AIAS – ASSOCIAZIONE ITALIANA PER L'ANALISI DELLE SOLLECITAZIONI

45° CONVEGNO NAZIONALE, 7-10 SETTEMBRE 2016 – UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

AIAS 2016 - 709

UN NUOVO CRITERIO DI SNERVAMENTO CON DIPENDENZA DALL'ANGOLO DI LODE E DALLA TRIASSIALITA'

G. Mirone, R. Barbagallo, D. Corallo

Università degli Studi di Catania - Dipartimento di Ingegneria Industriale,
Viale A. Doria 6, 95125 Catania, e-mail: gmirone@dii.unict.it

Sommario

Secondo numerose evidenze sperimentali in letteratura, la risposta elastoplastica di alcuni metalli oltre a dipendere dalla triassialità per il danno e dal secondo invariante per la risposta stress-strain, può dipendere anche dall'angolo di Lode che influenza sia lo snervamento sia la frattura duttile. In questo articolo viene presentato un nuovo modello di snervamento secondo cui la superficie limite elastica, per ogni dato livello di hardening, dipende anche dall'angolo di Lode ed, eventualmente, anche dalla tensione idrostatica. Il modello proposto è basato su due elementi di calibrazione; il primo è una funzione che, ad ogni valore del plastic strain, associa l'ampiezza del range di variabilità della tensione di snervamento corrispondente alla massima escursione del Lode angle tra pure shear e assialsimmetria; il secondo è un parametro, per il momento considerato costante, che esprime la nonlinearità della transizione tra gli estremi di tale range al variare del Lode angle, passando cioè, a deformazione costante, da stati di stress puramente assialsimmetrici (X=1) a stati di taglio generalizzato (X=0). Tale modello è testato su dati sperimentali disponibili in letteratura e relativi a lega di Titanio Ti6Al4V, che comprendono tests di tensio-torsione oltre che varie geometrie di tipo flat e butterfly in trazione, che confinano l'evoluzione del Lode angle in differenti ranges relativamente ristretti, permettendo di investigare l'effetto di tale parametro sulla risposta elastoplastica.

Abstract

According to several experiments reported in the literature, the elastoplastic behaviour of metals depends not only on the first stress invariant (triaxiality) for the ductile damage and on the second stress invariant (equivalent von Mises stress) for the yield, but also on the third stress invariant (normalized Lode angle X) which may affect at the same time the yielding and the ductile failure.
In this paper a new yield model is presented, where the yield surface depends on the Lode Angle and, eventually, also on the triaxiality ratio.
The proposed model is identified by a calibration parameter expressing the degree of nonlinearity of the yield with respect to the Lode angle, and a calibration function expressing the maximum variability of the hardening stress at the two extremities of the Lode angle range, corresponding to the uniaxial and to the pure shear stress states.
The proposed model has been tested against several experimental data from the literature on the Titanium alloy Ti6Al4V, including mixed tension-torsion loading which allowed to control the evolution of X and to confine its values into different narrow ranges for better investigating the Lode angle effects on the yield response.

Parole chiave: Snervamento, Hardening elastoplastico, triassialità, angolo di Lode

1. INTRODUZIONE

Per descrivere in maniera compiuta lo stato tensionale locale di un singolo punto di una struttura caricata, sono necessari tre parametri ovvero le tensioni principali o gli invarianti del tensore degli stress.
Nell'impostazione classica della plasticità, si considera sufficiente il secondo invariante del tensore deviatorico per descrivere la risposta elastoplastica dei materiali strutturali per mezzo del criterio di Von Mises e delle funzioni di hardening, con il primo che esprime la condizione di snervamento attraverso una superficie di snervamento nello spazio delle tensioni e le seconde legate all'evoluzione in termini di dimensioni di tale superficie in funzione della deformazione plastica equivalente.
Spesso la risposta dei metalli strutturali non segue tale idealizzazione in quanto anche la triassialità TF, espressa tramite il primo invariante di stress normalizzato attraverso la tensione di Von Mises, e l'angolo di Lode normalizzato X, ottenuto attraverso la normalizzazione del terzo invariante di stress tramite la tensione di Von Mise, hanno un ruolo decisivo nella risposta elastoplastica e nella frattura duttile.
Già dagli anni '60 del secolo scorso, è noto che la triassialità accelera la rottura nei materiali duttili diminuendo la deformazione a rottura [Chaboche (1988), Lemaitre (1985), Mackenzie et al. (1988), McClintock (1968), Rice and Tracey (1969), Gurson (1977)]; questo aspetto è completamente accertato e svariati modelli sono presenti in letteratura [Bao and Wierzbicki (2004), Brunig et al. (2008), Mirone (2004), Wierzbicki et al. (2005)], ma nessun criterio di rottura che tenga conto della triassialità è universalmente accettato.
È possibile fare considerazioni simili anche riguardo al terzo invariante di stress espresso dall'angolo di Lode normalizzato, di cui il ruolo nel rendere più fragili i materiali sta ottenendo negli ultimi anni sempre più evidenze [Xue (2009), Xue et al. (2010), Mae et al. (2007), Ghajar et al. (2013), Mirone and Corallo (2010), Graham et al. (2012), Barsoum et al. (2012), Faleskog et al. (2013), Xue et al. (2013), Papasidero et al. (2014), Rodríguez-Millán (2015), Cortese et al. (2014)] ma non è ancora completamente accertato.
Anche la risposta elastoplastica dei materiali strutturali è potenzialmente condizionata dal fattore di triassialità TF e dal parametro di deviatoricità X; è noto che la triassialità influenza lo snervamento plastico dei materiali granulari, ceramici, etc., ma allo stesso tempo sembra avere un effetto trascurabile sulla plasticità della maggior parte dei metalli [Bigoni and Piccolroaz (2004), Piccolroaz and Bigoni (2009), Penasa et al. (2014), Lehmann (1985)], suggerendo che questi ultimi abbiano una superficie di snervamento nello spazio delle tensioni con sezione costante lungo la trisettrice.
D'altra parte, è accertato che il parametro deviatorico X ha un ruolo chiave nello snervamento di molti metalli nei quali le curve costitutive ottenute da test di trazione pura possono differire sensibilmente da quelle ottenute da prove di torsione pura [Bai and Wierzbicki (2008), Erice and Gálvez (2014), Gao et al. (2009), Gao et al. (2011), Dorogoy et al. (2015), Cortese et al. (2015), Mirone (2014)]; tale fatto non può essere però generalizzato in quanto per altre tipologie di metalli la risposta elastoplastica non è condizionata da tale parametro.
Di conseguenza la superficie di snervamento dei materiali metallici può avere sia una sezione circolare alla Von Mises che una sezione a sei lobi dipendente dall'angolo di Lode. Nel caso di metalli anisotropi con snervamento dipendente da X, anche la simmetria a sei lobi non è applicabile ed è necessario definire la dipendenza dello yield dall'angolo di Lode sull'intero dominio di 360 gradi per ogni stato di incrudimento del materiale.
Nel presente lavoro viene proposto un nuovo modello di snervamento con dipendenza sia da TF che da X che include le funzioni di Von Mises e di Tresca quali casi particolari, rispettivamente di completa insensibilità alla X e di dipendenza di riferimento.
Le capacità predittive del modello di snervamento sono state testate con dati sperimentali da letteratura, comprendenti anche test di tensio-torsione, attraverso l'utilizzo di subroutine in linguaggio Fortran implementate nelle simulazioni agli elementi finiti degli esperimenti.

2. FORMULAZIONE DEL MODELLO DI SNERVAMENTO E CALIBRAZIONE

Un dato tensore degli stress corrisponde ad un punto nello spazio delle tensioni principali e può essere identificato sia dalle coordinate cartesiane s1, s2 ed s3 che dalle coordinate di Haigh in un sistema di

riferimento cilindrico; le tre coordinate esprimono anche i tre invarianti del tensore degli stress che possono essere combinati tra loro ottenendo i seguenti parametri:

$$\sigma_{Mises} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]} \tag{1}$$

$$X = Sin(3 \cdot \vartheta) = \frac{27}{2} \cdot \frac{(\sigma_1 - \sigma_H) \cdot (\sigma_2 - \sigma_H) \cdot (\sigma_3 - \sigma_H)}{\sigma_{eq}^{\ 3}} \tag{2}$$

$$TF = \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3 \cdot \sigma_{eq}} \tag{3}$$

dove $\sqrt{2/3} \cdot \sigma_{Mises}$ è la coordinata radiale dello stato tensionale (Figura 1) basata sul secondo invariante dello stress, il parametro deviatorico X è l'angolo di Lode θ (terzo invariante deviatorico dello stress) normalizzato nell'intervallo +/- 30 gradi, ed il fattore di triassialità TF esprime la coordinata assiale (correlato al primo invariante dello stress e alla tensione idrostatica σ_H), normalizzata attraverso la tensione equivalente.
Assumendo l'isotropia del materiale, la superficie di snervamento (YS) è caratterizzata da una simmetria a tre lobi attorno all'asse $\{1,1,1\}$. In caso snervamento identico in tensione e compressione, la simmetria risulta essere a sei lobi.
La più grande evidenza dell'influenza dell'angolo di Lode sullo snervamento di certi materiali è data dalla differenza tra le curve di hardening in trazione pura e torsione pura.
La superficie di snervamento fenomenologica proposta nel presente lavoro è la combinazione delle superfici di Von Mises e di Tresca; in particolare essa è basata su una sezione lineare alla Tresca con rette congiungenti le condizioni di snervamento in taglio puro e trazione pura, corretta attraverso un'amplificazione da calibrare in funzione del materiale, rappresentata da una funzione quadratica dell'angolo di Lode, in grado di garantire un'elevata flessibilità rispettando allo stesso tempo la convessità della superficie di snervamento.

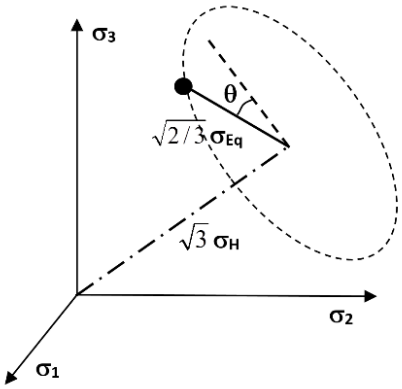


Figura 1 Coordinate cilindriche basate sugli invarianti del tensore degli stress

Come di consuetudine per i materiali metallici, l'effetto della triassialità è considerato trascurabile, per cui la superficie di snervamento ha una sezione uniforme lungo la trisettrice e l'intera superficie può essere descritta attraverso la sua intersezione con il piano deviatorico. Nel caso dovesse essere necessario, la rastremazione della sezione della superficie di snervamento lungo la trisettrice causata dalla pressione idrostatica può essere facilmente inclusa come in [Mirone (2014)].
Assumendo un comportamento simmetrico in trazione e compressione, la definizione della superficie di snervamento può essere limitata all'intervallo [0,30] gradi dell'angolo di Lode.

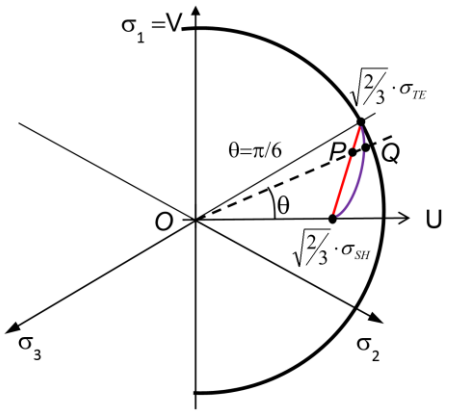


Figura 2 Definizione della sezione della superficie di snervamento

Considerando lo schema mostrato in Figura 2, nel piano deviatorico viene definito il sistema di riferimento cartesiano U-V in modo tale che l'asse U corrisponda ad un valore dell'angolo di Lode pari a zero, ovvero alla condizione di taglio puro. La linea rossa rappresenta la superficie di snervamento alla Tresca con bordi retti che identifica valori di snervamento dipendenti dall'angolo di Lode che vanno da σ_{TE} in condizioni di tensione pura a σ_{SH} in condizione di taglio puro.
Tale segmento è descritto dall'equazione di una retta passante per i suddetti punti nel piano deviatorico:

$$V = \frac{1}{m}\cdot\left(U - \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sigma_{SH}\right); \quad m = \frac{\sigma_{TE}\cdot\cos(\pi/6) - \sigma_{SH}}{\sigma_{TE}\cdot\sin(\pi/6)} \tag{4}$$

L'intersezione *P* tra tale segmento e la retta generica corrispondente all'angolo di Lode θ può essere facilmente identificato e la sua distanza dall'origine rappresenta il relativo valore della tensione di snervamento considerando la superficie di snervamento con bordi retti che congiungono le tensioni di snervamento in condizione di taglio puro e di trazione pura:

$$\overline{OP}(\vartheta) = \sqrt{U_p{}^2 + V_p{}^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sigma_{SH}\cdot\frac{\sqrt{1+\tan^2(\vartheta)}}{1 - m\cdot\tan(\vartheta)} \tag{5}$$

Quindi viene introdotta, come termine moltiplicativo di secondo ordine, un'amplificazione quadratica della tensione di snervamento dipendente dall'angolo di Lode in modo da avere una maggiore flessibilità; l'effetto di tale termine è mostrato con la curva viola. Tale amplificazione quadratica varia tra 1.0 agli estremi del range dell'angolo di Lode (θ=0 e θ=π/6) e il valore di calibrazione desiderato relativo al valore rappresentativo dell'angolo di Lode di riferimento θ*, avendo quindi un singolo parametro di calibrazione. Ad un valore di calibrazione positivo corrisponde una superficie di snervamento convessa nel range dell'angolo di Lode (0, π/3), ovvero dove tale convessità deve essere garantita.
La coordinata radiale del punto Q è quindi ottenuta incrementando quella del punto P attraverso il suddetto termine quadratico e la tensione equivalente di snervamento è quindi infine definita come

$$\sigma_{Eq}(\vartheta) = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\overline{OQ}(\vartheta) = \sigma_{SH}\cdot\frac{\sqrt{1+\tan^2(\vartheta)}}{1 - m\cdot\tan(\vartheta)}\cdot\left[1 + qa\cdot\frac{\left(\vartheta^2 - \pi/6\cdot\vartheta\right)}{\vartheta*^2 - \pi/6\cdot\vartheta*}\right] \tag{6}$$

dove *qa* è l'unico parametro di calibrazione, necessario insieme alla funzione *m*, per ottenere l'amplificazione quadratica dello snervamento causata dall'angolo di Lode e definire completamente la forma attuale della superficie di snervamento.
Nella precedente equazione, l'effetto di hardening è contenuto nel fattore di scala σ_{Sh}, ovvero l'attuale valore della tensione di snervamento in condizione di taglio puro dipendente dalla deformazione; la possibile variazione della forma della superficie in funzione della deformazione è invece inclusa nella funzione *m*, che rappresenta il rapporto dipendente dalla deformazione tra le curve di hardening in condizione di stress uniassiale e di taglio puro. L'entità della curvatura dei bordi della superficie è invece considerata costante in quanto il parametro *qa*, nel presente modello, è un parametro del materiale non dipendente dalla deformazione.
Infine la superficie di snervamento può essere espressa in termini di tensione equivalente attraverso l'eq. (7), nella quale l'hardening è incluso nel più familiare fattore di scala $\sigma_{Te,}$ ovvero la curva costitutiva in condizioni to carico uniassiale:

$$\sigma_{Eq}(\vartheta) = \sigma_{TE} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \cdot \frac{\sqrt{1+\tan^2(\vartheta)}}{1 - m \cdot \tan(\vartheta)} \cdot \left[1 + qa \cdot \frac{\left(\vartheta^2 - \mu/6 \cdot \vartheta \right)}{\vartheta*^2 - \mu/6 \cdot \vartheta*} \right] \tag{7}$$

Teoricamente, la completa definizione di tale superficie di snervamento può essere ottenuta con due esperimenti base in tensione pura e torsione pura, che garantiscono il calcolo delle curve di hardening (σ_{TE} σ_{SH} and *m*), con in aggiunta un singolo test caratterizzato da un valore intermedio dell'angolo di Lode θ* per la calibrazione dell'ultimo parametro *qa*.
In realtà, ragionevolmente, il parametro *qa* viene individuato minimizzando gli errori tra i risultati delle simulazioni FEM e i dati sperimentali di un certo numero di prove a valori di angolo di Lode intermedio.
Se *m=atan*(*15 deg*), il parametro *qa* può essere calcolato, in funzione dell'angolo di calibrazione arbitrario θ*, in modo da far degenerare la superficie di snervamento in quella di Von Mises. Se invece si pongono *m=0* e *qa=0*, si ottiene come caso particolare la superficie di Tresca.
Come sviluppo del presente modello, potrebbe essere introdotta la variabilità del parametro *qa* con la deformazione plastica, permettendo di variare ulteriormente la forma della superficie e ottenendo quindi un grado di flessibilità in più.
Nella Figura 3 sono mostrate quattro possibili superfici di snervamento riferite ad un singolo valore di riferimento della tensione uniassiale di snervamento con, in due casi, il valore della tensione di snervamento di taglio minore della tensione di Tresca e negli altri due maggiore (dodecagoni convessi o concavi); in ognuna delle due coppie di superfici, l'amplificazione quadratica è in un caso assente e nell'altro pari al 20% per un angolo di Lode pari a 15 gradi (spigoli retti o curvi).

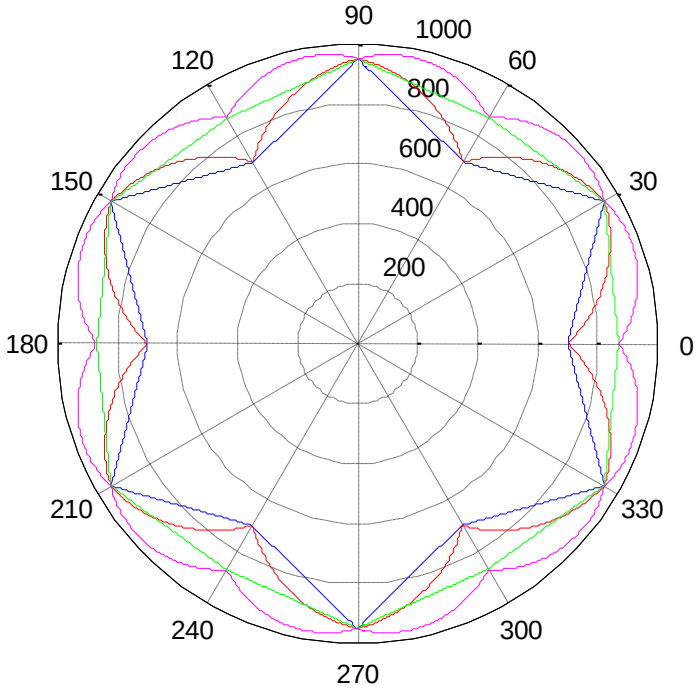


Figura 3 Quattro diverse superfici di snervamento corrispondenti a un singolo valore della tensione uniassiale e rispettivamente a due coppie di tensione di taglio / amplificazione quadratica

3. DATI SPERIMENTALI E CALIBRAZIONE DEL MODELLO

Il nuovo modello di snervamento descritto in questo lavoro è stato testato su dati sperimentali da letteratura riguardanti test su Ti6Al4V effettuati da Allahverdizadeh, Nima, et al. (2015).
Tale campagna sperimentale include test in pura trazione, pura torsione e tensiotorsione ottenuti imponendo un precarico assiale costante seguito da un coppia crescente fino alla rottura; in questi ultimi test è quindi possibile controllare virtualmente il parametro deviatorico a livello locale in modo da valutare il suo effetto sulla risposta elastoplastica.
Gli stati tensionali assialsimmetrici (compreso quello uniassiale come caso particolare) sono caratterizzati dalla condizione X=1 mentre gli stati di deformazione piana (compresa la torsione pura come caso particolare) da X=0; combinando i due tipi di sollecitazione nelle proporzioni volute, è possibile determinare e mantenere i valori di X desiderati nei punti significativi dei provini.

Tabella 1 Campagna sperimentale Allahverdizadeh et al.

Materiale	Serie	Tipo di test	Forma provino
Ti6Al4V Allahverdizadeh et al.	ATo	Torsione	“
	A20	pre-Trazione 20 kN + Torsione	“
	A30	pre-Trazione 30 kN + Torsione	“
	A40	pre-Trazione 40 kN + Torsione	“
	TFS	Trazione	Piatto liscio
	SFB	Taglio	Piatto taglio
	TFH	Trazione	Piatto foro
	TFN	Trazione	Piatto intagliato R 6.67
	TRS	Trazione	Cilindrico liscio
	TRN	Trazione	Cilindrico intagliato
	TPB	Flessione a tre punti	Barra intagliata

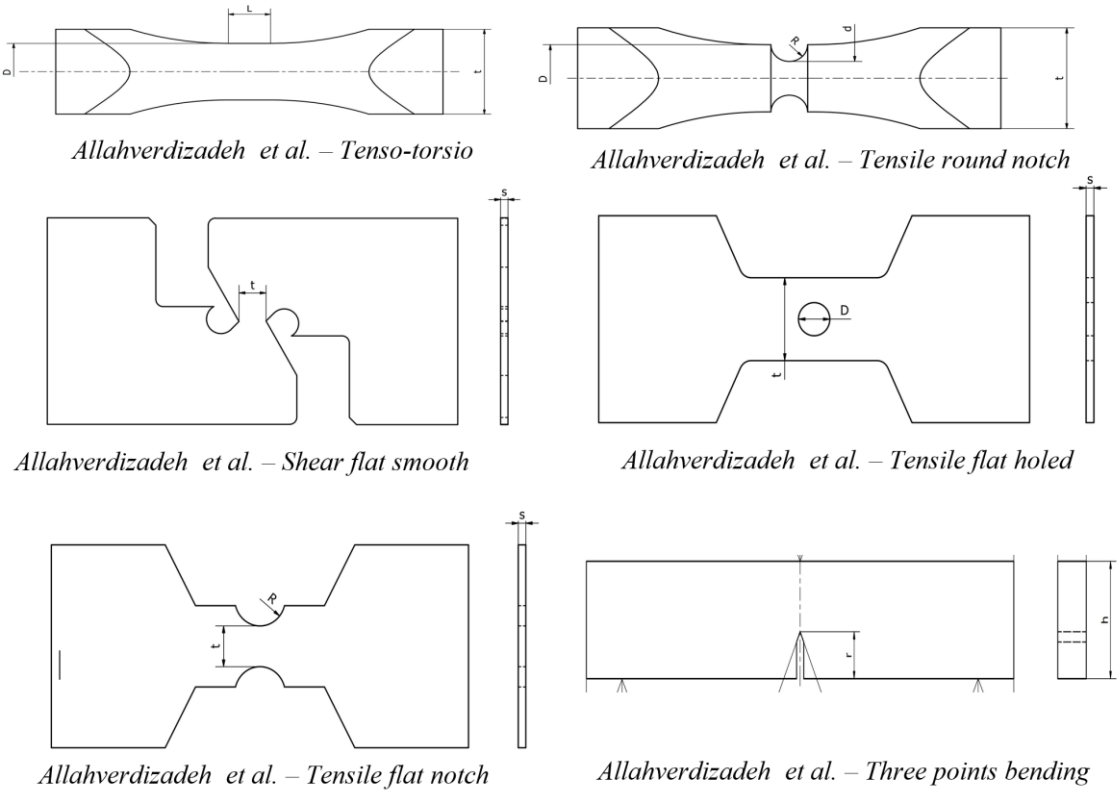


Figura 4 Forma dei provini e tipologia di carico

Nella Tabella 1 sono elencati i test della campagna sperimentale [Allahverdizadeh et al (2015)] usati per testare l'accuratezza del modello di snervamento proposto. Tra gli altri, sono presenti anche provini piatti butterfly, forati e intagliati (Figura 4), con i quali è possibile ottenere ulteriori informazioni riguardo particolari combinazioni ed andamenti dei parametri X e TF.
Il lettore può fare riferimento a Allahverdizadeh et al. (2014), Allahverdizadeh et al. (2015) e Allahverdizadeh PhD Thesis (2014) per ulteriori dettagli in merito agli esperimenti.
Le curve coppia-rotazione e carico-allungamento-diametro e le geometrie dei provini riportate in Allahverdizadeh et al. (2014), Allahverdizadeh et al. (2015) e Allahverdizadeh PhD Thesis (2014) permettono il calcolo, per la lega di titanio considerata, delle curve costitutive di torsione e trazione, inclusa per quest'ultima la correzione post-necking (e.g. reverse engineering, Bridgman, MLR).
Le funzioni di hardening del materiale da torsione e da tensione, ottenute dopo una revisione generale dei dati, sono elencate nella Tabella 2 e plottate nella Figura 5.

Tabella 2 Funzioni di hardening del materiale da trazione e da torsione

Materiale	Tipo di test	Funzioni di hardening
Ti6Al4V Allahverdizadeh et al.	Trazione	$\sigma_{Eq-Tens} = 1335 \cdot \varepsilon_{Eq}^{0.06}$ (pre-necking)
		$\sigma_{Eq-Tens} = 1058 + 1230 \cdot \varepsilon_{Eq} - 550 \cdot \varepsilon_{Eq}^{2}$ (post-necking)
	Torsione	$\sigma_{Eq-Tors} = 1325 \cdot \varepsilon_{Eq}^{0.08}$

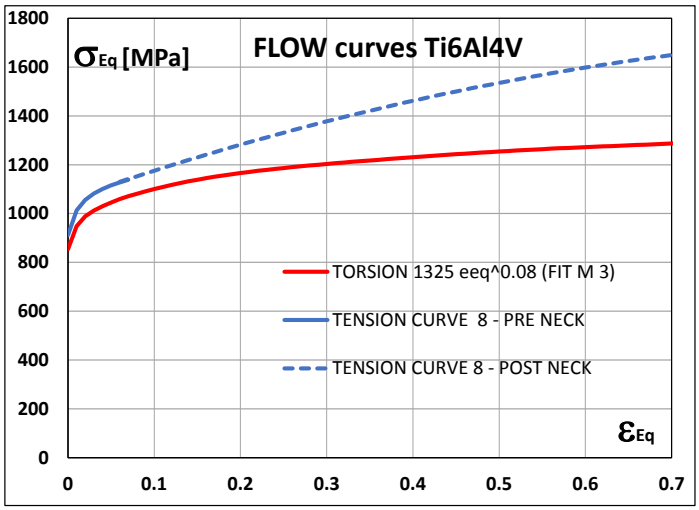


Figura 5 Funzioni di hardening del materiale da trazione e da torsione

La significativa differenza tra la curva da trazione e quella da torsione evidenzia come l'angolo di Lode abbia un ruolo chiave nello snervamento di questo metallo.
La funzione $m(\varepsilon_{Eq})$ per la lega Ti6Al4V, derivata considerando il modello di snervamento proposto e facendo riferimento in particolare all'eq.(4) è mostrata nella Figura 6.
I valori negativi di *m* indicano che, per bassi valori di deformazione plastica, la tensione di snervamento in taglio puro è intermedia tra quella di Tresca e quella di Mises a quel determinato livello di hardening.
La crescita di *m* indica che la forma della sezioni della superficie di snervamento cambia progressivamente, portando il vertice della torsione verso l'esterno o verso l'interno.
Quando $m=0$ lo snervamento per taglio puro diventa identico a quello del classico criterio di Tresca, anche se lo snervamento per angoli di Lode differenti è generalmente maggiore di quello previsto da Tresca; se invece si ha che anche il parametro quadratico *qa* pari a zero, l'intera superficie degenererà in quella di Tresca.
Valori positivi di *m* indicano che la superficie di snervamento è caratterizzata da bordi che tendono verso l'interno per angolo di Lode pari a zero e che lo snervamento per taglio puro risulta essere minore di quello previsto dal modello di Tresca per quel particolare livello di hardening.

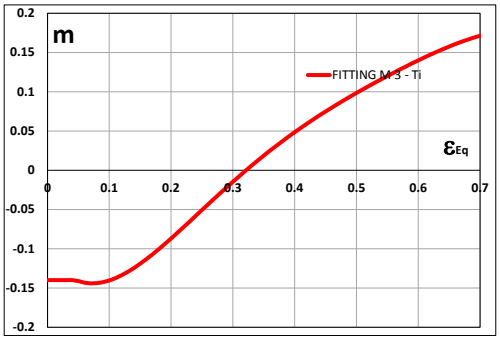


Figura 6 Funzione *m* per il materiale considerato

Il secondo parametro del modello di snervamento, *qa*, viene calibrato tramite *reverse engineering* attraverso simulazioni agli elementi finiti in modo da ottenere il miglior compromesso nella riproduzione della risposta macroscopica (carico-allungamento e coppia-rotazione) dei vari test di tensiotorsione effettuati con differenti combinazioni dei tipi di sollecitazione discussi precedentemente.
Tutte le simulazioni agli elementi finiti effettuate sono basate sulla *Update Lagrangian Finite General Plasticity* con la deocomposizione additiva delle deformazioni, opzioni disponibili nel software non lineare commerciale adottato; il modello di snervamento proposto e la corrispondente plasticità associata sono stati implementati attraverso subroutine in linguaggio Fortran. Gli spostamenti e le

rotazioni sono stati imposti per mezzo di superfici di contatto alle quali sono stati applicati i vincoli, i movimenti e i carichi voluti (Figura 7).

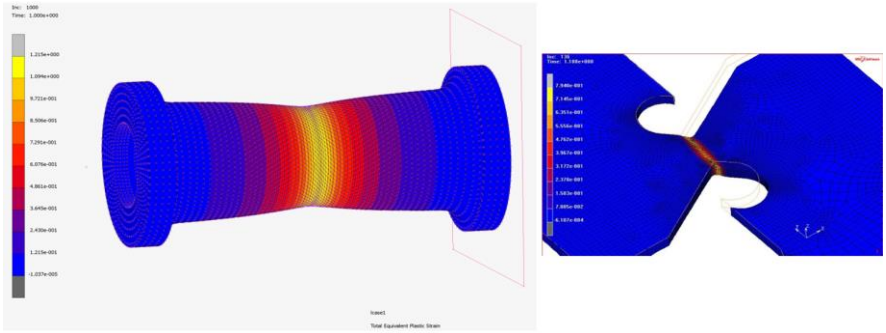


Figura 7 Mesh deformata del provino per il test di tensiotorsione e del provino piatto butterfly

Il valore del parametro *qa* ottenuto per il Ti6Al4V è 0.043 e, con la funzione *m* mostrata nella Figura 6 e la funzione di hardening uniassiale mostrata nella Figura 5, genera le superfici di snervamento crescenti mostrate nella Figura 8 per deformazioni pari rispettivamente a 0.02, 0.2, 0.4 e 0.6.

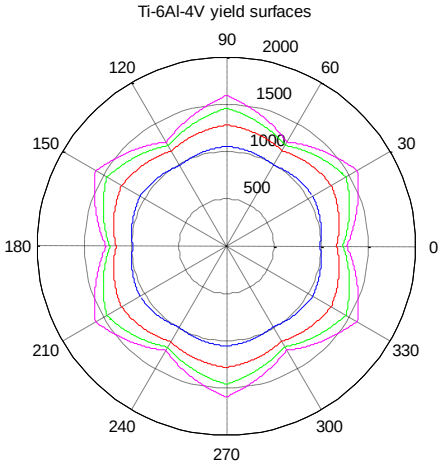


Figura 8 Superfici di snervamento del Ti-6Al-4V a diversi livelli di deformazione

La forma della superficie di snervamento varia con la deformazione ma il grado di curvatura dei suoi bordi è fissato a causa del valore costante di *qa*. È attualmente in fase di studio un'evoluzione del presente modello comprendente la variabilità del parametro *qa* con la deformazione, in modo da avere ancor più flessibilità nella calibrazione.
I risultati delle simulazioni agli elementi finiti dei test di Allahverdizadeh et al. effettuati con il presente modello e con il classico snervamento alla Mises sono mostrati nel paragrafo successivo; i risultati sono presentati in termini di risposta macroscopica (carico-allungamento, coppia-rotazione).

4. SIMULAZIONI AD X VARIABILE

Nella Figura 9 i risultati sperimentali sono confrontati con le simulazioni ottenute utilizzando il modello di snervamento proposto (grafici A e C) ed il classico snervamento alla Von Mises (grafici B e D).
Il risultato più importante ed evidente che si ottiene utilizzando una superficie di snervamento avente la dipendenza dall'angolo di Lode è la differenza nell'evoluzione della tensione di snervamento tra la condizione di trazione pura e quella di taglio puro; riguardo a quest'ultima prova, il modello proposto (curva nera continua nella Figura 9 C) permette di riprodurre in maniera molto accurata i dati sperimentali (curve nere puntinate nei grafici C e D della Figura 9), mentre le simulazioni con il classico snervamento alla Von Mises, tipicamente basate sulla curva costitutiva ottenuta dalla prova di

trazione (curva nera a tratti della Figura 9 D), genera notevoli approssimazioni con un errore vicino al 15% in corrispondenza della rottura.

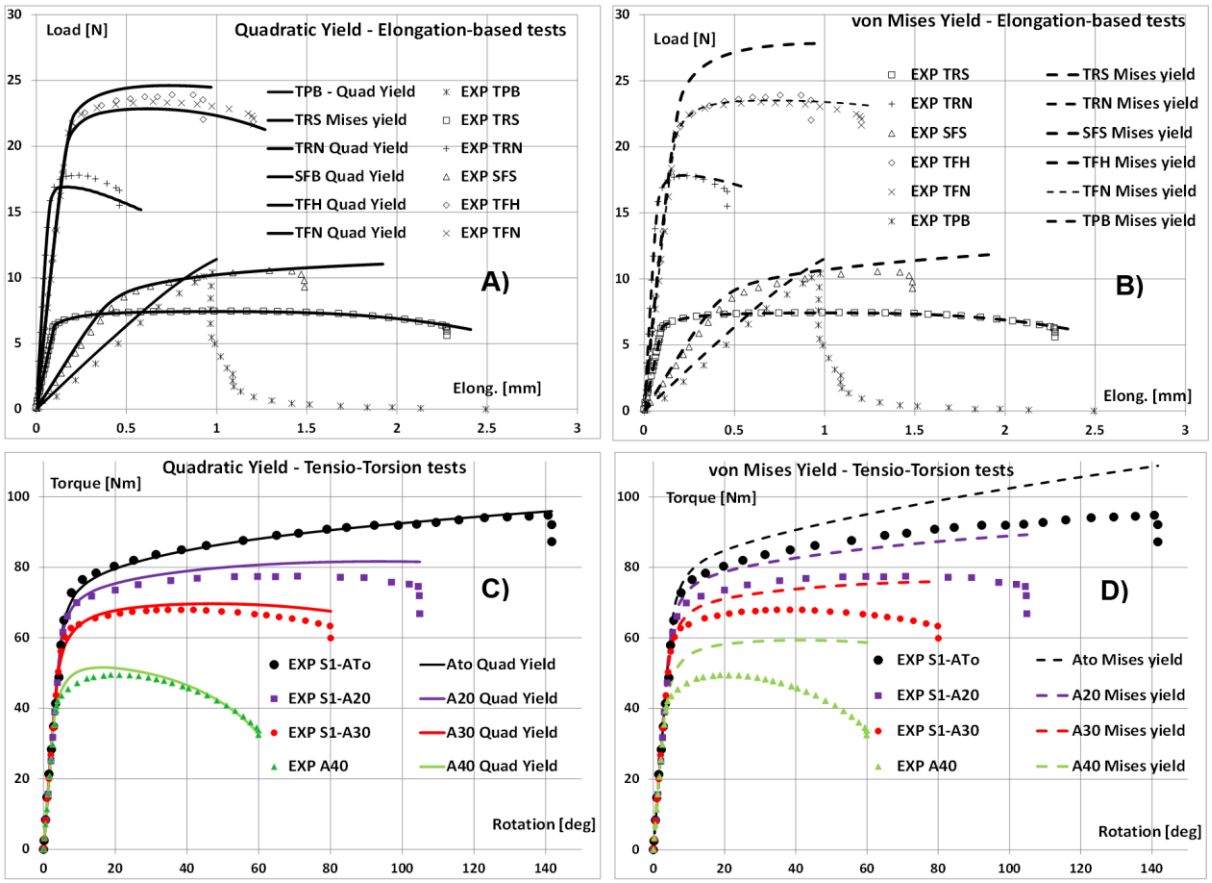


Figura 9 Simulazioni agli elementi finiti degli esperimenti con snervamento quadratico e alla Von Mises

I dati riportati nei grafici A e B della Figura 9 si riferiscono ai test di trazione nei quali, nonostante si possano generare delle tensioni di taglio a livello locale, non vengono applicate ne coppie ne rotazioni macroscopiche; in questo caso non viene usata alcuna codifica di colore in quanto la corrispondenza tra le curve sperimentali e quelle relative alle simulazioni agli elementi finiti è molto chiara.
Tutti i test di questa serie sono simulati in maniera accettabile dallo snervamento alla Von Mises e non si ottiene un grande miglioramento utilizzando lo snervamento quadratico, ad eccezione del test TFH, provino piatto con foro, in cui la scarsa accuratezza della simulazione alla Von Mises (errore oltre il 12% alla rottura) è sostanzialmente corretta dal modello di snervamento proposto (errore vicino al 3% alla rottura).
Nella Figura 9 C e D sono invece mostrati i dati relativi alle prove di tensiotorsione; in questo caso è stato necessario utilizzare una codifica di colore in quanto le simulazioni alla Von Mises effettuate presentano un'accuratezza così bassa da far sì che le curve simulate relative a certi test siano più vicine a curve sperimentali relative ad altri test, rendendo la corrispondenza poco chiara.
L'errore a rottura delle simulazioni alla Von Mises vanno dal 15% della prova di torsione pura fino al 30% della prova di tensiotorsione A40.
Tali differenze non possono essere causate dal danno del materiale, che è presente nello sperimentale a differenza delle simulazioni, in quanto è noto che la progressiva evoluzione dei microvuoti in stati tensionali con trazione preponderante ha un ruolo trascurabile sui valori degli stress locali e dei carichi macroscopici, come confermato dalla buona accuratezza delle simulazioni alla Von Mises per i test mostrati in Figura 9 A e B. Invece nella Figura 9 C, l'errore del 15% relativo alla torsione pura, cresce fino al 30% nel test A40 dove la componente assiale dello stato tensionale è la più grande del gruppo.
Di conseguenza tale scarsa accuratezza delle simulazioni caratterizzate da angolo di Lode diverso da 30 gradi, può essere ragionevolmente attribuito al criterio di snervamento alla Von Mises; l'utilizzo

della formulazione di snervamento quadratico proposta in questo lavoro è in grado di diminuire sostanzialmente l'errore, che spazia in questo caso tra praticamente nullo (torsione pura) all'8% (test A20), con nessuna apparente correlazione con il rapporto tra tensione e torsione.
L'evoluzione dello stato tensionale nel piano deviatorico per i test più "estremi" di tensiotorsione A20 e A40 nei punti del materiale più significativi dei provini (metà spessore e faccia esterna nella sezione di necking) è acquisita dalle simulazioni agli elementi finiti con lo snervamento dipendente dal parametro deviatorico ed è mostrata nella Figura 10.

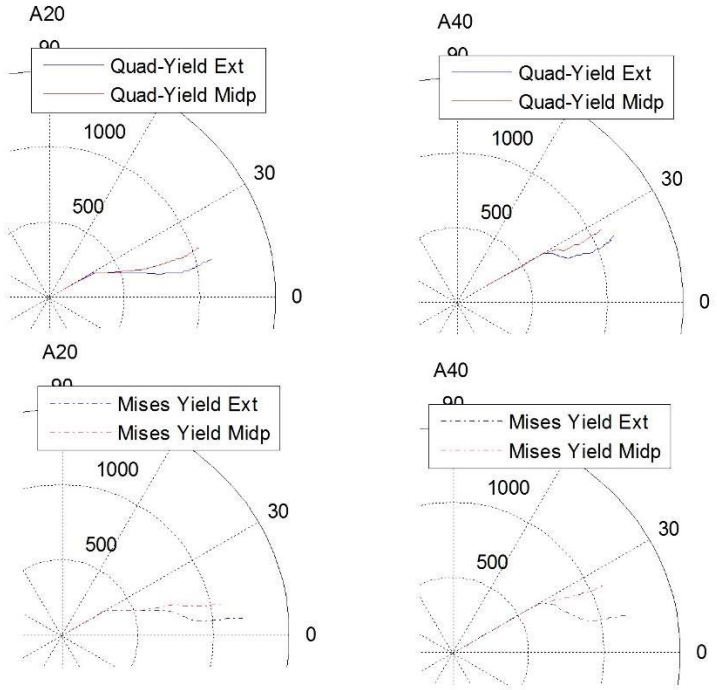


Figura 10 Evoluzione dello stato tensionale dei punti più significativi del materiale nei test A20 e A40

L'evoluzione dello stress è inizialmente molto simile allo stato monoassiale a causa del precarico di trazione applicato; nel test A20, la differenziazione dal caso uniassiale inizia prima che nel test A40 a causa del minore precarico. In entrambi i casi il percorso tensionale devia dall'iniziale andamento rettilineo, convergendo verso stati tensionali intermedi a deformazioni plastiche maggiori.
Come ci si poteva logicamente aspettare, la deviazione dal caso monoassiale è maggiore nel caso del test A20 in quanto il rapporto variabile tra coppia e precarico è in questo caso maggiore che nella prova A40.
In entrambi i test, il percorso tensionale del punti materiali appartenenti alla faccia esterna del provino devia maggiormente dalla monoassialità rispetto a quello relativo ai punti più interni in quanto la tensione di taglio indotta dalla coppia è nulla lungo l'asse del provino e cresce lungo il raggio della sezione fino alla faccia esterna.
I punti lungo l'asse del provino, non riportati in Figura 10, sono sottoposti solamente al precarico per cui il loro percorso tensionale evolve lungo la direzione caratterizzata da angolo di Lode pari a 30 gradi fino alla rottura.
L'adozione dello snervamento quadratico implica delle differenze minori anche nei percorsi tensionali, riducendo la variazione dell'angolo di Lode tra l'inizio e la fine di ogni test, come visibile comparando le curve continue dei due grafici superiori in Figura 10 con le curve a tratti dei due grafici inferiori.
Riassumendo, è possibile asserire che la grande differenza tra lo sperimentale e la predizione con il criterio di snervamento alla Von Mises che si ha in condizioni di taglio puro è completamente appianata utilizzando il modello proposto nel presente lavoro; ciò comporta che la caratterizzazione del modello attraverso la funzione *m* è in grado di riprodurre virtualmente qualsiasi possibile differenza variabile con la deformazione tra l'hardening del materiale in trazione pura e in torsione pura.

La caratterizzazione relativa al parametro *qa* che determina la transizione del modello da trazione pura a taglio puro a valori intermedi del parametro deviatorico potrebbe richiedere ulteriori modifiche e sviluppi.
Il singolo valore costante del parametro *qa* è risultato adatto a modellare correttamente la risposta della lega Ti6Al4V ma, per altri materiali, è plausibile che una curvatura dei bordi della superficie di snervamento variabile con la deformazione sia necessaria.

5. CONCLUSIONI

Nel presente lavoro è stato sviluppato un nuovo criterio di snervamento basato sull'evidenza sperimentale, presente in molti metalli strutturali, della differenza tra le funzioni di hardening ottenute con deformazione plastica corrispondente a diversi angoli di Lode.
La superficie di snervamento proposta è basata inizialmente sulla combinazione tra la superficie di Von Mises e quella di Tresca, caratterizzata da una sezione dodecagonale con bordi rettilinei.
Tale funzione di snervamento, che include la dipendenza dal parametro deviatorico X attraverso la calibrazione della funzione *m* ottenuta dalla relazione tra l'hardening in condizioni di taglio puro e trazione pura, viene ulteriormente amplificata con una funzione quadratica dell'angolo di Lode calibrata attraverso il parametro del materiale *qa.* Se il particolare materiale lo richiede, è possibile aggiungere una dipendenza analoga dalla tensione idrostatica.
I dati sperimentali di Allahverdizadeh et al. relativi a test su Ti6Al4V sono stati utilizzati per calibrare il modello e per valutarne la capacità di riprodurre il comportamento di tale lega sottoposta a diverse storie di deformazione plastica, con differenti percorsi tensionali e range di angoli di Lode.
La variazione sperimentale dell'angolo di Lode è garantita attraverso test con diversi rapporti tensione/torsione, trazione pura e torsione pura, così come con test di trazione su provini piatti caratterizzati da deformazione piana o sollecitazione di taglio (provini butterfly).
Il modello calibrato ha permesso di riprodurre tutti gli esperimenti con buona accuratezza, lasciando sostanzialmente inalterata la già buona accuratezza mostrata dal classico modello alla Von Mises nei test in cui lo stato tensionale evolve in maniera simile al caso uniassiale e correggendo quasi totalmente gli errori sostanziali che tale modello tradizionale introduce quando i test simulati contemplano angoli di Lode diversi dal caso di trazione pura.
Ulteriori esperimenti, in grado di garantire angoli di Lode costanti spaziati in maniera più fitta nel range 0-30 gradi, sarebbero utili per valutare in maniera più accurata la sensibilità dello snervamento alla variazioni dell'angolo di Lode.
Nonostante la risposta elastoplastica della lega Ti6Al4V sia accuratamente modellata dalla funzione di snervamento proposta, altri materiali dovrebbero essere modellati per valutare la generalizzazione del modello, includendo eventualmente un'evoluzione, attualmente in corso di studio, che incorpora una dipendenza dalla deformazione del paramentro di amplificazione quadratica $qa(\varepsilon_{EQ})$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Chaboche, JL., 1988. Continuum damage mechanics, Part I and II. J. Appl. Mech. 5 (55), 59–72.
[2] Lemaitre, J., 1985. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. J. Eng. Mater. Technol. (107), 83–99.
[3] Mackenzie, A.C., Hancock, J.W., Brown, D.K., 1977. On the influence of state of stress on ductile failure initiation in high strength steels. Eng. Fract. Mech. (9), 167–188.
[4] McClintock, F.A., 1968. A criterion for ductile fracture by growth of holes. J. Appl. Mech. (35), 363–379.
[5] Rice, J.R., Tracey, D.M., 1969. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. J. Mech. Phys. Solids (17), 201–217.
[6] Gurson, A.L., 1977. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. ASME Trans. J. Eng. Mater. Technol. (99), 2–15.

[7] Tvergaard, V., Needleman, A., 1984. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. Acta Metall. 32 (1), 157–169.
[8] Bao, Y., Wierzbicki, T., 2004. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. Int. J. Mech. Sci. 46, 81–98.
[9] Brunig M., Chyra O., Albrecht D., Driemeier L., Alves M., A ductile damage criterion at various stress triaxialities, International Journal of Plasticity 24 (2008) 1731–1755.
[10] Mirone G., Approximate model of the necking behaviour and application to the void growth prediction, Int. J. of Damage Mechanics (2004), 13 (3), 241-261.
[11] Wierzbicki, T., Bao, Y., Lee, Y.-W., Bai, Y., 2005. Calibration and evaluation of seven fracture models. Int. J. Mech. Sci. 47, 719–743.
[12] Xue L., Stress based fracture envelope for damage plastic solids Engineering Fracture Mechanics 76 (2009) 419–438
[13] Xue, Z., Pontin M.G., Zok F.W., Hutchinson J.W.. "Calibration procedures for a computational model of ductile fracture." Engineering Fracture Mechanics 77.3 (2010): 492-509
[14] Mae H., Teng X., Bai Y., Wierzbicki T., Calibration of ductile fracture properties of a cast aluminum alloy, Materials Science and Engineering A 459 (2007) 156–166.
[15] Ghajar R., Mirone G., Keshavarz A, Sensitivity Analysis on triaxiality factor and Lode angle in ductile fracture, Journal of Mechanics, 29 (2013), pp 177-184.
[16] Mirone G., Corallo D., a local viewpoint for evaluating the influence of stress triaxiality and lode angle on ductile damage and hardening, International Journal of Plasticity" 26, (2010), 348–371.
[17] Barsoum I., Faleskog J., Rupture mechanisms in combined tension and shear—Experiments, International Journal of Solids and Structures 44 (2007) 1768–1786.
[18] Mashayekhi M., Ziaei-Rad S., Identification and validation of a ductile damage model for A533 steel, Journal of Materials Processing Technology 177 (2006) 291–295.
[19] Bai Y., Wierzbicki T., Application of extended Mohr–Coulomb criterion to ductile fracture, Int J Fract (2010) 161:1–20
[20] Bai Y, Wierzbicki T., A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence, International Journal of Plasticity 24 (2008) 1071–1096.
[21] Bigoni D., Piccolroaz A., Yield criteria for quasibrittle and frictional materials, International Journal of Solids and Structures 41 (2004) 2855–2878
[22] Piccolroaz A., Bigoni D., Yield criteria for quasibrittle and frictional materials: A generalization to surfaces with corners International Journal of Solids and Structures 46 (2009) 3587–3596
[23] Penasa M., Piccolroaz A., Argani L., Bigoni D., Integration algorithms of elastoplasticity for ceramic powder compaction , Journal of the European Ceramic Society 34 (2014) 2775–2788
[24] Th. Lehmann, On a Generalized Constitutive Law in Thermo-Plasticity Taking into Account Different Yield Mechanisms* Aeta Mechaniea 57, 1--23 (1985)
[25] Paul B., Generalized pyramidal fracture and yield criteria , Int. J. Solids Strucrures, 1968, Vol. 4. pp. 175 - 196.
[26] Erice E., Gálvez F., A coupled elastoplastic-damage constitutive model with Lode angle dependent failure criterion, International Journal of Solids and Structures 51 (2014) 93–110.
[27] Gao X. Zhang T., Hayden M., Roe C., Effects of the stress state on plasticity and ductile failure of an aluminum 5083 alloy, International Journal of Plasticity 25 (2009) 2366–2382.
[28] Xue L., Wierzbicki T., ductile fracture characterization of aluminum alloy 2024-t351 using damage plasticity theory, International Journal of Applied Mechanics, Vol. 1, No. 2 (2009) 267–304.
[29] Gao X., Zhang T., Zhou J., Graham S., Hayden M., Roe C., On stress-state dependent plasticity modeling: Significance of the hydrostatic stress, the third invariant of stress deviator and the non-associated flow rule, International Journal of Plasticity 27 (2011) 217–231.
[30] Graham S., Zhang T., Gao X., Hayden M., Development of a combined tension–torsion experiment for calibration of ductile fracture models under conditions of low triaxiality, International Journal of Mechanical Sciences, 54(2012), 172–181.
[31] Nadai, A., 1963. Theory of flow and fracture solids - Volume 2. McGraw Hill, New York.

[32] Barsoum, Imad, Jonas Faleskog, and Shivinandan Pingle. "The effect of stress state on ductility in the moderate stress triaxiality regime of medium and high strength steels." International Journal of Mechanical Sciences 65.1 (2012): 203-212.
[33] Faleskog, Jonas, and Imad Barsoum. "Tension–torsion fracture experiments—Part I: Experiments and a procedure to evaluate the equivalent plastic strain." International Journal of Solids and Structures 50.25 (2013): 4241-4257.
[34] Xue, Zhenyu, Jonas Faleskog, and John W. Hutchinson. "Tension–torsion fracture experiments–Part II: Simulations with the extended Gurson model and a ductile fracture criterion based on plastic strain." International Journal of Solids and Structures 50.25 (2013): 4258-4269.
[35] Papasidero, Jessica, Véronique Doquet, and Dirk Mohr. "Determination of the effect of stress state on the onset of ductile fracture through tension-torsion experiments." Experimental Mechanics 54.2 (2014): 137-151.
[36] Dorogoy, A., Rittel, D., Godinger, A. "A Shear-Tension Specimen for Large Strain Testing" Experimental Mechanics (2015) 1-13
[37] Rodríguez-Millán, Marcos, Álvaro Vaz-Romero, and Ángel Arias. "Failure behavior of 2024-T3 aluminum under tension-torsion conditions." Journal of Mechanical Science and Technology 29.11 (2015): 4657-4663.
[38] Cortese, L., Coppola, T., Campanelli, F., Campana, F., & Sasso, M. (2014). Prediction of ductile failure in materials for onshore and offshore pipeline applications. International Journal of Damage Mechanics, 23(1), 104-123.
[39] Cortese L., et al. "A J2–J3 approach in plastic and damage description of ductile materials." International Journal of Damage Mechanics (2015): 1056789515577228.
[40] Mirone, G. Effetto Dei Parametri Di Triassialità e Deviatoricità sulla Risposta Dei Materiali Duttili. AIAS 2014
[41] N. Allahverdizadeh, A. Manes, M. Giglio, A. Gilioli, "Geometry Transferability of Lemaitre's Continuum Damage Mechanics Model in the Plane Stress Specimens", Key Engineering Materials, Vols. 592-593, pp. 266-270, 2014
[42] Allahverdizadeh, et al. "An experimental and numerical study for the damage characterization of a Ti–6AL–4V titanium alloy." International Journal of Mechanical Sciences 93 (2015): 32-47.
[43] N. Allahverdizadeh,, PhD Thesis, Polithecnic of Milan, 2014 https://www.google.it/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0ahUKEwic2LPo76HMAhVoLcAKHVmkBooQFggeMAA&url=https%3A%2F%2Fwww.politesi.polimi.it%2Fbitstream%2F10589%2F89287%2F1%2FNima%2520Allahverdizadeh.pdf&usg=AFQjCNETtNj9ct4EPXC0Zs9D18hcK7gbHg&bvm=bv.119745492,d.bGg&cad=rja