\lambda$ sono gruppi adimensionali.

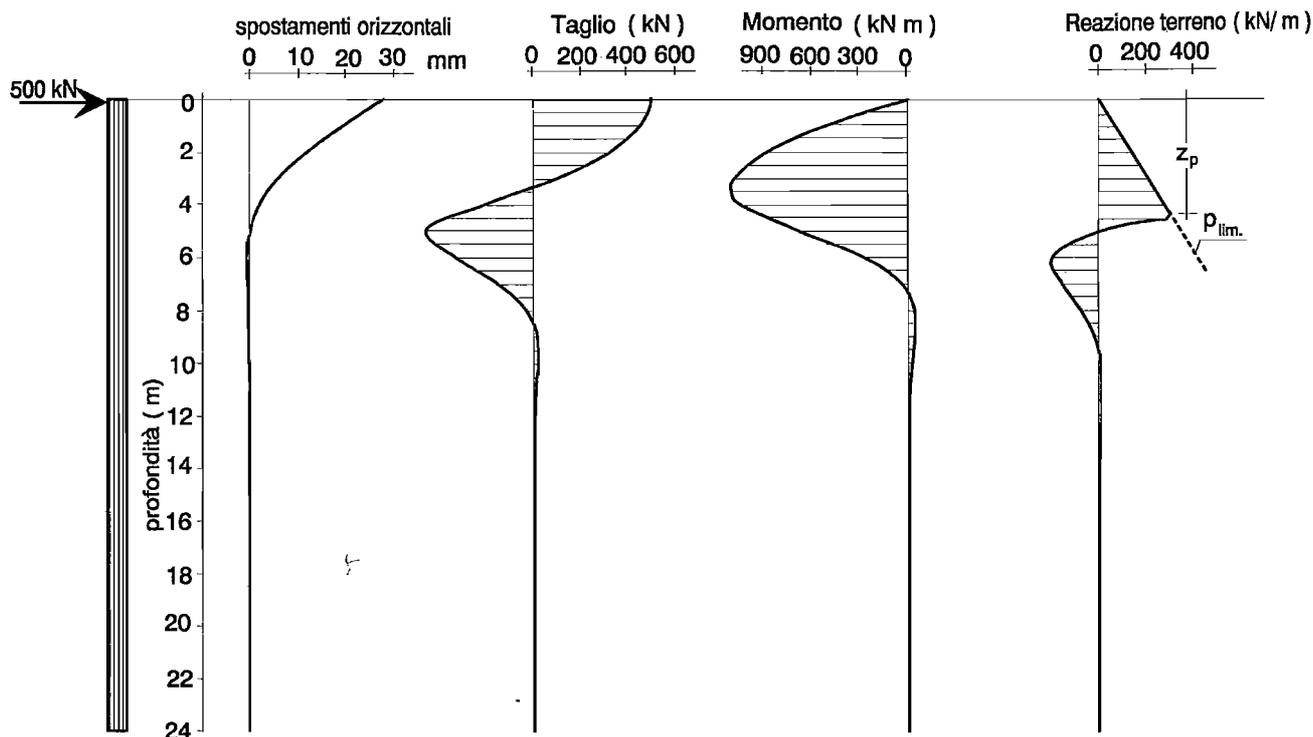


Fig. 4 - Diagrammi di deformata, taglio, momento flettente e reazione del terreno, deducibili dall'analisi.

Questo modo di procedere risulta molto utile perché permette di generalizzare i risultati.

A questo proposito può essere opportuno distinguere il caso di resistenza laterale costante dal caso di resistenza laterale variabile con la profondità con legge triangolare.

Terreni con resistenza laterale costante : $p_{lim} = p_0$

Sotto queste condizioni si può definire uno spostamento adimensionale alla testa del palo $y^* = y_0 E_s / p_0$ in funzione del carico adimensionalizzato $H^* = H_0 / p_0 \lambda$ e di differenti valori del rapporto adimensionale $M^* = M_0 / H_0 \lambda$.

La profondità adimensionalizzata t della zona plastica vale:

$$t = H^* [1 + (1 + 2 M^* / H^*)^{1/2}] - 1 \quad (30)$$

mentre la minima forza orizzontale adimensionalizzata necessaria affinché avvengano deformazioni plastiche nel terreno si ricava dalla (30) ponendo $t=0$ e vale:

$$H^*_{min.} = 1 / [2(1 + M^*)] \quad (31)$$

Per valori di H^* minori di $H^*_{min.}$ l'interazione palo-terreno è puramente elastica e quindi lo spostamento alla testa del palo varierà linearmente con

H^* . Il valore di tale spostamento in campo elastico pertanto può essere noto se si osserva che per $H^* = H^*_{min.}$ deve essere $t=0$ o anche $y_0 = p_0 / E_s$ cioè $y^* = 1$, come d'altra parte necessariamente previsto dal legame costitutivo utilizzato nel modello.

In definitiva, in campo elastico, lo spostamento adimensionalizzato alla testa del palo può esprimersi come:

$$y^*_{el.} = 2H^* (1 + M^*) \quad (32)$$

o anche, in termini dimensionali:

$$y_{0el.} = 2H_0 / \lambda E_s + 2 M_0 / \lambda^2 E_s \quad (33)$$

è facile verificare che la precedente espressione coincide con le note soluzioni elastiche del modello alla Winkler.

Per valori di H^* maggiori di $H^*_{min.}$, il comportamento della curva carichi spostamenti diventa non lineare e lo spostamento adimensionalizzato y^* alla testa del palo varierà con la seguente legge:

$$y^* = 1 + t(1 + 2M^*H^*) + t^2(2M^*H^* + 2H^*) + t^3(4H^*/3 - 1) - t^4/2 \quad (34)$$

Ciò permette di graficizzare la curva carichi spostamenti alla testa del palo in maniera univoca.

La Fig. 5 riporta ad esempio l'andamento dello spostamento adimensionalizzato $y^* = y_0 E_s / p_0$ del

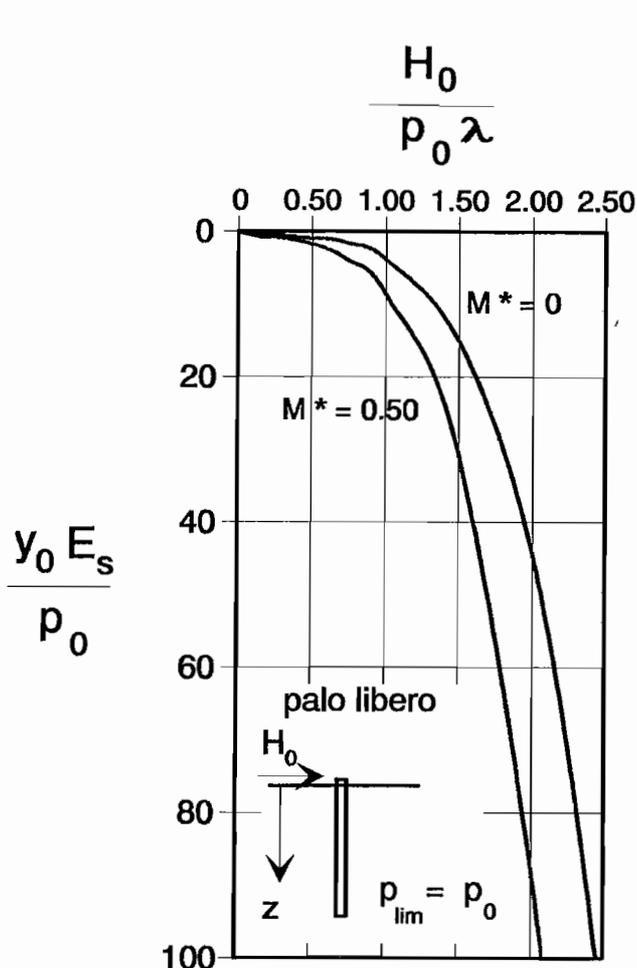


Fig. 5 - Curva teorica adimensionale forza-spostamento in testa. Caso di terreno con resistenza laterale costante e palo libero in testa.

palo libero in testa in funzione della forza orizzontale adimensionalizzata $H^* = H_0/p_0\lambda$ e per i valori $M^* = 0$ e $M^* = 0.5$. La Fig. 6 è relativa alla ipotesi di palo incastrato alla testa. In tal caso, il valore della coppia M_0 da utilizzare per la definizione del rapporto M^* è stata ricercata per tentativi, in maniera che risultasse una rotazione nulla in testa e cioè $C_3 = 0$ (Eq. 26). Le soluzioni ricavate sono simili a quelle dedotte da RAJANI e MORGENSTERN [1993]; queste ultime sono però limitate al semplice caso di sola forza orizzontale H_0 in testa ($M_0 = 0$) e palo libero di ruotare [MOTTA, 1993].

Terreni con resistenza laterale variabile con legge triangolare: $p_{lim} = \beta z$

Analoghe considerazioni possono essere fatte nell'ipotesi di terreni con resistenza laterale limite variabile con legge triangolare $p_{lim} = \beta z$. In questo caso la forza adimensionalizzata alla testa del palo viene definita come $H^* = H_0/\lambda^2\beta$, mentre lo spostamento adimensionalizzato alla testa del palo è definito come $y^* = y_0 E_s/\lambda\beta$. La profondità adimensionalizzata t

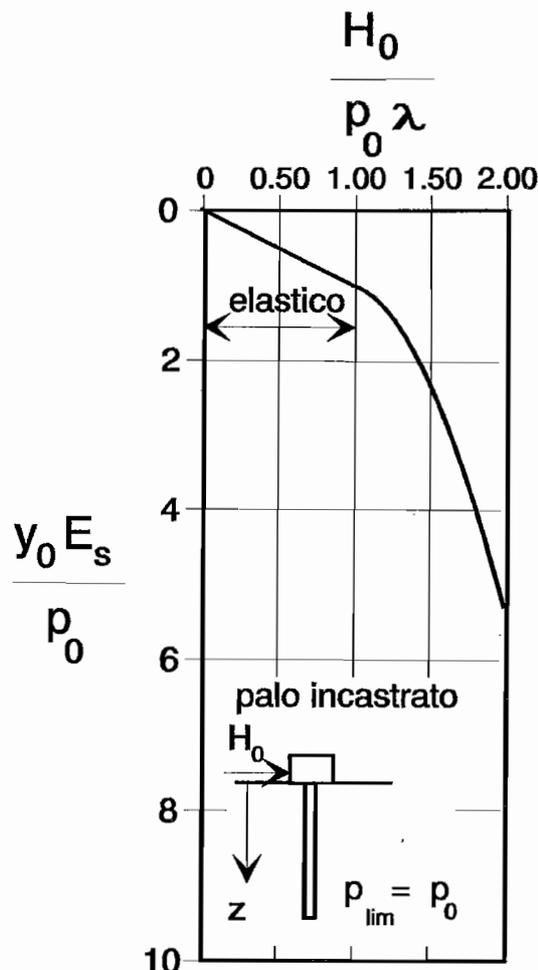


Fig. 6 - Curva teorica adimensionale forza-spostamento in testa. Caso di terreno con resistenza laterale costante e palo incastrato.

della zona plastica può essere ricavata allora dalla soluzione della seguente equazione di terzo grado:

$$t^3/H^* + 3t^2/H^* + 3(1/H^* - 2)t - 6(1 + M^*) = 0 \quad (35)$$

Dove si è posto sempre $M^* = M_0/H_0\lambda$

Sotto l'ipotesi di resistenza variabile con legge triangolare e quindi con valore $p_0 = 0$ alla testa del palo, qualunque sia il valore della forza orizzontale, il comportamento delle curve $p-y$ è certamente plastico fino ad una data profondità. La relazione forza-spostamento alla testa del palo è pertanto non lineare sin dall'origine. Sotto queste condizioni è possibile dimostrare che vale la seguente relazione che lega il valore y^* dello spostamento adimensionalizzato alla testa del palo con le forze adimensionalizzate H^* e M^* :

$$y^* = t(1 + 2M^*H^*) + t^2(1 + 2M^*H^* + 2H^*) + 4H^*t^3/3 - t^4/3 - 2t^5/15 \quad (36)$$

Analogamente al caso di resistenza limite orizzontale costante, è così possibile generalizzare i risul-

tati relativi alla curva forza-spostamento orizzontale anche per il caso di resistenza limite variabile con legge triangolare. In Fig. 7 viene riportato a titolo di esempio l'andamento dello spostamento adimensionalizzato $y^* = y_0 E_s / \lambda \beta$ di un palo libero in testa in funzione del carico adimensionalizzato $H^* = H_0 / \lambda^2 \beta$ e per i valori $M^* = 0$ e $M^* = 0.5$. In Fig. 8 è infine riportato lo spostamento adimensionalizzato y^* per il caso di palo impedito di ruotare in testa.

4. Confronto con prove di carico su pali strumentati in vera grandezza

Vengono qui di seguito riportati alcuni confronti fra le previsioni teoriche del modello e i risultati di prove di carico su pali strumentati in vera grandezza. Per la valutazione della resistenza laterale limite del terreno si farà riferimento alle espressioni suggerite da BROMS [1964a] per pali in terreni coesivi e da BROMS [1964b; 1965] per pali in terreni incoerenti.

Nel primo caso Broms suggerisce quale carico laterale limite il seguente valore:

$$p_{lim} = c_u D N_c$$

dove:

c_u = resistenza non drenata

D = diametro del palo

N_c = fattore di capacità portante con valore variabile da 2 (alla quota del piano di campagna) a 9 (ad una profondità pari a circa 3 volte il diametro del palo).

Per i terreni incoerenti si può porre:

$$p_{lim} = N_\phi k_p \gamma' D z$$

dove:

N_ϕ = fattore di capacità portante variabile da 3 [BROMS, 1964b] a 5 [BROMS, 1965]

$k_p = \text{tg}^2 (45^\circ + \varphi/2)$ = coefficiente di resistenza passiva alla Rankine

γ' = peso efficace dell'unità di volume del terreno

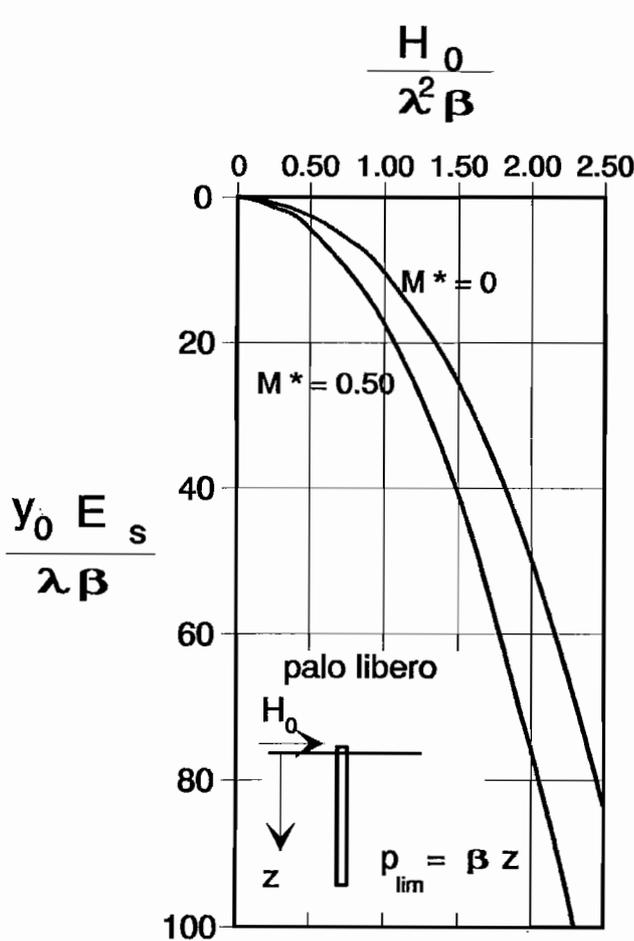


Fig. 7 - Curva teorica adimensionale forza-spostamento in testa. Caso di terreno con resistenza laterale variabile con legge triangolare e palo libero in testa.

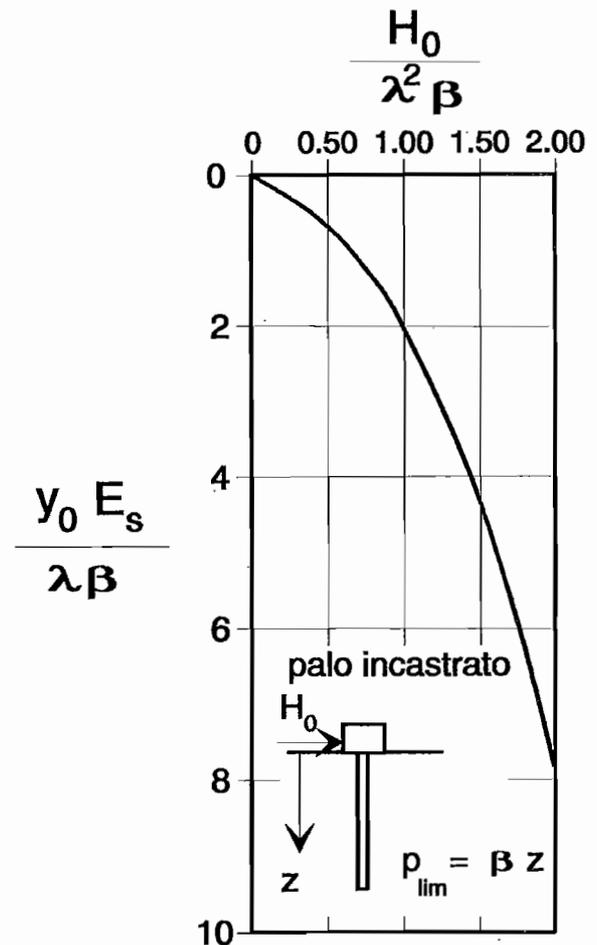


Fig. 8 - Curva teorica adimensionale forza-spostamento in testa. Caso di terreno con resistenza laterale variabile con legge triangolare e palo incastrato.

D = diametro del palo
 z = profondità di calcolo

Prove di carico orizzontale descritte da Garassino et al.

GARASSINO, JAMIOLKOWSKI e PASQUALINI [1975] riportano i risultati di una prova di carico orizzontale eseguita su un palo tubolare in acciaio, denominato F41, di diametro $D = 40.6$ cm, lunghezza $L = 41$ m ed infisso in terreni incoerenti. Il confronto è stato operato ipotizzando che il terreno reagisca in condizioni drenate; si è così assunta una legge di variazione lineare della resistenza laterale limite del tipo [BROMS, 1964b]: $p_{lim} = N_{\phi} k_p \gamma' Dz$ e quindi con valore $p_0 = 0$ alla superficie del terreno e $\beta = 60$ kN/m^2 , valutato prendendo $N_{\phi} = 4$, $\phi' = 35^\circ$, $\gamma' = 10$ kN/m^3 . La rigidità flessionale EI del palo, fornita dagli Autori vale $EI = 5.488 \times 10^{10}$ $kgcm^2$ cui può essere fatto corrispondere un modulo della sezione omogeneizzata $E = 41.110.000$ kN/m^2 . Un buon accordo con i risultati sperimentali è stato ottenuto assumendo, una rigidità E_s delle curve p-y pari a $E_s = 20.000$ kN/m^2 che corrisponde ad una rigidità unitaria, rapportata al diametro del palo, $k_h = E_s/D = 50.000$ kN/m^3 (5 kg/cm^3). La Fig. 9 riporta il confronto fra i valori misurati e quelli calcolati della deformata del palo in funzione della profondità; la Fig. 10 è invece relativa al confronto tra i valori misurati e calcolati del momento flettente.

Prove di carico orizzontale sul Fiume Garigliano

MANDOLINI e VIGGIANI [1992] riferiscono sui risultati di alcune prove di carico orizzontale su pali realizzati per la costruzione delle fondazioni delle pile

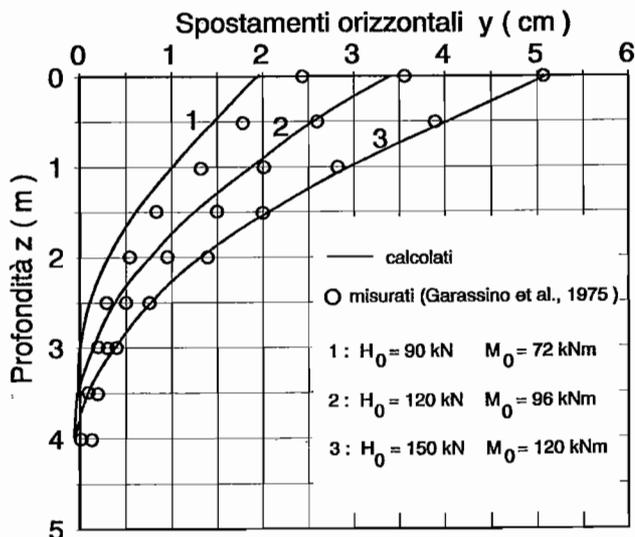


Fig. 9 - Confronto tra valori misurati [GARASSINO et al., 1975] e calcolati della deformata del palo di prova F41.

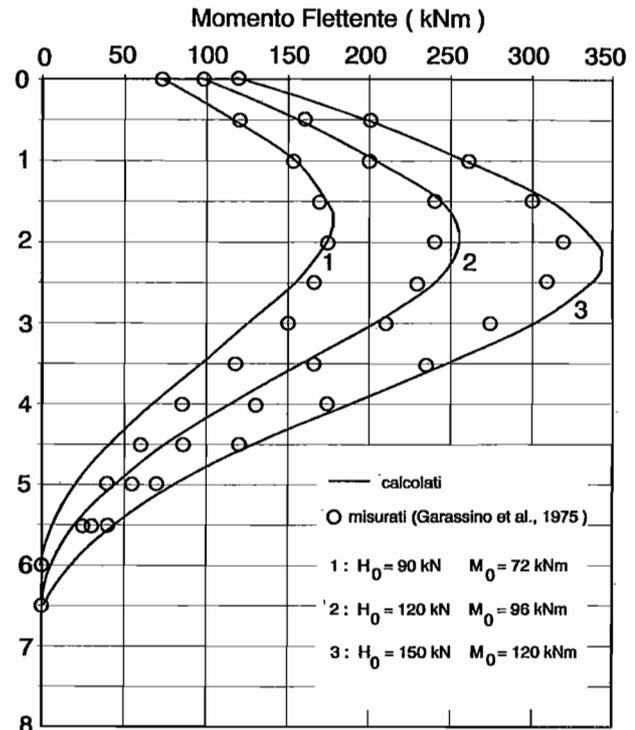


Fig. 10 - Confronto tra valori misurati [GARASSINO et al., 1975] e calcolati del momento flettente sul palo di prova F41.

e delle spalle del viadotto sul Fiume Garigliano. I terreni di fondazione sono costituiti prevalentemente da argille limose e limi argillosi. Il pelo libero della falda è pressoché coincidente con la superficie del terreno. Le prove di carico orizzontale sono state realizzate su pali «Multiton» infissi, di lunghezza $L = 48$ m. La prova è stata eseguita realizzando uno schema di palo libero di ruotare in testa e soggetto ad una forza orizzontale e ad una coppia. Il confronto è stato condotto assumendo una resistenza non drenata variabile linearmente con la profondità con legge $c_u(z) = 15 + 1.67 z$ (kPa), che è in ragionevole accordo con i dati sperimentali. La modalità della prova, con teste dei pali poste a qualcosa più di un metro dal piano di campagna, suggerisce di utilizzare un valore di $N_c = 9$, costante con la profondità. A tale valore può farsi corrispondere una resistenza limite variabile con legge lineare del tipo $p_{lim}(z) = c_u(z)DN_c$. La Fig. 11 riporta il confronto fra spostamenti orizzontali misurati sul palo n°5 e sul palo n°2 nella fondazione della pila 4'. Le caratteristiche geometriche dei due pali sono leggermente differenti: il palo 2 ha un diametro di 45.7 cm, mentre il palo 5 ha un diametro di 40,6 cm. Anche le condizioni di carico risultano leggermente differenti poiché nel palo 2 la forza orizzontale è applicata a 1,28 m dal piano di campagna mentre nel palo 5 è applicata a 1.19 m. Pur con condizioni di carico e geometriche differenti, un buon accordo per entrambi le prove è stato ottenuto assumendo un valore delle

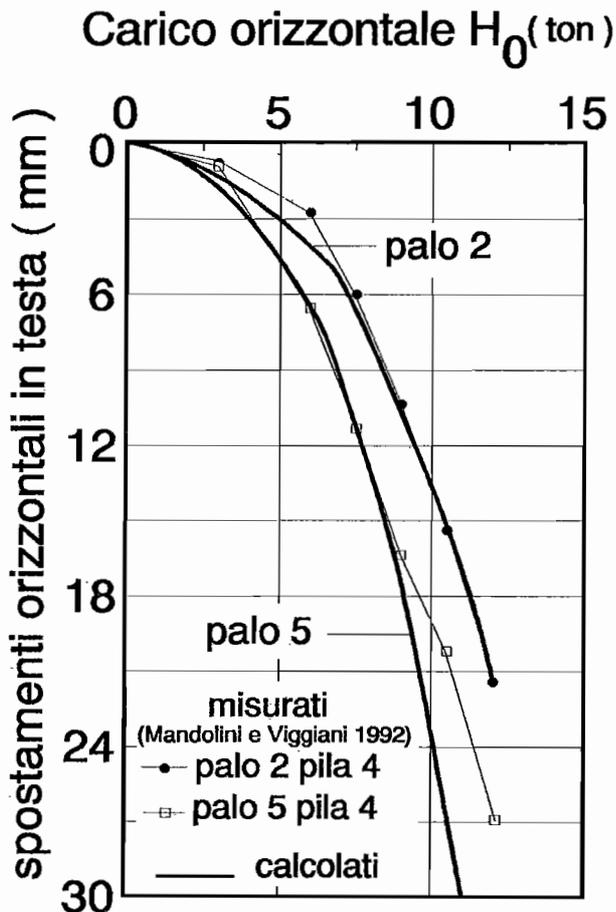


Fig. 11 - Confronto tra valori misurati [MANDOLINI e VIGGIANI, 1992] e calcolati della curva carico-spostamenti in testa per i pali di prova 2 e 5 della pila 4'.

rigidezze unitarie $k_h = E_s/D = 100.000 \text{ kN/m}^3$ (10 kg/cm^3). Al di là del fatto puramente quantitativo che, come si sa, dipende anche dalla «oculatezza» nella scelta dei parametri, è significativo osservare come le curve teoriche per entrambe i pali seguono con una certa fedeltà le curve sperimentali, cogliendone in modo apprezzabile la non linearità.

5. Considerazioni conclusive

L'analisi presentata permette di eseguire lo studio dei pali soggetti a forze orizzontali in testa attraverso un'interazione terreno-struttura in campo elastoplastico. Per mezzo di una tecnica di modellazione con curve p-y a comportamento elastico-perfettamente plastico è stata ricavata una soluzione analitica in forma chiusa che può essere impiegata in prima approssimazione quando non si hanno sufficienti informazioni di dettaglio sui terreni cosicché modellazioni più rigorose, utilizzando ad esempio programmi di calcolo agli elementi finiti o alle differenze finite con curve p-y più complesse, possono risultare poco significative. Va comunque messo in evi-

denza che l'analisi può applicarsi ai semplici casi previsti nelle ipotesi di base; per situazioni geotecniche più complesse, ad esempio in presenza di stratificazioni che possono far variare significativamente e in maniera discontinua le caratteristiche meccaniche dei terreni, è necessario affidarsi a tecniche di risoluzione di tipo numerico che consentono di portare in conto anche la variabilità delle rigidezze iniziali con la profondità.

È appena il caso di ricordare ancora che l'analisi non può esaminare comunque livelli di carico molto oltre quelli di esercizio perché potrebbe registrarsi una significativa diminuzione della rigidezza flessionale per parzializzazione della sezione del palo.

Tuttavia, a differenza delle soluzioni elastiche tradizionali, la modellazione utilizzata permette di tenere conto del raggiungimento delle condizioni di plasticizzazione del terreno all'intorno del palo e di individuare l'estensione della zona plastica; in tal modo la previsione delle deformazioni e delle caratteristiche della sollecitazione può risultare più realistica. Un ulteriore superamento dell'analisi elastica è rappresentato dalla possibilità di cogliere in maniera ragionevole la non linearità del legame forze-spostamenti in funzione dell'entità del carico applicato alla testa.

È stato infine mostrato come sia possibile ricavare, anche con una modellazione elastoplastica del terreno, alcune relazioni in forma adimensionale che consentono di generalizzare i risultati in termini di spostamento orizzontale alla testa del palo in funzione della forza orizzontale e della coppia applicate sul palo. In una modellazione elastoplastica, naturalmente, i coefficienti adimensionali devono risultare anche funzione dei parametri caratteristici della resistenza laterale.

Come in ogni studio di modellazione, la bontà della previsione è condizionata dalla scelta appropriata dei parametri da inserire nel modello; un parametro che in tale modellazione può risultare particolarmente significativo è rappresentato dalla rigidezza del legame costitutivo elastoplastico. Per le rigidezze da utilizzare in un modello elastico esiste già un'estesa letteratura [GHIONNA e LANCELOTTA, 1985] che permette di calibrare i valori delle rigidezze stesse, tenendo conto dell'entità della deformazione, attraverso un modulo secante equivalente. In una modellazione di tipo elastico-perfettamente plastico i valori delle rigidezze delle curve p-y devono essere necessariamente maggiori di quelli attribuibili ad un modello elastico; al tempo stesso essi possono risultare minori dei corrispondenti valori iniziali attribuibili nelle curve di tipo iperbolico o parabolico e vanno pertanto calibrati diversamente. In tal senso può essere opportuna una più estensiva indagine comparativa con prove in vera grandezza.

BIBLIOGRAFIA

- BROMS B.B. (1964a) - *Lateral resistance of piles in cohesive soils*. Journ. Soil Mech. Found. Div., Proc. ASCE, vol. XC, SM2, pp. 27-63.
- BROMS B.B. (1964b) - *Lateral resistance of piles in cohesionless soils*. Journ. Soil Mech. Found. Div., Proc. ASCE, vol. XC, SM3, pp. 123-156.
- BROMS B.B. (1965) - *Discussione su Piles in Cohesionless soils subject to oblique pull by Y. Yoshimi*. J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, vol. XCI, n. 4, pp. 199-205.
- GARASSINO A., JAMIOLKOWSKI M., PASQUALINI E. (1975) - *Determinazione sperimentale del modulo di reazione orizzontale dei terreni sabbiosi mediante prove di carico su pali*. Associazione Geotecnica Italiana, XII Convegno Nazionale di Geotecnica, Cosenza, 18-21 Settembre, pp. 319-326.
- GHIONNA V.N., LANCELLOTTA R. (1985) - *Parametri di progetto per i pali soggetti a carichi orizzontali*. Atti del XII Ciclo di Conferenze di Geotecnica di Torino.
- HETENYI M. (1946) - *Beams on elastic foundations*. University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan.
- MANDOLINI A., VIGGIANI C. (1992) - *Terreni ed opere di fondazione di un viadotto sul fiume Garigliano*. Rivista Italiana di Geotecnica, Anno XXVI, n. 2, pp. 95-113.
- MATLOCK H. (1970) - *Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay*. Proc. 2nd Offshore Techn. Conf. Houston, vol. I, pp. 577-594.
- MATLOCK H., REESE L.C. (1960) - *Generalized Solutions for laterally loaded piles*. Journ. Soil Mech. Found. Div., Proc. ASCE, vol. LXXXVI, SM5, October, pp. 63-91.
- MOTTA E. (1993) - *Discussione su Pipelines and laterally loaded piles in elastoplastic medium*, by B. Rajani and N. Morgenstern. Journ. of Geotechn. Engineering, vol. CXIX, n. 9, pp. 1431-1448.
- RAJANI B., MORGENSTERN N. (1993) - *Pipelines and laterally loaded piles in elastoplastic medium*. Journ. of Geotechnical Engineering, vol. CXIX, n. 9, pp. 1431-1448.
- REESE L.C. (1975) - *Laterally Loaded Piles*. Proc. Seminar Series on Design, Construction and Performance of Deep Foundations, Geotech. Group and Continuing education Committee, S.Fran-cisco Section, ASCE, Univ. of California, Berkeley.
- ROBERTSON P.K., DAVIES M.P., CAMPANELLA R.G. (1989) - *Design of laterally loaded piles driven using the flat dilatometer*. Geotechnical Testing Journal, GTJODJ, vol. XII, n. 1, March, pp. 30-38.

SUMMARY

The behaviour of a pile subjected to lateral load is usually treated with the elastic solutions given by MATLOCK and REESE [1960]. A more convenient approach is based on p-y curves concept that allows to take into account the yielding of soil. This approach usually requires a numerical solution via computer however, if informations about soil parameters are not accurate, results can be misleading and rigorous techniques are not justified. In these circumstances a closed form solution which takes into account also the limit lateral soil resistance can be helpful.

The paper presents an alternative elastoplastic approach based on p-y curves whose basic hypotheses assumed in the analysis are: the pile behaves elastically; p-y curves are elastic-perfectly plastic (Fig. 1); the pile is subjected to a horizontal force H_0 and to a moment M_0 applied at the ground surface; the lateral resistance of the soil-pile system is constant or varies linearly with the depth; the stiffness of the p-y curves is constant with the depth. These assumptions lead to the scheme shown in Fig. 2 in which two zones are distinguished. In the region 1, located in the upper part of the pile, displacements have attained such values that the soil has reached its limit lateral resistance. In the lower region 2 pile displacements are less than the critical value of the p-y corresponding curve, so that the soil-pile system is in an elastic state. An elastoplastic solution then can be gained by utilizing the equation of the elastic line, by simply imposing equilibrium and compatibility conditions at the boundary between plastic and elastic regions. Equation (20) gives the extent of the plastic zone z_p . Equations (9) and (14) give pile deflections as well as bending moment and shear distribution respectively for the plastic and the elastic zones. Because the presented solution takes into account of the limit lateral resistance of the soil, it could give more realistic results than that given by a simple elastic analysis.