



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

XXIV CICLO DEL DOTTORATO DI RICERCA IN
MATEMATICA APPLICATA ALL'INGEGNERIA

TESI DI DOTTORATO

METODOLOGIE ANALYTIC HIERARCHY
PROCESS IBRIDE PER APPLICAZIONI DI
MULTIPLE CRITERIA DECISION ANALYSIS
AI PROCESSI DI PROCUREMENT

Antonio Giuseppe Latora

Coordinatore: Prof. Antonio Scalia

Tutor: Prof. Lucio Compagno

CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2010/2011

DICEMBRE 2011

Indice generale

Indice generale	2
Indice delle figure	4
Indice delle tabelle	6
Introduzione	10
1 Decision Aiding e Multiple Criteria Decision Analysis	13
1.1 Fondamenti di Multiple Criteria Decision Analysis.....	15
1.2 Scale di misura	17
1.3 Modellazione delle preferenze	22
1.3.1 Notazioni e definizioni di base	24
1.3.2 Semantica delle preferenze.....	26
1.3.3 Strutture di preferenza.....	32
1.3.4 Domini e rappresentazioni numeriche	41
1.3.5 Logica delle preferenze	49
1.4 Classificazione dei problemi di Multiple Criteria Decision Analysis.....	52
1.4.1 Outranking methods	55
1.4.2 Multi - Attribute Utility and Value Theories	59
2 Analytic Hierarchy Process	61
2.1 AHP-R per confronti relativi e ranking parallelo	66
2.2 Applicazione AHP-R per confronti relativi e ranking parallelo.....	71
2.3.1 Rating distributivo e pesi locali tra criteri in AHP-R.....	73
2.3.2 Rating distributivo/ideale e pesi locali delle alternative in AHP-R.....	75
2.3 AHP-A per confronti assoluti e ranking seriale	92
2.4 Applicazione AHP-A per confronti assoluti e ranking seriale	94
2.3.3 Rating distributivo e pesi locali tra criteri in AHP-A	95
2.3.4 Rating distributivo/ideale e pesi locali delle intensità in AHP-A	95
2.3.5 Rating ideale delle alternative in AHP-A.....	98
2.5 Fondamenti di AHP	107
2.5.1 Scale di rapporto derivanti da reciproci confronti a coppie.....	108
2.5.2 Origine psico-fisica della scala fondamentale.....	109

2.5.3	<i>Consistenza della matrice di confronto a coppie e sensitività dell'autovettore principale.....</i>	112
2.5.4	<i>Omogeneità e clustering per l'estensione della scala fondamentale.....</i>	114
2.5.5	<i>Sintesi delle priorità.....</i>	115
2.5.6	<i>Conservazione ed inversione del rango.....</i>	116
2.6	Assiomi di AHP.....	120
2.6.1	<i>Assioma di reciprocità.....</i>	121
2.6.2	<i>Assiomi di gerarchia.....</i>	122
2.6.3	<i>Principio di composizione gerarchica.....</i>	124
2.7	Criticità in AHP.....	125
3	Hybrid Analytic Hierarchy Process (H-AHP).....	127
3.1	H-AHP-R per confronti relativi e ranking parallelo.....	131
3.2	H-AHP-A per confronti assoluti e ranking seriale.....	133
3.3	Validazione metodologie H-AHP-R ed H-AHP-A.....	135
4	Metodologia H-AHP-A per processi di approvvigionamento.....	138
4.1	Processi di procurement ed e-procurement.....	139
4.2	Lean e – scouting MCDA H-AHP-A.....	147
4.2.1	<i>SWOT analysis lean e – scouting MCDA H-AHP-A.....</i>	151
4.3	Applicazione lean e – scouting MCDA H-AHP-A.....	152
4.3.1	<i>Descrizione generale dei bisogni.....</i>	153
4.4.1	<i>Ricerca del prodotto/servizio.....</i>	153
4.4.2	<i>Selezione del prodotto/servizio.....</i>	155
4.4	Validazione lean e – scouting MCDA H-AHP-A.....	174
	Conclusioni.....	178
	Bibliografia.....	180

Indice delle figure

Figura 1-1 Matrice criteri – decisori	15
Figura 1-2 Rappresentazione grafica relazione binaria R.....	26
Figura 1-3 Rappresentazione grafica semi ordine $S=(P,I)$	48
Figura 2-1 Gerarchia AHP a 3 livelli.....	66
Figura 2-2 Gerarchia applicazione AHP-R.....	72
Figura 2-3 Rating distributivo dei criteri	75
Figura 2-4 Rating distributivo AHP-R delle alternative su “A_Quant”	78
Figura 2-5 Rating ideale AHP-R delle alternative su “A_Quant”	78
Figura 2-6 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “A_Quant”	79
Figura 2-7 Rating distributivo AHP-R delle alternative su “B_Qual”	81
Figura 2-8 Rating ideale AHP-R delle alternative su “B_Qual”	82
Figura 2-9 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “B_Qual”	82
Figura 2-10 Rating distributivo AHP-R delle alternative su “C_Quant”	85
Figura 2-11 Rating ideale AHP-R delle alternative su “C_Quant”	85
Figura 2-12 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “C_Quant”	86
Figura 2-13 Rating distributivo AHP-R delle alternative su “D_Qual”	88
Figura 2-14 Rating ideale AHP-R delle alternative su “D_Qual”	89
Figura 2-15 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “D_Qual”.....	90
Figura 2-16 Rating ideale globale AHP-R delle alternative sui criteri.....	91
Figura 2-17 Rating e ranking globale AHP-R delle alternative sui criteri	92
Figura 2-18 Gerarchia AHP a 4 livelli.....	93
Figura 2-19 Gerarchia applicazione AHP-A	94
Figura 2-20 Rating distributivo AHP-A delle intensità	97
Figura 2-21 Rating ideale AHP-A delle intensità.....	98
Figura 2-22 Rating ideale AHP-A delle alternative su “A_Quant”	99
Figura 2-23 Rating e ranking AHP-A delle alternative su “A_Quant”	100
Figura 2-24 Rating ideale AHP-A delle alternative su “B_Qual”	101
Figura 2-25 Rating e ranking AHP-A delle alternative su “B_Qual”.....	101
Figura 2-26 Rating ideale AHP-A delle alternative su “C_Quant”	102
Figura 2-27 Rating e ranking AHP-A delle alternative su “C_Quant”	103

Figura 2-28 Rating ideale AHP-A delle alternative su “D_Qual”	104
Figura 2-29 Rating e ranking AHP-A delle alternative su “D_Qual”	104
Figura 2-30 Rating ideale globale AHP-A delle alternative sui criteri.....	106
Figura 2-31 Rating e ranking globale AHP-A delle alternative sui criteri	106
Figura 3-1 Rating ideale globale NO-AHP delle alternative sui criteri.....	130
Figura 3-2 Rating e ranking globale NO-AHP delle alternative sui criteri	130
Figura 3-3 Rating ideale globale H-AHP-R delle alternative sui criteri.....	132
Figura 3-4 Rating e ranking globale H-AHP-R delle alternative sui criteri	133
Figura 3-5 Rating ideale globale H-AHP-A delle alternative sui criteri	134
Figura 3-6 Rating e ranking globale H-AHP-A delle alternative sui criteri.....	135
Figura 3-7 Confronto metodologico su rating ideale globale	136
Figura 3-8 Confronto metodologico rating ideale globale e ranking.....	137
Figura 4-1. Procurement process per un “nuovo acquisto”	143
Figura 4-2. Le 5 forze della struttura industriale di Porter	144
Figura 4-3. Matrice di Krajic	145
Figura 4-4. Catena del valore di Porter.....	146
Figura 4-5. Procurement process per un “nuovo acquisto” mediante “lean e – scouting” MCDA H-AHP-A.....	150
Figura 4-6 Gerarchia 3 livelli “lean e – scouting” MCDA H-AHP-A.....	152
Figura 4-7 Rating ideale globale NO-AHP delle alternative sui criteri.....	158
Figura 4-8 Statistica rating ideale globale NO-AHP	159
Figura 4-9 Rating e ranking globale NO-AHP delle alternative sui criteri	161
Figura 4-10 Gerarchia 3 livelli “lean e – scouting” MCDA H-AHP-A.....	161
Figura 4-11 Rating ideale globale AHP-A delle alternative sui criteri.....	165
Figura 4-12 Statistica rating ideale globale AHP-A	166
Figura 4-13 Rating e ranking globale AHP-A delle alternative sui criteri	168
Figura 4-14 Rating ideale globale H-AHP-A delle alternative sui criteri	171
Figura 4-15 Statistica rating ideale globale H-AHP-A	172
Figura 4-16 Rating e ranking globale H-AHP-A delle alternative sui criteri.....	174
Figura 4-17 Confronto metodologico su rating ideale globale	175
Figura 4-18 Confronto statistico su rating ideale globale.....	176
Figura 4-19 Confronto metodologico rating ideale globale e ranking.....	176

Indice delle tabelle

Tabella 1-1 Scale di misura di Stevens.....	19
Tabella 1-2 Rappresentazione matriciale relazione binaria R	26
Tabella 1-3 Principali t-norme e s-norme	30
Tabella 1-4 ε – rappresentazioni per $\varepsilon=1$	48
Tabella 2-1 Scala fondamentale di Saaty.....	67
Tabella 2-2 Random index.....	71
Tabella 2-3 Performance quali – quantitative delle alternative sui criteri.....	73
Tabella 2-4 Matrice di confronto a coppie tra i criteri.....	73
Tabella 2-5 Autovettore principale per la matrice di confronto a coppie tra criteri ..	74
Tabella 2-6 Autovettore principale normalizzato distributivo per la matrice di confronto a coppie tra criteri.....	74
Tabella 2-7 Autovalore λ_{max} per la matrice di confronto a coppie tra criteri	74
Tabella 2-8 Indice di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra criteri.....	75
Tabella 2-9 Rapporto di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra criteri	75
Tabella 2-10 Rating distributivo dei criteri.....	75
Tabella 2-11 Matrice di confronto a coppie tra alternative su “A_Quant”	76
Tabella 2-12 Autovettore principale per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “A_Quant”.....	76
Tabella 2-13 Autovettore principale normalizzato distributivo per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “A_Quant”.....	77
Tabella 2-14 Autovalore λ_{max} per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “A_Quant”	77
Tabella 2-15 Indice di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “A_Quant”.....	77
Tabella 2-16 Rapporto di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “A_Quant”.....	77
Tabella 2-17 Rating distributivo ed ideale AHP-R delle alternative su “A_Quant” .	78
Tabella 2-18 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “A_Quant”	79
Tabella 2-19 Matrice di confronto a coppie tra alternative su “B_Qual”	79
Tabella 2-20 Autovettore principale per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “B_Qual”	80

Tabella 2-21 Autovettore principale normalizzato distributivo per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “B_Qual”	80
Tabella 2-22 Autovalore λ_{max} per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “B_Qual”	80
Tabella 2-23 Indice di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “B_Qual”	80
Tabella 2-24 Rapporto di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “B_Qual”	81
Tabella 2-25 Rating distributivo ed ideale AHP-R delle alternative su “B_Qual” ...	81
Tabella 2-26 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “B_Qual”	82
Tabella 2-27 Matrice di confronto a coppie tra alternative su “C_Quant”	83
Tabella 2-28 Autovettore principale per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “C_Quant”	83
Tabella 2-29 Autovettore principale normalizzato distributivo per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “C_Quant”	84
Tabella 2-30 Autovalore λ_{max} per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “C_Quant”	84
Tabella 2-31 Indice di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “C_Quant”	84
Tabella 2-32 Rapporto di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “C_Quant”	84
Tabella 2-33 Rating distributivo ed ideale AHP-R delle alternative su “C_Quant” .	85
Tabella 2-34 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “C_Quant”	86
Tabella 2-35 Matrice di confronto a coppie tra alternative su “D_Qual”	86
Tabella 2-36 Autovettore principale per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “D_Qual”	87
Tabella 2-37 Autovettore principale normalizzato distributivo per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “D_Qual”	87
Tabella 2-38 Autovalore λ_{max} per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “D_Qual”	87
Tabella 2-39 Indice di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “D_Qual”	87
Tabella 2-40 Rapporto di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “D_Qual”	88
Tabella 2-41 Rating distributivo ed ideale AHP-R delle alternative su “D_Qual” ...	88
Tabella 2-42 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “D_Qual”	89
Tabella 2-43 Rating ideale AHP-R delle alternative sui criteri	90

Tabella 2-44 Rating ideale globale AHP-R delle alternative sui criteri	91
Tabella 2-45 Rating e ranking globale AHP-R delle alternative sui criteri.....	91
Tabella 2-46 Performance quali – quantitative delle alternative sui criteri.....	95
Tabella 2-47 Matrice di confronto a coppie tra le intensità.....	96
Tabella 2-48 Autovettore principale per la matrice di confronto tra le intensità.....	96
Tabella 2-49 Autovettore principale normalizzato distributivo per la matrice di confronto a coppie tra le intensità.....	96
Tabella 2-50 Autovalore λ_{max} per la matrice di confronto a coppie tra le intensità	96
Tabella 2-51 Indice di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra le intensità	97
Tabella 2-52 Rapporto di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra le intensità.....	97
Tabella 2-53 Rating distributivo ed ideale AHP-A delle intensità.....	97
Tabella 2-54 Associazione tra intensità, rating ideale delle intensità ed intervalli potenziali di valori di performance.....	98
Tabella 2-55 Rating ideale AHP-A delle alternative su “A_Quant”	99
Tabella 2-56 Rating e ranking AHP-A delle alternative su “A_Quant”.....	99
Tabella 2-57 Rating ideale AHP-A delle alternative su “B_Qual”	100
Tabella 2-58 Rating e ranking AHP-A delle alternative su “B_Qual”	101
Tabella 2-59 Rating ideale AHP-A delle alternative su “C_Quant”	102
Tabella 2-60 Rating e ranking AHP-A delle alternative su “C_Quant”	103
Tabella 2-61 Rating ideale AHP-A delle alternative su “D_Qual”	103
Tabella 2-62 Rating e ranking AHP-A delle alternative su “D_Qual”.....	104
Tabella 2-63 Rating ideale AHP-A delle alternative sui criteri.....	105
Tabella 2-64 Rating ideale globale AHP-A delle alternative sui criteri.....	105
Tabella 2-65 Rating e ranking globale AHP-A delle alternative sui criteri.....	106
Tabella 3-1 Rating ideale NO-AHP delle alternative sui criteri.....	129
Tabella 3-2 Rating ideale globale NO-AHP delle alternative sui criteri	129
Tabella 3-3 Rating e ranking globale NO-AHP delle alternative sui criteri.....	130
Tabella 3-4 Rating ideale H-AHP-R delle alternative sui criteri.....	131
Tabella 3-5 Rating ideale globale H-AHP-R delle alternative sui criteri	132
Tabella 3-6 Rating e ranking globale H-AHP-R delle alternative sui criteri.....	132
Tabella 3-7 Rating ideale H-AHP-A delle alternative sui criteri.....	133
Tabella 3-8 Rating ideale globale H-AHP-A delle alternative sui criteri.....	134

Tabella 3-9 Rating e ranking globale H-AHP-A delle alternative sui criteri	135
Tabella 4-1 Matrice di Kotler buygrid/buyphase.....	141
Tabella 4-2 Lean e - scouting SWOT analysis	152
Tabella 4-3 Performance - “dati di targa” delle alternative sui criteri.....	155
Tabella 4-4 Rating ideale NO-AHP delle alternative sui criteri.....	156
Tabella 4-5 Rating ideale globale NO-AHP delle alternative sui criteri	158
Tabella 4-6 Statistica rating ideale globale NO-AHP.....	159
Tabella 4-7 Rating e ranking globale NO-AHP delle alternative sui criteri.....	160
Tabella 4-8 Rating ideale AHP-A delle alternative sui criteri.....	163
Tabella 4-9 Rating ideale globale AHP-A delle alternative sui criteri.....	164
Tabella 4-10 Statistica rating ideale globale AHP-A.....	165
Tabella 4-11 Rating e ranking globale AHP-A delle alternative sui criteri.....	167
Tabella 4-12 Rating ideale H-AHP-A delle alternative sui criteri.....	169
Tabella 4-13 Rating ideale globale H-AHP-A delle alternative sui criteri.....	171
Tabella 4-14 Statistica rating ideale globale H-AHP-A	172
Tabella 4-15 Rating e ranking globale H-AHP-A delle alternative sui criteri	173

Introduzione

“Scelta cosciente e ragionata di una tra le varie possibilità di azione o di comportamento” la *decisione*, dal latino *decisio – onis*, derivazione di *decīdĕre*, composizione di *de - e caedĕre* traduzione di *tagliar via*, ha sempre ispirato l’attività di filosofi e pensatori (1).

Ignazio di Loyola¹ scriveva negli Esercizi spirituali:

“Considerare, ragionando, quanti vantaggi o utilità mi provengono nel tenere l'ufficio o beneficio proposto, solo per la lode di Dio nostro Signore e la salvezza della mia anima; e, al contrario, considerare ugualmente gli svantaggi e i pericoli che ci sono nel tenerlo. Fare altrettanto nella seconda parte: considerare cioè i vantaggi e utilità nel non tenerlo, e similmente, al contrario, gli svantaggi e pericoli nel non tenerlo” (2).

Vantaggi e svantaggi, ossia costi e benefici connessi alla decisione, dipendono dai molteplici, spesso contrastanti, punti di vista o *criteri* utilizzati nell’attività di *decision making*. Per molti anni tuttavia, la matematica applicata a supporto delle decisioni, in particolare la ricerca operativa, è stata orientata verso lo studio di funzioni obiettivo in grado di comprimere in un’unica scala di misura molteplici aspetti appartenenti al mondo reale.

L’approccio realistico, naturalmente multidimensionale, embrionale nella dottrina cinquecentesca di S. Ignazio di Loyola, si concretizza da quarant’anni a

¹ Ignazio di Loyola, (Loyola, 24 dicembre 1491 – Roma, 31 luglio 1556), fondatore della Compagnia di Gesù o Ordine dei Gesuiti, proclamato Santo nel 1622, autore degli *Esercizi spirituali*, manifesto cattolico incentrato sul concetto di “Discernimento”.

questa parte in una disciplina matematica definita *Multiple Criteria Decision Analysis* (MCDA).

Nei secoli, numerosi studiosi di scienze economiche e sociali si sono tuttavia indirettamente cimentati in esercizi che oggi convergono a più vie nella disciplina MCDA: nelle opere duecentesche di Raimondo Lullo² è presente il concetto di *confronto a coppie*; dagli scritti del Quattrocento di Niccolò Cusano³ emerge la prima forma di *scoring method*⁴; nelle opere del XIX secolo di Vilfredo Pareto⁵ è richiamato il concetto di *dominanza*.

Convenzionalmente ritenuto l'anno zero per il MCDA, il 1972 ha visto concretizzarsi la prima conferenza sul *Multiple Criteria Decision Making* organizzata da James Cochrane e Milan Zeleny alla Columbia University in South Carolina (3). Da allora il MCDA ha suscitato notevole interesse tra gli studiosi che ne hanno quindi determinato l'evoluzione sino ai giorni nostri caratterizzando il MCDA come disciplina nella quale la distanza tra teoria e pratica si presenta marginale per via delle numerose applicazioni proposte in letteratura.

Obiettivo della tesi di dottorato è l'applicazione all'*ingegneria gestionale* della disciplina matematica *Multiple Criteria Decision Analysis*. La complessa articolazione della disciplina oggetto di studio, nonché la vastità del settore

² Raimondo Lullo (Palma di Maiorca, 1235 – 1316) fu un filosofo, scrittore e missionario spagnolo di lingua e cultura catalana, tra i più celebri dell'Europa del tempo, si cimentò in opere di filosofia, teologia, mistiche, pedagogiche, di medicina, di scienze naturali, di fisica, matematica, letterarie e poetiche; Tra le tante: *Ars magna*, *Logica nova*, *Ars generalis*.

³ Niccolò Cusano (Kues, 1401 – Todi, 11 agosto 1464), è stato un cardinale, teologo, filosofo, umanista, giurista, matematico e astronomo tedesco. Il suo pensiero, fondato sull'idea che la possibilità di conoscenza è basata sulla proporzione fra noto e ignoto, è esposto nella sua opera principale *De docta ignorantia*.

⁴ Modelli multivariati per lo studio della probabilità di accadimento di un fenomeno tramite l'utilizzo di KPI inerenti il fenomeno e coefficienti di ponderazione in grado di descrivere l'importanza relativa di ogni KPI nel prevedere il fenomeno oggetto di analisi.

⁵ Vilfredo Federico Damaso Pareto (Parigi, 15 luglio 1848 – Céligny, 19 agosto 1923) è stato un ingegnere, economista e sociologo italiano; tra i maggiori esponenti della teoria economica marginalistica o neo-classica, il suo operato si fonda sul tentativo di trasferire nella scienza economica il metodo sperimentale delle scienze fisiche, con il conseguente uso delle matematiche.

dell'ingegneria scelto per l'applicazione della stessa, hanno determinato la necessità di focalizzare il lavoro di tesi sull'applicazione di una particolare metodologia MCDA ad uno specifico campo applicativo di *management engineering*; la restrizione del campo di lavoro ha quindi portato alla scelta di studiare, modificare ed applicare la metodologia MCDA *Analytic Hierarchy Process* (AHP) al *procurement*, processo di ingegneria gestionale dedicato all'approvvigionamento di beni e servizi ed oggi anello fondamentale della *value chain*.

La tesi di dottorato si articola in quattro capitoli.

Il primo capitolo introduce il lettore al variegato mondo del MCDA, consente l'analisi delle basi matematiche sulle quali si fonda la disciplina ed elenca le principali metodologie frutto delle due scuole di pensiero che si sono cimentate nello studio del MCDA.

Il secondo capitolo è dedicato alla metodologia AHP selezionata, tra le altre metodologie MCDA, ai fini dello studio poiché speditamente emendabile ovvero particolarmente flessibile ed adattabile ai processi di approvvigionamento a seguire definiti.

Il terzo capitolo della tesi riporta il lavoro di ricerca, analitico e sperimentale, operato con lo scopo di modificare la metodologia MCDA AHP introducendo una versione ibrida, particolarmente snella e potenzialmente applicabile in ogni contesto decisionale.

Il quarto capitolo riporta un'introduzione ai processi di approvvigionamento ed alla relativa evoluzione degli stessi determinatasi a seguito dell'informatizzazione; ai processi di approvvigionamento evoluti è quindi applicata la metodologia ibrida MCDA AHP oggetto di ricerca.

1 Decision Aiding e Multiple Criteria Decision Analysis

Supporto, attraverso l'utilizzo di modelli espliciti ma non necessariamente del tutto formali, per ottenere risposte alle domande poste da uno stakeholder del processo decisionale, al fine di chiarire e di solito raccomandare o favorire un comportamento che aumenta la coerenza tra processo decisionale ed obiettivi della parte interessata (4).

Questa definizione di *Decision Aiding* (DA) elaborata da Bernard Roy⁶ pone in evidenza che il DA mira a stabilire, su basi scientifiche riconosciute, con riferimento alle ipotesi di lavoro elaborate, formulazioni di proposizioni prive di “prescrizioni” da sottoporre al giudizio del decisore e/o dei vari stakeholder coinvolti nel processo decisionale.

Il DA contribuisce quindi a:

- analizzare il contesto decisionale individuando gli attori, le varie possibilità di azione, le rispettive conseguenze;
- strutturare il processo decisionale per incrementare la coerenza tra obiettivi del processo e decisione finale;
- elaborare “raccomandazioni” per mezzo di risultati tratti da modelli e procedure computazionali, concepite nel quadro di ipotesi di lavoro predefinite, in grado di contribuire alla legittimazione della decisione finale.

⁶ Bernard Roy (Moulins, 1934) è Professore Emerito all'Université Paris-Dauphine. Nel 1974 ha fondato il "Laboratoire d'Analyse et de Modélisation des Systèmes pour l'Aide à la Décision" (Lamsade). Ha lavorato alla Teoria dei Grafi ed ha creato e sviluppato i metodi MCDA ELECTRE.

Le decisioni non rappresentano esclusivamente un “atto di scelta” ma sono il risultato di un “processo decisionale” ovvero di una serie di attività cognitive che consentono la trasformazione di un “problema” in “soluzione” determinando, nel soggetto chiamato a decidere, un passaggio di stato psicologico da una percezione di insoddisfazione ad una di soddisfazione. La soluzione di un problema di DA quindi non passa esclusivamente per il risultato tecnicamente raggiungibile ma anche attraverso la comprensione e la modellazione del problema decisionale oltre che per l’interpretazione del risultato raggiunto (5).

In funzione del numero di decisori coinvolti nel processo decisionale è possibile distinguere:

- DA mono - decisore;
- DA multi - decisore.

In base al numero di criteri utilizzati nel processo decisionale è possibile distinguere:

- DA mono - criterio;
- DA multi - criterio.

In Figura 1-1 è rappresentata la matrice Criteri - Decisori nell’ambito della quale è realistico ipotizzare una netta prevalenza di casi di DA ricadenti nei quadranti I e IV. In molti processi decisionali intervengono difatti n decisori con $n \in N^+$ i quali possono contribuire al medesimo processo decisionale il cui risultato può dipendere da m punti di vista o criteri con $m \in N^+$, ognuno dei quali è utilizzato per la valutazione di ogni potenziale entità su una scala qualitativa o quantitativa appropriata, descrittiva di un sistema di valori riconosciuto come significativo da tutti i decisori.

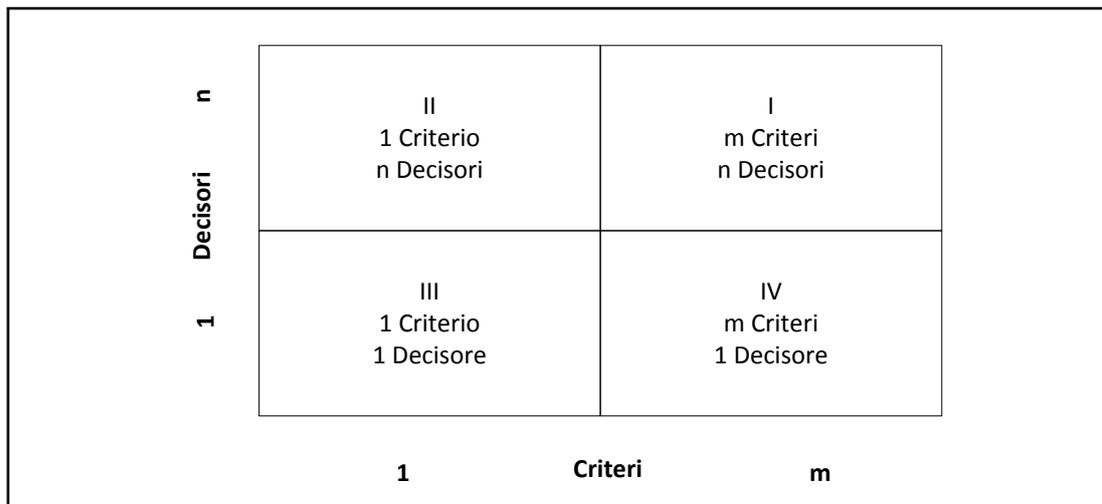


Figura 1-1 Matrice criteri – decisori

1.1 Fondamenti di Multiple Criteria Decision Analysis

Il generico problema di MCDA può essere definito come un particolare problema di DA nel quale si evidenziano:

- la necessità di operare *choosing, ranking, sorting* o *description* di un numero finito o infinito di azioni potenziali o alternative;
- l'esistenza di almeno due criteri di decisione;
- la presenza di almeno un *decision maker* (6).

In MCDA, una potenziale azione che può essere intrapresa a seguito del processo decisionale prende il nome di *alternativa* se si presenta mutualmente esclusiva in relazione alle ulteriori azioni potenziali. Si tratterà pertanto di azioni potenziali se queste possono essere implementate congiuntamente perché viste quali frammenti di una decisione di più alto livello; qualora venga ravvisata la mutua esclusività delle azioni potenziali si dirà di alternative o potenziali azioni mutuamente esclusive oggetto di decisioni globali. Fattibilità o possibilità di attuazione non sono insite nel concetto di azione potenziale o alternativa.

Il simbolo a denota la singola potenziale azione o alternativa; con il simbolo A si indica invece un insieme di potenziali azioni o alternative in una data una fase del processo decisionale; l'insieme A non è necessariamente stabile ma può evolvere a seguito dell'intervento di fattori interni ed esterni al processo decisionale.

Le potenziali azioni o alternative possono essere in numero finito; in tal caso si scriverà: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ con $|A| = k$. Potenziali azioni ed alternative possono inoltre essere modellizzate facendo riferimento a variabili analitiche; in tal caso si indicherà: $a = (x_1, x_2, \dots)$.

Il dominio A può essere definito da una serie di vincoli analitici in grado di definire l'ammissibilità o meno di potenziali azioni o alternative; in tal caso si tratterà di MCDA multi – obiettivo.

In modellazioni di altra natura il valore di ogni variabile x_i con $i = (1, 2, \dots, r)$ rappresenta il possibile punteggio su una scala X_i costruita ai fini della valutazione delle potenziali azioni o alternative su un criterio specifico. In questo secondo caso A può essere visto come il sottoinsieme del prodotto cartesiano $X = \prod_{i=1}^r X_i$; in tal caso si evidenzieranno problemi MCDA multi – attributo.

Un criterio g nel generico problema di MCDA è uno strumento per la valutazione e la comparazione delle potenziali azioni o alternative, in base ad un punto di vista ben definito rappresentativo di una dato sistema di valori. Ai fini della valutazione e della comparazione è necessario che per ogni potenziale azione o alternativa a venga considerata una *performance* $g(a)$ della medesima potenziale azione o alternativa di norma dichiarata sotto forma di numero o espressione verbale.

L'insieme F degli m criteri con $m \in N^+, m > 1$, definito *famiglia di criteri*, al fine di ricoprire un ruolo significativo nel processo decisionale, deve essere riconosciuto da ogni stakeholder come:

- *esaustivo*: due alternative a e b che presentano il medesimo livello di performance in ognuno degli m criteri della famiglia dovranno necessariamente presentare il medesimo risultato in termini di preferenza;

- *coesivo*: l'alternativa a è da preferire all'alternativa b se presenta un livello di performance superiore su un criterio dal peso positivo a parità di livelli di performance in ognuno degli altri $m - 1$ criteri della famiglia;
- *non ridondante*: almeno uno dei presupposti sopra citati risulterà violato se uno degli m criteri non apparterrà alla famiglia.

Intelligibilità ed affidabilità rappresentano caratteristiche ulteriori riconosciute dagli stakeholder agli m criteri della famiglia che costituiscono l'insieme F e che possono non essere indipendenti tra loro anche se in alcuni casi l'indipendenza potrebbe essere richiesta; in ogni criterio inoltre il gradiente di preferenza lungo i livelli della scala deve essere riconosciuto da tutti gli stakeholder.

Tra gli m criteri della famiglia vige in taluni casi il concetto di *importanza relativa*: spesso la pesatura dei criteri avviene infatti in logica compensatoria esprimendo, anche tramite valori numerici, il livello di preferenza di un criterio rispetto ad un altro; in tal caso l'effetto in termini di preferenza di tale valutazione soggettiva è fortemente legato alle modalità di aggregazione dei criteri nel processo decisionale, concetto questo non valido in caso di assegnazione ai criteri di valori di importanza in modalità non relativa.

In ogni generico problema di MCDA è necessario definire esplicitamente un insieme X_g di tutte le valutazioni possibili alle quali il criterio g può condurre ed ordinare in modo crescente l'insieme delle valutazioni possibili che in siffatta strutturazione prenderà il nome di *scala* del criterio g e si indicherà con (\leq_g, X_g) . Gli elementi $x \in X_g$ sono definiti *livelli* della scala.

1.2 Scale di misura

Quando si può misurare ciò di cui si sta parlando ed esprimerlo in numeri, allora si ha conoscenza del fenomeno, ma quando non lo si può misurare, quando non è possibile esprimerlo in numeri, la conoscenza è magra ed

insoddisfacente. Può essere quello l'inizio di conoscenza, ma si dispone di poco ed è necessario avanzare a stadi ulteriori della scienza (7).

Nel 1883 William Thomson⁷, meglio conosciuto come Lord Kelvin, poneva misurazioni ed espressioni numeriche alla base della conoscenza di ogni fenomeno. Mezzo secolo dopo, nel 1932, un comitato della British Association for the Advancement of Science, chiamato ad esprimersi circa la possibilità di stimare quantitativamente un evento sensoriale umano, dibatté per più di sette anni prima di giungere a conclusioni discordanti sul tema proposto e sul significato stesso di misura. Le inappropriate conclusioni della British Association for the Advancement of Science ispirarono il lavoro di Stanley Smith Stevens sulla classificazione delle scale di misura pubblicato nel 1946. Dalla definizione di misura intesa in letteratura intesa quale assegnazione di numeri a fenomeni in base a specifiche leggi, Stevens maturò la classificazione delle scale di misura riportata in Tabella 1-1 e realizzata sulla base di:

- operazioni empiriche per l'assegnazione di numeri ad oggetti o eventi;
- struttura matematica delle scale risultanti;
- operazioni statistiche realizzabili sulle misurazioni operate (8).

Scala	Operazioni empiriche	Struttura matematica	Statistiche realizzabili
Nominale	Determinazioni di uguaglianza	Gruppo di permutazione	Numerosità Moda

⁷ William Thomson, Lord Kelvin (Belfast, 26 giugno 1824 – Netherhall, 17 dicembre 1907), è stato un fisico e ingegnere irlandese che all'università di Glasgow compì importanti lavori nell'analisi matematica dell'elettricità e della termodinamica e diede un ampio contributo per unificare l'emergente disciplina della fisica nella sua forma moderna. È conosciuto per aver sviluppato la scala Kelvin, che misura la temperatura assoluta.

Ordinale	Determinazioni di relazioni d'ordine	Gruppo isotonico	Mediana Percentili
Intervallare	Determinazioni di uguaglianza di differenze	Gruppo generalmente lineare	Media Deviazione standard Correlazione Regressione Analisi della varianza
Rapporto	Determinazioni di uguaglianza di rapporti	Gruppo di similarità	Coefficiente di variazione

Tabella 1-1 Scale di misura di Stevens

La scala nominale rappresenta la forma più semplice di misurazione; essa consiste nell'assegnazione di valori numerici come etichette per categorie secondo la regola di non assegnare numeri diversi alla stessa categoria o lo stesso numero a categorie diverse. Qualsiasi operazione di definizione dell'appartenenza ad una categoria dà origine a una scala nominale; le categorie devono essere almeno due, distinte e mutualmente esclusive; le variabili categoriali vengono assegnate alle categorie senza l'aggiunta di informazione quantitative o criteri di ordine. La struttura matematica della scala nominale è un gruppo di permutazione, tale operazione infatti, realizzata dopo l'assegnazione, non altera la scala. Le operazioni statistiche realizzabili su tale tipologia di scala riguardano il calcolo del numero di casi, della moda e la correlazione di contingenza ossia la distribuzione di casi tra categorie. L'assegnazione di un numero per ogni squadra e l'identificazione di appartenenza dei giocatori ad una squadra assegnando loro il numero della stessa rappresentano altri due esempi di scala nominale.

La scala ordinale consiste nell'operazione di assegnazione del rango ovvero di un ordine di classificazione o livello ad entità differenti. L'operazione di *rank ordering* viene effettuata senza quantificare il grado di differenziazione tra livelli. La struttura matematica della scala ordinale è definita isotonica poiché fondata su una funzione monotona crescente la cui modifica non altera l'ordine di classificazione. Il calcolo della mediana e dei percentili rappresentano le operazioni

statistiche realizzabili sulle scale ordinali in aggiunta alle operazioni precedentemente citate con riferimento alla scala nominale. Secondo Stevens le scale ordinali sono le più utilizzate dagli psicologi ma l'esempio più comune di scala ordinale è il risultato di una competizione sportiva con informazioni relative esclusivamente alla classifica finale e non ai dati che la determinano.

La scala intervallare nasce dall'attribuzione di valori numerici o livelli ad eventi differenti così da definire un intervallo numerico, un'unità di misura e l'attribuzione arbitraria del punto "zero". In una scala intervallare il punto "zero" non rappresenta quindi l'assenza del fenomeno bensì una particolare condizione del fenomeno medesimo; il rapporto tra due livelli non ha senso mentre assumono significato le differenze tra i livelli ed i rapporti di differenze. La struttura matematica della scala intervallare è definita come gruppo generalmente lineare dove possono essere realizzate operazioni di *rescaling* lineare ovvero di cambio di scala. Media, deviazione standard, correlazione, regressione, analisi della varianza sono le operazioni statistiche realizzabili su scale intervallari. Le scale di temperatura Celsius e Fahrenheit sono due esempi di scale intervallari soggette a *rescaling* lineare e definite attribuendo valori numerici ai due particolari fenomeni (punto di congelamento e di ebollizione dell'acqua al livello del mare ed alla pressione di 1 atmosfera).

La scala di rapporto si determina quando la misurazione consiste nel rapporto tra quantità generiche ed unitarie dello stesso fenomeno; l'attribuzione del punto "zero" in questo tipo di scala non è arbitraria e rappresenta l'assenza del fenomeno. La scala di rapporto attribuisce quindi significato al rapporto tra due livelli della stessa scala. La struttura matematica della scala intervallare è lo spazio di similarità che prevede la possibilità di realizzare cambi di unità di misura. Le misurazioni operate in scala di rapporto possono dare luogo a tutte le operazioni note in statistica. La massa misurata in kilogrammi e la massa volumica misurata in kilogrammi per metro cubo rappresentano due esempi di scale di rapporto per grandezze rispettivamente definite fondamentali e derivate.

Ai fini della presente trattazione è possibile esemplificare la sopra citata classificazione relativa alle scale di misura evidenziando tre macro categorie:

- *qualitative*; quando il gap tra livelli della stessa scala, non essendo quantificabile, non assume significato ai fini delle determinazioni di preferenza: rientrano tra le qualitative le scale nominali ed ordinali;
- *quantitative*; quando i rapporti tra i livelli, quantificabili mediante specifiche unità di misura, risultano rilevanti per la determinazione delle preferenze; rientrano tra le quantitative le scale di rapporto;
- *altre scale*; pur essendo utilizzate in MCDA, a rigor di classificazione non possono appartenere ad una delle due macro categorie sopra definite; tra queste si evidenziano le scale intervallari.

In MCDA la significatività del risultato è legata alla tipologia di scala che si utilizza. Quando la natura del problema decisionale lo consente è opportuno utilizzare scale quantitative precisando tuttavia che il mero utilizzo di indicatori di performance numerici non sempre identifica siffatta tipologia di scala.

L'attribuzione di etichette numeriche ai livelli di una scala può infatti dare origine a scale qualitative, nominali o più comunemente ordinali, nelle quali le differenze tra livelli non riflettono variazioni quantificabili del fenomeno misurato; si presentano generalmente nella forma: $x_1 = 1 = non\ buono$, $x_2 = 2 = buono$, $x_3 = 3 = molto\ buono$.

Presupposti per la definizione di una scala quantitativa risultano essere: la significatività ai fini decisionali della totale assenza di quantità, il ruolo giocato dal punto "zero" all'interno della scala, il fatto che uguali differenze tra livelli riflettono, in qualsiasi zona della scala, uguali variazioni del fenomeno misurato. La *significativa assenza di massa può essere evidenziata in scala quantitativa con l'indicazione 0 kg* ed una variazione quantificabile di massa da $x_1 = 5\ kg$ a $x_2 = 8\ kg$ produce gli stessi effetti di una variazione tra $x_3 = 15\ kg$ a $x_4 = 18\ kg$.

Altre tipologie di scale, in special modo le intervallari, evidenziano l'arbitrarietà del punto "zero", in particolare evidenza nel confronto tra scale di temperatura Kelvin, Celsius e Fahrenheit, nonché la particolare relazione tra differenze di livelli e percezione del fenomeno. Quando un termometro in scala intervallare Celsius segna in un caso una temperatura $x_1 = 10^\circ\text{C}$ ed in un secondo caso una temperatura $x_2 = 20^\circ\text{C}$ non è corretto affermare che in questa seconda condizione si percepisce il doppio del caldo della prima; inoltre un incremento di temperatura da $x_1 = 5^\circ\text{C}$ a $x_2 = 8^\circ\text{C}$ non è percepito allo stesso modo di un aumento da $x_3 = 15^\circ\text{C}$ a $x_4 = 18^\circ\text{C}$ pur essendo uguale la differenza in termini analitici.

1.3 Modellazione delle preferenze

La modellazione delle preferenze è l'insieme di attività finalizzate alla costruzione di modelli in grado di rappresentare relazioni d'ordine o di vicinanza tra entità distinte. In DA la modellazione delle preferenze è finalizzata al confronto di potenziali azioni o alternative sulla base di differenti punti di vista o criteri (9).

Sia A^1 un insieme di alternative etichettate con $a, b, c \dots$; sia J un set di criteri etichettati con $1, 2, \dots, m$; sia $g_j(a)$ la *performance* dell'alternativa $a \in A^1$ con riferimento al criterio $j \in J$; allora la modellazione delle preferenze può determinare due condizioni d'analisi:

1. l'alternativa a è "prima" dell'alternativa b dove "prima" implica una relazione d'ordine tra a e b facente riferimento ad una preferenza diretta o indotta da misurazioni su apposita scala;
2. l'alternativa a è "vicina" all'alternativa b dove "vicina" implica una relazione di indifferenza tra a e b facente riferimento ad una indifferenza diretta o indotta da misurazioni su apposita scala.

La prima condizione d'analisi si ravvisa solitamente in problemi di *choosing* ($P.\alpha$) e *ranking* ($P.\gamma$); la seconda in problemi di *sorting* ($P.\beta$); tuttavia la distinzione tra relazioni d'ordine e di vicinanza non è sempre immediata. La

costruzione di un modello di preferenza rappresentativo della realtà comporta una dose fisiologica di incertezza che può essere di origine esogena (attività umane connesse alla modellazione) o endogena (adeguatezza del modello).

La modellazione delle preferenze può essere vista sia come il risultato del confronto diretto tra potenziali azioni o alternative al fine di dedurre una rappresentazione numerica del confronto sia come il risultato di misurazioni su apposite scale al fine di indurre una relazione di preferenza tra potenziali azioni o alternative (10). Nel primo caso l'incertezza può derivare dal fatto che il decisore potrebbe non essere in grado di affermare con chiarezza una relazione di preferenza per ogni coppia di potenziali azioni o alternative. Il problema in questo caso è l'interpretazione dell'incertezza del decisore nella definizione del modello di preferenza. Nel secondo caso si possono verificare diverse situazioni quali: informazioni incomplete, informazioni incerte, informazioni ambigue. Il problema in tal caso consiste nella definizione del modello di preferenza sulla base di tali informazioni, della misura in cui l'incertezza associata con le informazioni originali verrà propagata al modello e dei metodi di gestione di tale incertezza; questi ultimi possono essere di varie tipologie:

- *manipolazione di informazioni e dichiarazioni incerte*; i concetti utilizzati nella modellazione delle preferenze sono ben noti; è in teoria possibile stabilire una relazione di preferenza senza alcuna incertezza ma le informazioni a disposizione non lo consentono; un esempio tipico è il seguente: è noto che x è preferibile a y se il prezzo di x è inferiore al prezzo di y ; tuttavia poco si conosce circa i prezzi di x ed y ; in questi casi l'incertezza numerica può essere gestita tramite l'utilizzo di opportune distribuzioni di probabilità;
- *manipolazione di concetti e variabili linguistiche ambigue*; con tale prospettiva, indipendentemente dalle informazioni disponibili, si ritengono mal definite dichiarazioni di preferenza che presentano difetti di modellazione; un esempio tipico è rappresentato dalla dichiarazione: "più è grande la differenza di prezzo tra x ed y , maggiore è la preferenza

di x su y ”; potrebbero essere perfettamente noti i prezzi di x ed y ma il concetto di preferenza è basato su una valutazione continua; in questi casi si è possibile utilizzare la logica multivalore in grado di definire una “intensità di verità” per ogni dichiarazione di preferenza. Le “intensità di verità” si distinguono nettamente dalle “intensità di preferenza”; queste ultime basate sul concetto di “misurazione” delle preferenze e prive della dimensione “verità”.

1.3.1 Notazioni e definizioni di base

La nozione di relazione binaria appare per la prima volta negli studi di Augustus De Morgan⁸ e nelle opere di Charles Sanders Peirce⁹ è definita come un insieme di coppie ordinate.

Sia A un insieme finito di elementi (a, b, c, \dots, n) ; una *relazione binaria* R sull'insieme A è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times A$ e cioè un insieme di coppie ordinate (a, b) tale che a e b sono in A | $R \subseteq A \times A$. Per indicare l'appartenenza della coppia ordinata (a, b) alla relazione binaria R si possono usare indifferentemente le seguenti notazioni: $(a, b) \in R$, aRb , $R(a, b)$.

Siano R e T due relazioni binarie sullo stesso insieme A ; allora sono valide le seguenti operazioni:

inclusione: $R \subseteq T \Leftrightarrow aRb \rightarrow aTb$;

unione: $a(R \cup T)b \Leftrightarrow aRb \text{ e } aTb$;

intersezione: $a(R \cap T)b \Leftrightarrow aRb \text{ e } aTb$;

⁸ Augustus De Morgan (Madurai, 27 giugno 1806 – Londra, 18 marzo 1871) è stato un matematico e logico britannico. A lui si devono i teoremi di De Morgan che sono alla base dei sistemi logici elettronici ed informatici. Per primo introdusse il termine induzione matematica e ne rese rigoroso il concetto.

⁹ Charles Sanders Peirce (Cambridge, 10 settembre 1839 – Milford, 19 aprile 1914) è stato un matematico, filosofo e semiologo statunitense. Conosciuto per i suoi contributi, oltre che alla logica, alla epistemologia, Peirce è stato un importante studioso, considerato fondatore del pragmatismo e padre della moderna semiotica.

prodotto relativo: $a(R.T)b \Leftrightarrow \exists c \in A: aRc \text{ e } cTb$ ($aR^2b \Leftrightarrow aR.Rb$).

È possibile denotare con $(R^a), (R^s), (\widehat{R})$ rispettivamente la simmetria, l'asimmetria e la parte complementare della relazione binaria R :

$aR^a b \Leftrightarrow aRb$ ma non vale bRa ;

$aR^s b \Leftrightarrow aRb \text{ e } bRa$;

$a\widehat{R}b \Leftrightarrow$ non vale aRb e non vale bRa .

$(R^c), (\bar{R}), (R^{cd})$ indicano rispettivamente complemento, dualità e co-dualità della relazione binaria R :

$aR^c b \Leftrightarrow$ non vale aRb ;

$a\bar{R}b \Leftrightarrow bRa$;

$aR^{cd} b \Leftrightarrow$ non vale bRa .

Una relazione binaria R è detta:

riflessiva se: $aRa, \forall a \in A$;

non riflessiva se: $aR^c a, \forall a \in A$;

simmetrica se: $Rb \rightarrow bRa, \forall a, b \in A$;

antisimmetrica se: $(aRb, bRa) \rightarrow a = b, \forall a, b \in A$;

asimmetrica se: $(aRb \rightarrow bR^c a), \forall a, b \in A$;

completa se: $(aRb \text{ o } bRa), \forall a \neq b \in A$;

fortemente completa se: $(aRb \text{ o } bRa), \forall a, b \in A$;

transitiva se: $(aRb \text{ o } bRc) \rightarrow aRc \forall a, b, c \in A$;

negativamente transitiva se: $(aR^c b \text{ o } bR^c c) \rightarrow aR^c c \forall a, b, c \in A$;

semitransitiva se: $(aRb, bRc) \rightarrow (aRd, dRc) \forall a, b, c, d \in A$;

in relazione di Ferrers se: $(aRb, cRd) \rightarrow (aRd, cRb) \forall a, b, c, d \in A$.

La relazione di equivalenza E associata con la relazione binaria R è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva definita come segue:

$$aEb \Leftrightarrow \forall a \in A \begin{cases} aRc \Leftrightarrow bRc \\ cRa \Leftrightarrow cRb. \end{cases}$$

Una relazione binaria R può essere rappresentata mediante un grafo orientato (A, R) nel quale i nodi rappresentano gli elementi di A e gli archi la relazione R . (Vedi Figura 1-2).

Altro modo per rappresentare la relazione binaria R è l'utilizzo della matrice M^R dove il generico elemento $M^R_{a,b}$ è pari a 1 se aRb o 0 se *non vale* aRb . (Vedi Tabella 1-1)

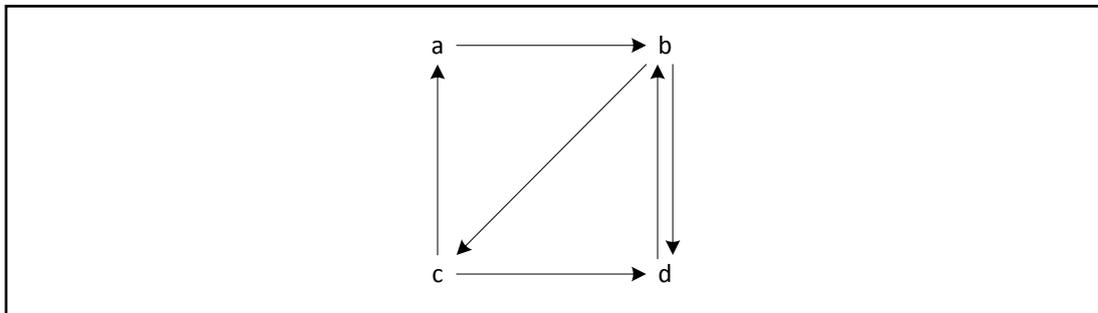


Figura 1-2 Rappresentazione grafica relazione binaria R

	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	0	1	1
c	1	0	0	1
d	0	1	0	0

Tabella 1-2 Rappresentazione matriciale relazione binaria R

Il grafo in Figura 1-2 e la matrice in Tabella 1-2 evidenziano su di un insieme $A = \{a, b, c, d\}$ una relazione binaria $R = \{(a, b), (b, d), (b, c), (c, a), (c, d), (d, b)\}$.

1.3.2 Semantica delle preferenze

I modelli di preferenza sono rappresentazioni formali del confronto tra potenziali azioni o alternative e come tali devono fare uso di un linguaggio formale che tuttavia nella sua logica classica potrebbe apparire troppo rigido ai fini della modellazione di situazioni diffuse nel mondo reale (11). A tal fine si riportano a

seguire alcuni ulteriori formalismi che estendono la semantica della logica classica, pur mantenendo le proprietà di calcolo rilevanti.

1.3.2.1 Logica classica

In logica classica una relazione binaria di preferenza può essere formalmente descritta come segue:

$$\mu(aRb) = 1 \text{ se: } aRb \text{ è vera;}$$

$$\mu(aRb) = 0 \text{ se: } aRb \text{ è falsa;}$$

Tutte le notazioni introdotte in precedenza si basano sul concetto di cui sopra; inoltre, con la definizione “una relazione di preferenza P sull’insieme A è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times A$ ” si introduce una struttura formale nella quale l’universo del discorso è $A \times A$ e P rappresenta il modello della dichiarazione “ x in relazione P con y ”, cioè P è l’insieme di tutti gli elementi di $A \times A$, ovverosia l’insieme di coppie ordinate (x, y) per le quali la dichiarazione è vera. La semantica descritta può tuttavia essere in netto contrasto con l’esperienza di DA; pertanto si introducono a seguire due tipologie ulteriori di semantica: *fuzzy set* e *four-valued logic*.

1.3.2.2 Logica fuzzy

La teoria degli insiemi fuzzy è stata introdotta per la prima volta da Lotfi Asker Zadeh¹⁰ nel 1965. Le misure fuzzy possono essere utilizzate per scopi diversi: rappresentare un concetto noto in modo ben definito ma impreciso o rappresentare un concetto vagamente definito come nel caso di una variabile linguistica. Nel primo caso si tratterà di valori oggetto dell’applicazione di distribuzioni di probabilità alla logica classica, nel secondo si tratterà di valori continui nell’intervallo $[0,1]$ oggetto dell’applicazione di una logica multi-valued (12).

¹⁰ Lotfi Asker Zadeh (Baku, 4 febbraio 1921) è un matematico azero noto per i suoi lavori che segnano la nascita della teoria degli insiemi fuzzy nel 1965 e la teoria della logica fuzzy nel 1973.

Un insieme fuzzy può essere associato ad un insieme di potenziali azioni o alternative in un modello di DA nel quale potenziali azioni o alternative sono rappresentate da numeri fuzzy; oppure può essere associato a relazioni di preferenza. L'applicazione della degli insiemi fuzzy al DA può dare luogo a quattro differenti condizioni:

1. potenziali azioni o alternative associate a valori crisp e relazioni di preferenza associate a valori crisp;
2. potenziali azioni o alternative associate a valori crisp e relazioni di preferenza associate a valori fuzzy;
3. potenziali azioni o alternative associate a valori fuzzy e relazioni di preferenza associate a valori crisp;
4. potenziali azioni o alternative associate a valori fuzzy e relazioni di preferenza associate a valori fuzzy.

Un *insieme fuzzy* o *fuzzy set* F su un insieme Ω è definito come il risultato dell'applicazione $\mu_F: \Omega \rightarrow [0,1]$ dove $\forall x \in \Omega$, $\mu(x)$ rappresenta il grado di appartenenza di x a F .

Una funzione $n: [0,1] \rightarrow [0,1]$ si definisce *negazione* se e solo se essa è non crescente ed inoltre $n(0) = 1$ e $n(1) = 0$. Se la negazione è strettamente decrescente e continua allora si definisce *stretta*.

Di seguito si riportano le due classi fondamentali di operatori su insiemi fuzzy: gli operatori d'intersezione definiti norme triangolari o t-norme e gli operatori d'unione definiti conorme triangolari, t-conorme o s-norme.

Una funzione $T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ si definisce *norma triangolare* o *t-norma* se e solo se soddisfa le seguenti quattro condizioni:

condizione d'equivalenza: $T(1, x) = x, \forall x \in [0,1]$;

T è commutativa: $T(x, y) = T(y, x), \forall x, y \in [0,1]$;

T è non decrescente: $T(x, y) \leq T(u, v)$, per tutti $0 \leq x \leq u \leq 1$ e $0 \leq y \leq v \leq 1$;

T è associativa: $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z), \forall x, y, z \in [0,1]$;

Una funzione $S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ si definisce *conorma triangolare*, *t-conorma* o *S-norma* se e sole se soddisfa le seguenti quattro condizioni:

condizione d'equivalenza: $S(0, x) = x, \forall x \in [0,1]$;

S è commutativa: $S(x, y) = S(y, x), \forall x, y \in [0,1]$;

S è non decrescente: $S(x, y) \leq S(u, v)$, per tutti $0 \leq x \leq u \leq 1$ e $0 \leq y \leq v \leq 1$;

S è associativa: $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z), \forall x, y, z \in [0,1]$;

T-norme e s-norme sono legate da dualità e soddisfano la Legge di De Morgan in caso di negazioni strette. Siano: T una t-norma, S una s-norma, n una negazione stretta; allora: $\langle T, S, n \rangle$ è una tripletta di De Morgan se e solo se: $n(S(x, y)) = T(n(x), n(y))$. La definizione precedente estende la legge di De Morgan al caso di insiemi fuzzy. Le più comuni t-norme e s-norme sono rappresentate in Tabella 1-1 Scale di misura di Stevens

Nome	t-norma	s-norma
Zadeh	$\min(x, y)$	$\max(x, y)$
Probabilistica	$x * y$	$x + y - xy$
Lukasiewicz	$\max(x + y - 1, 0)$	$\min(x + y, 1)$
Hamacher ($\gamma > 0$)	$\frac{xy}{\gamma + (1 - \gamma)(x + y - xy)}$	$\frac{x + y + xy - (1 - \gamma)xy}{1 - (1 - \gamma)xy}$
Yager ($\gamma \geq 0$)	$\max(1 - ((1 - x)^\gamma + (1 - y)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}, 0)$	$\min((x^\gamma + y^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}, 1)$
Weber ($\lambda > -1$)	$\max\left(\frac{x + y - 1 + \lambda xy}{1 + \lambda}, 0\right)$	$\min(x + y + \lambda xy, 1)$

Drastica	x se $y = 1$ y se $x = 1$ 0 altrimenti	x se $y = 0$ y se $x = 0$ 1 altrimenti
----------	--	--

Tabella 1-3 Principali t-norme e s-norme

La tripletta di De Morgan $\langle T, S, n \rangle$ è utilizzata al fine di estendere gli operatori e le proprietà sopra introdotte nei casi crisp; a tal fine occorre definire come segue gli operatori di implicazione I_T ed equivalenza E_T :

$$I_T(x, y) = \sup\{z \in [0,1]: T(x, z) \leq y\}$$

$$E_T(x, y) = T(I_T(x, y), I_T(y, x))$$

Dal momento che la modellazione delle preferenze si avvale di relazioni binarie, si estendono le proprietà di queste ultime alla teoria degli insiemi fuzzy indicando, per semplicità di notazione, con $R(x, y)$ una relazione binaria $\mu(R(x, y))$ $\forall a, b, c, d \in A$.

La relazione binaria $R(x, y)$ è detta:

riflessiva se: $R(a, a) = 1$;

non riflessiva se: $R(a, a) = 0$;

simmetrica se: $R(a, b) = R(b, a)$;

T-antisimmetrica se: $a \neq b \rightarrow T(R(a, b), R(b, a)) = 0$;

T-asimmetrica se: $T(R(a, b), R(b, a)) = 0$;

S-completa se: $a \neq b \rightarrow S(R(a, b), R(b, a)) = 1$;

S-fortemente completa se: $S(R(a, b), R(b, a)) = 1$;

T-transitiva se: $T(R(a, c), R(c, b)) \leq R(a, b)$;

negativamente s-transitiva se: $R(a, b) \leq S(R(a, c), R(c, b))$;

T-S semitransitiva se: $T(R(a, d), R(d, b)) \leq S(R(a, c), R(c, b))$;

T-S in relazione di Ferrers se: $T(R(a, b), R(c, b)) \leq S(R(a, d), R(c, b))$.

La relazione di equivalenza E_T è una delle relazioni più utilizzate in DA; nella teoria degli insiemi fuzzy, una funzione $E: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ si definisce *equivalenza* se e solo se soddisfa le seguenti quattro condizioni:

$$E(x, y) = E(y, x), \quad \forall x, y \in [0,1];$$

$$E(0,1) = E(1,0) = 0$$

$$E(x, x) = 1 \quad \forall x \in [0,1];$$

$$x \leq x' \leq y' \leq y \rightarrow E(x, y) \leq E(x', y').$$

1.3.2.3 Logica four - valued

La modellazione delle preferenze può essere viziata da informazioni incomplete e/o contraddittorie. A titolo di esempio, si consideri la query “Anassagora è intelligente?”. Se è nota l’identità di Anassagora si potrà rispondere “sì” (Anassagora potrebbe essere un filosofo greco) o “no” (Anassagora potrebbe essere un animale). Se l’identità di Anassagora non è nota si risponderà “non so” a causa di informazioni incomplete; se l’identità di Anassagora è essere nota (Anassagora è sia un filosofo greco che un animale) si potrà risponderà ancora “non so” a causa di informazioni contraddittorie.

La logica four-valued contribuisce alla corretta modellazione delle preferenze nel caso di informazioni incomplete e/o contraddittorie introducendo “valori di verità” differenti per gli scenari evidenziati. La logica four-valued estende la semantica della logica classica attraverso due ipotesi:

- il complemento di una formula di primo ordine non coincide necessariamente con la sua negazione;
- valori di verità sono solo parzialmente ordinati ed è possibile definire un'algebra booleana sull'insieme di valori di verità.

Tramite l'utilizzo di tale logica è possibile definire formalmente diversi stati di incompletezza/incertezza che caratterizzano la modellazione delle preferenze ed è inoltre possibile generalizzare il principio di concordanza/discordanza (13).

1.3.3 Strutture di preferenza

Una *struttura di preferenza* (6) è un insieme di relazioni binarie definite sull'insieme A tali che:

- per ogni coppia $(a, b) \in A$ almeno una relazione binaria è soddisfatta;
- per ogni coppia $(a, b) \in A$ se è soddisfatta una relazione binaria non può essere soddisfatta un'altra.

Una struttura di preferenza definisce quindi una partizione dell'insieme $A \times A$ e presenta inoltre due relazioni fondamentali:

- ogni relazione di preferenza in una struttura di preferenza è unicamente caratterizzata dalle sue proprietà (simmetria, transitività, ecc.);
- per ogni struttura di preferenza, esiste una relazione unica dalla quale le diverse relazioni che compongono la struttura di preferenza possono essere dedotte; ogni struttura di preferenza sull'insieme A può essere quindi caratterizzata da un'unica relazione binaria R ovvero sia l'insieme delle relazioni binarie sono definite attraverso le combinazioni degli stati epistemici della relazione binaria caratteristica R .

1.3.3.1 Strutture $\langle P, I \rangle$

In un modello di preferenza tradizionale il decision-maker nel confronto tra una coppia di elementi distinti di un insieme A può:

- preferire chiaramente un elemento all'altro;
- essere indifferente in termini di preferenze.

Il sottoinsieme di coppie ordinate $(a, b) \in A \times A$, tale che l'affermazione “ a è preferito a b ” è vero, si definisce relazione di preferenza ed è indicato con P . Il sottoinsieme di coppie ordinate $(a, b) \in A \times A$, tale che l'affermazione “ a è indifferente a b ” è vero, si definisce *relazione di indifferenza* ed è indicata con il simbolo I con I complemento di $P \cup P^{-1}$ su $A \times A$.

In letteratura esistono due diversi modi per definire una specifica struttura preferenza:

- tramite le proprietà delle relazioni binarie presenti nel set di relazioni;
- tramite le proprietà della relazione binaria caratteristica.

Una struttura $\langle P, I \rangle$ su di un insieme A è una coppia di relazioni su A tale che:

- P è asimmetrica;
- I è riflessiva e simmetrica.

La relazione caratterista R di una struttura $\langle P, I \rangle$ su di un insieme A può essere definita come una combinazione delle relazioni P ed I quando risulta valida la relazione:

$$aRb \text{ se } a(P \cup I)b.$$

In tal caso le relazioni P ed I possono essere definite a partire dalla relazione caratterista R come segue:

$$aPb \text{ se } aRb \text{ e } bR^c a;$$

$$aIb \text{ se } aRb \text{ e } bRa.$$

In DA è di particolare interesse la costruzione di *ordini* in quanto gli stessi consentono un facile utilizzo operativo delle strutture di preferenza. Si rappresentano a seguire gli ordini elementari deboli e completi ottenuti aggiungendo proprietà di transitività in forme diverse alle proprietà già definite per relazioni P ed I .

Sia R una relazione binaria su di un insieme A ; se R è una relazione caratterista di una struttura $\langle P, I \rangle$ le seguenti definizioni sono equivalenti:

- R è un ordine totale;
- R è riflessiva, antisimmetrica, completa e transitiva;
- $\left\{ \begin{array}{l} I = \{(a, a), \forall a \in A; \\ P \text{ è transitiva;} \\ P \cup I \text{ è riflessiva e completa.} \end{array} \right.$

- $\begin{cases} P \text{ è transitiva;} \\ PI \subset P \text{ o in modo equivalente } IP \subset P; \\ P \cup I \text{ è riflessiva e completa.} \end{cases}$

In una struttura di *ordine totale* si ha indifferenza tra due elementi se e solo se sono questi sono identici, un ordine totale è infatti costituito da una composizione di elementi ordinati dal migliore al peggiore, senza ex aequo. In letteratura si possono trovare diversi termini associati a questa struttura: ordine totale, completo, semplice o lineare.

Sia R una relazione binaria su di un insieme A ; se R è una relazione caratterista di una struttura $\langle P, I \rangle$ le seguenti definizioni sono equivalenti:

- R è un *ordine debole*;
- R è *riflessiva, fortemente completa e transitiva*;
- $\begin{cases} I \text{ è transitiva;} \\ P \text{ è transitiva;} \\ P \cup I \text{ è riflessiva e completa.} \end{cases}$

Questa struttura è chiamata ordine debole, preordine completo o preordine totale. In questa struttura l'indifferenza è considerata relazione di equivalenza. L'ordine associato alla struttura è infatti un ordine totale delle classi di equivalenza o indifferenza di A .

Le due strutture sopra esposte considerano l'indifferenza come una relazione transitiva; il rilassamento della proprietà di transitività nel caso di indifferenza risulta nelle strutture definite semi ordine e ordine d'intervallo.

Sia R una relazione binaria su di un insieme A ; se R è una relazione caratterista di una struttura $\langle P, I \rangle$ le seguenti definizioni sono equivalenti:

- R è un *semi ordine*;
- R è *riflessiva, completa, in relazione di Ferrer e semitransitiva*;
- $\begin{cases} P.I.P \subset P; \\ P^2 \cap I^2 = \emptyset; \\ P \cup I \text{ è riflessiva e completa.} \end{cases}$

- $\begin{cases} P.I.P \subset P; \\ P^2I \subset P \text{ o in modo equivalente } IP^2 \subset P; \\ P \cup I \text{ è riflessiva e completa.} \end{cases}$

Sia R una relazione binaria su di un insieme A ; se R è una relazione caratterista di una struttura $\langle P, I \rangle$ le seguenti definizioni sono equivalenti:

- R è un ordine intervallare;
- R è riflessiva, completa, in relazione di Ferrer;
- $\begin{cases} P.I.P \subset P \\ P \cup I \text{ è riflessiva e completa.} \end{cases}$

1.3.3.2 Strutture estese

Le strutture di preferenza $\langle P, I \rangle$ introdotte nella sezione precedente potrebbero non essere sufficienti per la modellazione di situazioni reali di DA; pertanto, in letteratura sono state proposte opportune estensioni di tali strutture tramite l'introduzione di:

- ulteriori relazioni di preferenza in grado di modellare una o più condizioni di esitazione tra preferenza e indifferenza;
- una o più situazioni di incomparabilità.

L'introduzione di ulteriori relazioni di preferenza assegna gradi di libertà al decision maker consentendo l'elaborazione di modelli di preferenza dettagliati basati su una o più relazioni intermedie tra indifferenza e preferenza al fine di meglio rappresentare una o più zone di ambiguità e/o incertezza. Le relazioni intermedie possono essere interpretate come "gradi di intensità delle preferenze". La fattispecie in questione evidenzia due casi legati all'introduzione di una o diverse relazioni intermedie:

- strutture di preferenza $\langle P, Q, I \rangle$; in tali strutture permangono le proprietà caratteristiche delle stesse ed è inoltre presente una relazione binaria di preferenza Q asimmetrica e irreflessiva; le strutture di preferenza $\langle P, Q, I \rangle$ si utilizzano quando è necessario definire delle soglie a seguito del

confronto tra elementi caratterizzati da valori numerici o da intervalli. In letteratura si evidenziano ordini intervallari, semiordini $\langle P, Q, I \rangle$ ed ordini doppia soglia o pseudo ordini; una delle difficoltà di tali strutture è che risulta impossibile definire P, Q ed I a partire da una relazione caratteristica R come avviene per le strutture di preferenza convenzionali (14);

- strutture di preferenza $\langle P_1, \dots, P_n \rangle$; generalizzano la situazione precedente nella quale viene considerata solo una relazione intermedia; sorgono quando è necessario definire delle soglie multiple a seguito del confronto tra elementi caratterizzati da valori numerici o intervalli; tipicamente tali strutture riguardano la rappresentazione coerente di ordini intervallari multipli (15).

Con riferimento al concetto relativo all'introduzione di una o più incomparabilità, appare chiaro che in una struttura di preferenza classica il decision maker si suppone essere in grado di confrontare le potenziali azioni o alternative determinando: $aPb, bPa, o aIb$. Tuttavia, particolari situazioni dovute a carenza di informazioni, incertezza, ambiguità, preferenze multidimensionali e conflittuali, possono determinare incomparabilità tra le alternative. In questo quadro le strutture di preferenza possono essere integrate con una terza relazione simmetrica e irriflessiva $J(aJb \leftrightarrow \text{not}(aPb), \text{not}(bPa), \text{not}(aIb), \text{not}(aQb), \text{not}(bQa))$ definita *incomparabilità*.

Per avere una struttura parziale $\langle P, I, J \rangle$ o $\langle P, Q, I, J \rangle$ occorre associare la relazione di incomparabilità $J \neq \emptyset$ alle precedenti strutture: ordine totale, ordine debole, ordine intervallare e pseudo ordine, ottenendo rispettivamente: ordine parziale, preordine parziale o quasi ordine, semi ordine parziale, ordine parziale intervallare e pseudo ordine parziale.

Sia $R = P \cup I$ una relazione binaria su di un insieme A ; se R è una relazione caratterista di una struttura $\langle P, I, J \rangle$ le seguenti definizioni sono equivalenti:

- R è un ordine parziale;

- R è riflessiva, antisimmetrica e transitiva;
- $\left\{ \begin{array}{l} P \text{ è asimmetrica e transitiva;} \\ I \text{ è riflessiva e simmetrica;} \\ J \text{ è irriflessiva e simmetrica;} \\ I = \{(a, a), \forall a \in A. \end{array} \right.$

Sia $R = P \cup I$ una relazione binaria su di un insieme A ; se R è una relazione caratterista di una struttura $\langle P, I, J \rangle$ le seguenti definizioni sono equivalenti:

- R è un *quasi ordine*;
- R è riflessiva e transitiva;
- $\left\{ \begin{array}{l} P \text{ è asimmetrica e transitiva;} \\ I \text{ è riflessiva, simmetrica e simmetrica;} \\ J \text{ è irriflessiva e simmetrica;} \\ (P.I \cup I.P) \subset P. \end{array} \right.$

Ogni ordine parziale su un insieme finito può essere ottenuto come intersezione di un numero finito di ordini totali. Il numero di relazioni di preferenza che possono essere introdotte in una struttura di preferenza, affinché questa possa essere rappresentata attraverso una relazione binaria caratteristica, dipende dalla semantica del linguaggio utilizzato per la modellazione. In altri termini: quando si utilizzano la logica classica ed una relazione caratteristica, non si possono stabilire più di tre relazioni differenti. L'introduzione di una logica four-valued permette invece di estendere il numero di relazioni definite in modo indipendente a 10, introducendo così diverse tipologie di incomparabilità ottenute tramite diversa combinazione di ragioni positive e negative. Con tale linguaggio è quindi possibile distinguere un'incomparabilità causata da ignoranza da una causata da informazioni contrastanti.

1.3.3.3 Strutture di valore

Le strutture di valore definiscono preferenze tra potenziali azioni o alternative mediante relazioni di preferenza $\mu(R(a, b))$ in grado di definire: l'intensità o la credibilità della preferenza di a su b , la percentuale di persone che preferiscono a a b

o il numero di volte che a è preferito a b . Per semplificare la notazione, la relazione di valore $\mu(R(a, b))$ sarà successivamente denotata con $R(a, b)$ (16).

Una relazione di valore R su un insieme A è una mappatura dal prodotto cartesiano $A \times A$ su un sottoinsieme limitato di \mathbb{R} solitamente corrispondente con l'intervallo $[0,1]$.

Una relazione di valore può essere interpretata come una famiglia di relazioni crisp nidificate; in tale interpretazione ogni livello α – *cut* di una relazione fuzzy corrisponderà ad una differente relazione crisp nidificata. A seguire alcune definizioni di insiemi ordinati ottenute utilizzando la teoria degli insiemi fuzzy come linguaggio in grado di trattare l'incertezza.

Una relazione binaria di valore R su un insieme A è un *ordine totale fuzzy* se e solo se R è antisimmetrica, fortemente completa e t-transitiva.

Una relazione binaria di valore R su un insieme A è un *ordine debole fuzzy* se e solo se R è fortemente completa e t-transitiva.

Una relazione binaria di valore R su un insieme A è un *semi ordine fuzzy* se e solo se R è fortemente completa, in relazione di Ferris e semitransitiva.

Una relazione binaria di valore R su un insieme A è un *ordine intervallare fuzzy* se e solo se R è fortemente completa ed in relazione di Ferris.

Una relazione binaria di valore R su un insieme A è un *ordine parziale fuzzy* se e solo se R è antisimmetrica, riflessiva e t-transitiva.

Una relazione binaria di valore R su un insieme A è un *preordine parziale fuzzy* se e solo se R è riflessiva e t-transitiva.

Le precedenti definizioni sono date in termini di relazione caratteristica R ; il passo successivo consente di definire in termini di relazione caratteristica le relazioni di preferenza di valore:

- preferenza di valore in senso stretto: $P(a, b) = T[R(a, b), nR(b, a)]$;
- indifferenza di valore: $I(a, b) = T[R(a, b), R(b, a)]$;

- incomparabilità di valore: $R(a, b) = S[P(a, b), I(a, b)]$.

Alle definizioni di cui sopra fanno seguito le tre proposizioni riportate di seguito.

Sia $\langle P, I \rangle$ un ordine debole fuzzy, allora:

- P è un *ordine parziale stretto fuzzy*;
- I è una *relazione di similarità fuzzy (riflessiva, simmetrica e transitiva)*.

Sia $\langle P, I \rangle$ un semi ordine fuzzy, allora:

- P è un *ordine parziale stretto fuzzy*;
- I è non transitiva.

Sia $\langle P, I \rangle$ un ordine intervallare fuzzy, allora:

- $\forall a \in A$;
- I è non transitiva.

Le relazioni di preferenza di valore possono essere altresì definite senza l'ausilio della relazione caratteristica:

- P è t- transitiva: $P \cap_T P^{-1} = \emptyset$;
- I è riflessiva e J è irriflessiva: $I(a, a) = 1, (a, a) = 0 \forall a \in A$;
- I e J sono simmetriche: $I = I^{-1}, J = J^{-1}$;
- $P \cap_T I = \emptyset, P \cap_T J = \emptyset, I \cap_T J = \emptyset$;
- $P \cup_T P^{-1} \cup_T I \cup_T J = A \times A$.

In MCDA si può far uso di insiemi fuzzy in modi diversi; uno di questi contribuisce a costruire una relazione di preferenza di valore a partire da valori crisp di alternative su ogni criterio (17). Una relazione fuzzy di outranking R può essere definita a partire da una funzione a valori reali θ definita in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tale che $R(a, b), \theta(g(a)g(b))$ verifica le seguenti condizioni $\forall a, b \in A$.

- $\forall y \in X, \theta(x, y)$ è una *funzione non decrescente di x* ;
- $\forall x \in X, \theta(x, y)$ è una *funzione non crescente di y* ;

- $\forall z \in X, \theta(z, z) = 1$.

La relazione fuzzy di outranking R che ne deriva è un semi ordine fuzzy; la funzione θ può essere definita per ogni criterio come:

$$\theta(x, y) = \frac{p(x) - \min\{y - x, p(x)\}}{p(x) - \min\{y - x, q(x)\}};$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ rappresentano le soglie dei criteri selezionati.

Gli insiemi fuzzy quindi consentono la valutazione di alternative caratterizzate da imprecisione ed ambiguità relativamente a criteri dati. Nella coppia ordinata $\{x, \mu_j^a\}$, μ_j^a rappresenta il grado di appartenenza x per un'alternativa a relativamente al criterio j . L'insieme fuzzy μ si suppone essere normale ($\sup_x(\mu_j^a) = 1$) e convesso $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, y \in [x, z], \mu_j^a(y) \leq \min\{\mu_j^a(x), \mu_j^a(z)\}$. La credibilità di preferenza di a su b è ottenuta dal confronto degli intervalli fuzzy di a e b date le seguenti condizioni:

- il metodo utilizzato dovrebbe essere sensibile a range e forma dei gradi di appartenenza;
- il metodo deve essere indipendente dalle alternative irrilevanti;
- il metodo dovrebbe soddisfare la proprietà di transitività.

Esistono due procedure per definire la credibilità di preferenza di a su b .

La prima procedura definisce la credibilità di preferenza di a su b per j come la possibilità che $a \geq b$:

$$\Pi_j(a \geq b) = \bigvee_{x \geq y} [\mu_j^a(x) \wedge \mu_j^b(y)] = \sup_{x \geq y} [\mu_j^a(x), \mu_j^b(y)].$$

In tal caso la credibilità è definita come un ordine intervallare fuzzy e vale la relazione:

$$\min(\Pi_j(a, b), \Pi_j(b, a)) = \sup_x [\min(\mu_j^a(x), \mu_j^b(y))].$$

In caso di intervallo fuzzy simmetrico μ^a i parametri dell'intervallo fuzzy possono essere definiti in termini di valutazione $g_j(a)$ e soglie $p(g_j(a))$ e $p(g_j(a))$.

La credibilità di preferenza e/o indifferenza di a su b per j può essere definita mediante una seconda procedura come segue:

$$P_j(a, b) = R_j^d(a, b) = 1 - \Pi_j(b \geq a) = N_j(a > b);$$

$I_j(a, b) = \min[\Pi_j(a \geq b), \Pi_j(b \geq a)]$ dove Π ed N sono distribuzioni di probabilità duali tali che: $\Pi(A) = 1 - N(A)$.

1.3.4 Domini e rappresentazioni numeriche

Dato un insieme A ed un insieme di relazioni di preferenza definite per gli elementi di A , è importante sapere se tali relazioni definiscono una precisa struttura di preferenza ammettendo una rappresentazione numerica. Se questo è il caso, allora è possibile sostituire gli elementi di A con i rispettivi valori numerici e con essi operare. Quando ad un insieme A è già associata una rappresentazione numerica, quale potrebbe essere una misura, è importante verificare la compatibilità della struttura di preferenza al fine di interpretare fedelmente le preferenze del decision maker.

1.3.4.1 Teoremi di rappresentazione

Sia $R = \langle P, I \rangle$ una relazione riflessiva su di un insieme finito A ; allora le seguenti definizioni sono equivalenti:

- R è una *struttura d'ordine totale*;
- $\exists g: A \mapsto \mathbb{R}^+$ tale che per tutti $a, b \in A$ si ha: $\begin{cases} aPb \text{ se e solo se } g(a) > g(b) \\ a \neq B \rightarrow g(a) \neq g(b); \end{cases}$
- $\exists g: A \mapsto \mathbb{R}^+$ tale che per tutti $a, b \in A$ si ha: $\begin{cases} aRb \text{ se e solo se } g(a) > g(b) \\ a \neq B \rightarrow g(a) \neq g(b). \end{cases}$

Nel caso di alternative infinite non enumerabili può essere impossibile definire la rappresentazione numerica di un ordine totale.

Sia $R = \langle P, I \rangle$ una relazione riflessiva su di un insieme finito A , allora le seguenti definizioni sono equivalenti:

- R è una *struttura d'ordine debole*;
- $\exists g: A \mapsto \mathbb{R}^+$ tale che per tutti $a, b \in A$ si ha: $\begin{cases} aPb \text{ se e solo se } g(a) > g(b) \\ aIb \text{ se e solo se } g(a) = g(b); \end{cases}$
- $\exists g: A \mapsto \mathbb{R}^+$ tale che per tutti $a, b \in A$ si ha: aRb se e solo se $g(a) \geq g(b)$.

Le rappresentazione numeriche delle strutture preferenza non sono univoche; tutte le trasformazioni monotone strettamente crescenti di una funzione g possono infatti essere interpretate come rappresentazioni numeriche equivalenti. Intransitività di relazioni di indifferenza o relazioni di esitazione intermedie sono dovute all'uso di soglie che possono essere costanti o funzione del valore degli oggetti a confronto; in questo ultimo caso i valori soglia potrebbero anche obbedire alle condizioni di coerenza.

Sia $R = \langle P, I \rangle$ una relazione binaria su di un insieme finito A ; allora le seguenti definizioni sono equivalenti:

- R è una *struttura di semi ordine*;
- $\exists g: A \mapsto \mathbb{R}^+$ ed una costante $q \geq 0$ tali che per tutti $a, b \in A$ si ha: $\begin{cases} aPb \text{ se e solo se } g(a) > g(b) + q \\ aIb \text{ se e solo se } |g(a) - g(b)| \leq q; \end{cases}$
- $\exists g: A \mapsto \mathbb{R}^+$ ed una costante $q \geq 0$ che per tutti $a, b \in A$ si ha: aRb se e solo se $g(a) \geq g(b) - q$;
- $\exists g: A \mapsto \mathbb{R}^+$ e $q: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ tali che per tutti $a, b \in A$ si ha: $\begin{cases} aRb \text{ se e solo se } g(a) \geq g(b) - q(g(b)) \\ ((g(a) > g(b)) \rightarrow (g(a) + q(g(a)) \geq g(b) + q(g(b))). \end{cases}$

La soglia rappresenta un valore per il quale una differenza inferiore a tale valore non appare significativa per la relazione di preferenza; una soglia non è necessariamente costante ma in tal caso deve soddisfare la disuguaglianza che definisce una condizione di coerenza. Anche in questo caso la rappresentazione di un semi ordine non è unica e tutte le trasformazioni monotone crescenti della funzione g appaiono come rappresentazioni ammissibili, a condizione che la funzione g obbedisca alla trasformazione stessa.

Sia $R = \langle P, I \rangle$ una relazione binaria su di un insieme finito A ; allora le seguenti definizioni sono equivalenti:

- R è una *struttura d'ordine intervallare*;
- $\exists g: A \mapsto \mathbb{R}^+$ tale che per tutti $a, b \in A$

$$A \text{ si ha: } \begin{cases} aPb \text{ se e solo se } g(a) > g(b) + q(b), g(a) \leq g(b) + q(b) \\ aIb \text{ se e solo se } g(b) \leq g(a) + q(a). \end{cases}$$

La principale differenza tra un semi ordine ed un ordine intervallare è l'esistenza di una condizione di coerenza sul valore della soglia. Si può generalizzare ulteriormente la struttura di un ordine intervallare definendo una soglia funzione delle due alternative.

Con riferimento a strutture preferenza che consentendo una relazione intermedia di preferenza Q , è necessario evidenziare che le rappresentazioni numeriche con soglie sono equivalenti a rappresentazioni numeriche di intervalli; è sufficiente notare che associare un valore $g(x)$ ed un valore strettamente positivo $q(g(x))$ ad ogni elemento $x \in A$ è equivalente ad associare due valori: $l(x) = g(x)$, estremi di un intervallo, ed $r(x) = g(x) + q(g(x))$, estremo superiore dell'intervallo per ogni x , con $r(x) > l(x)$.

Sia $R = \langle P, Q, I \rangle$ una relazione su di un insieme finito A ; allora le seguenti definizioni sono equivalenti:

- R è un *ordine intervallare* P, Q, I ;
- \exists un *ordine parziale* L tale che:

$$I = L \cup R \cup I_d \text{ con } I_d = \{(x, x), x \in A\} \text{ e } R = L^{-1}$$

$$(P \cup Q \cup L).P \subset P$$

$$P.(P \cup Q \cup R) \subset P$$

$$(P \cup Q \cup L).Q \subset P \cup Q \cup L$$

$$Q.(P \cup Q \cup R) \subset P \cup Q \cup R;$$

- $\exists l, r: A \mapsto \mathbb{R}^+$ tali che:

$$\left\{ \begin{array}{l} r(a) \geq l(a) \\ aPb \text{ se e solo se } l(a) > r(b) \\ aQb \text{ se e solo se } r(a) > r(b) \geq l(a) > l(b) \\ alb \text{ se e solo se } r(a) \geq r(b) \geq l(a) \text{ o } r(b) \geq r(a) \geq l(a) \geq l(b). \end{array} \right.$$

Sia $R = \langle P, Q, I \rangle$ una relazione su di un insieme finito A ; allora le seguenti definizioni sono equivalenti:

- R è un ordine doppia soglia;

$$\left\{ \begin{array}{l} Q.I.Q \subset Q \cup P \\ P.I.P \subset P \\ Q.I.P \subset P \\ P.Q^{-1}.P \subset P; \end{array} \right.$$

- $\exists g, p, q: A \mapsto \mathbb{R}^+$ tali che:

$$\left\{ \begin{array}{l} aPb \text{ se e solo se } g(a) > g(b) + p(b) \\ alb \text{ se e solo se } g(b) + q(b) > g(a) > g(b) + q(a) \\ aQb \text{ se e solo se } g(b) + p(b) \geq g(a) > g(b) + q(b). \end{array} \right.$$

Sia $R = \langle P, Q, I \rangle$ una relazione su di un insieme finito A ; allora le seguenti definizioni sono equivalenti:

- R è uno pseudo ordine;

$$\left\{ \begin{array}{l} R \text{ è un ordine doppia soglia} \\ \langle (P \cup Q), I \rangle \text{ è un semi ordine} \\ \langle P, (Q \cup I \cup Q^{-1}) \rangle \text{ è un semi ordine} \\ P.I.Q \subset P; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R \text{ è un ordine doppia soglia} \\ g(a) > g(b) \leftrightarrow g(a) + q(a) > g(b) + q(b), g(a) + p(a) > g(b) + p(b). \end{array} \right.$$

Uno pseudo ordine è un caso particolare di un ordine doppia soglia tale che le soglie soddisfano una condizione di coerenza; tuttavia tale coerenza non è sufficiente per ottenere due soglie costanti.

Per le strutture parziali di preferenza le rappresentazioni funzionali ammettono le stesse formule ma le equivalenze sono sostituite da implicazioni.

Se $\langle P, I, J \rangle$ presenta una struttura d'ordine parziale, allora $\exists g: A \mapsto \mathbb{R}^+$ tale che $aPb \rightarrow g(a) > g(b)$.

Se $\langle P, I, J \rangle$ presenta una struttura d'ordine debole parziale, allora $\exists g: A \mapsto \mathbb{R}^+$ tale che $aPb \rightarrow g(a) > g(b), aIb \rightarrow g(a) = g(b)$.

La rilevazione della dimensione di un ordine parziale è un problema NP completo.

La modellazione delle preferenze utilizzata in DA presenta due diversi approcci: il primo riguarda la valutazione ai fini della preferenza di alternative note, siano esse crisp o fuzzy; il secondo è relativo alla scelta di alternative utili sulla base di confronti a coppie operati da uno o più esperti. Il primo approccio utilizza l'implicazione inversa delle equivalenze sopra esposte, nel caso di un ordine totale: $g(a) > g(b) \rightarrow aPb$; il secondo approccio utilizza le implicazioni stesse, nel caso di un ordine totale: $aPb \rightarrow g(a) > g(b)$.

1.3.4.2 Rappresentazioni minime

In contesti particolari di DA le uniche informazioni disponibili sono le relazioni di preferenza ottenute dal confronto a coppie di potenziali azioni o alternative. In tale situazione è possibile definire la rappresentazione numerica di ogni alternativa utilizzando una particolare rappresentazione funzionale dell'insieme ordinato associando lo stesso con relazioni qualitative note. A seguire si riportano alcune rappresentazioni minime di insiemi ordinati, in particolare il caso in cui dato un insieme numerabile A ed una relazione di preferenza $R \subseteq A \times A$ è necessario definire una rappresentazione numerica $\hat{f} \in \mathcal{F} = \{f: A \mapsto \mathbb{R}, f \text{ omomorfismo su } R\}$, tale che per tutte le $x \in X$, \hat{f} è minima.

1.3.4.2.1 Ordine totale, ordine debole

La costruzione di una rappresentazione minima per un ordine totale o un ordine debole, quando le relazioni preferenza e di indifferenza sono transitive, avviene minimizzando il valore della differenza $g(a) - g(b) \forall a, b \in A$. A tale fine è necessario definire una unità $k = \min_{a,b \in A} (g(a) - g(b))$ e la valutazione minima $m = \min_{a \in A} (g(a))$. L'algoritmo da implementare per definire la rappresentazione minima di un ordine totale è il seguente:

- scegliere un qualsiasi valore per k ed m (es. $k = 1, m = 0$);
- determinare l'alternativa i dominata da tutte le altre alternative j in A e valutarla tramite $g(i) = m$;
- per tutte le alternative l per le quali lIi si ha: $g(l) = g(i)$;
- determinare l'alternativa i' dominata da tutte le alternative j' in $A - \{i\}$ e valutarla tramite $g(i') = m + k$;
- per tutte le alternative l' per le quali $l'Ii'$ si ha: $g(l') = g(i')$;
- stop quando tutte le alternative sono state valutate.

1.3.4.2.2 Semi ordine

Una relazione riflessiva $R = (P, I)$ su un insieme finito A è un semi-ordine se e solo se esistono una funzione reale g definita su A , una costante non negativa q e una costante positiva ε tali che $\forall a, b \in A$:

$$aPb \text{ se e solo se } g(a) > g(b) + q + \varepsilon;$$

$$aIb \text{ se e solo se } |g(a) - g(b)| \leq q.$$

La tripletta (g, q, ε) è detta ε -rappresentazione di (P, I) ed ogni rappresentazione (g, q) , come da definizione di semi ordine, presenta una ε -rappresentazione dove $\varepsilon = \min_{(a,b) \in P} (g(a) - g(b) - q)$.

Premesso quanto sopra è possibile rappresentare con $G(q, \varepsilon)$ il grafo di valore ottenuto assegnando il valore $(q + \varepsilon)$ all'arco P ed il valore $(-q)$ all'arco I .

Se $R = (P, I)$ è un semi ordine su un insieme finito A , allora esiste una $\varepsilon -$ *rappresentazione* con soglia q se e solo se:

$$\frac{q}{\varepsilon} \geq \alpha = \max_C \left\{ \frac{|C \cap P|}{|C \cap I| - |C \cap P|}, C \text{ circuito di } (A, R) \right\} \text{ dove } |C \cap P| (|C \cap I|)$$

rappresenta il numero di archi di $P (I)$ nel circuito C del grafo (A, R) .

L'algoritmo da implementare per definire la rappresentazione minima per un semi ordine è il seguente:

- scegliere un qualsiasi valore per ε (es. $\varepsilon = 1$);
- scegliere un valore sufficientemente grande per $\frac{q}{\varepsilon}$, (es. $\frac{q}{\varepsilon} = |P|$);
- risolvere il problema del cammino minimo nel grafo $G(q, \varepsilon)$;
- indicando con $g_{q,\varepsilon}$ la soluzione per il problema del cammino minimo nel grafo $G(q, \varepsilon)$ si ha che: $g_{q,\varepsilon} \leq g(a), \forall a \in A$.

Si consideri l'esempio nel quale $S = (P, I)$ è un semi-ordine su $A = \{a, b, c\}$ definito tramite $P = \{(a, c)\}$; allora si ha che:

$$g(a) \geq g(c) + q + \varepsilon$$

$$g(a) \geq g(b) - q$$

$$g(b) \geq g(a) - q$$

$$g(b) \geq g(c) - q$$

$$g(c) \geq g(b) - q.$$

La rappresentazione grafica del semi ordine $S = (P, I)$ è data in Figura 1-3. Il circuito non banale $C = \{(a, c), (c, b), (b, a)\}$ è $-q + \varepsilon$ e $+q + \varepsilon = q + \varepsilon + (-q) + (-q)$; pertanto, condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una $\varepsilon -$ *rappresentazione* è $q \geq \varepsilon$. In Tabella 1-4 è riportata una possibile rappresentazione numerica del semi ordine $S = (P, I)$.

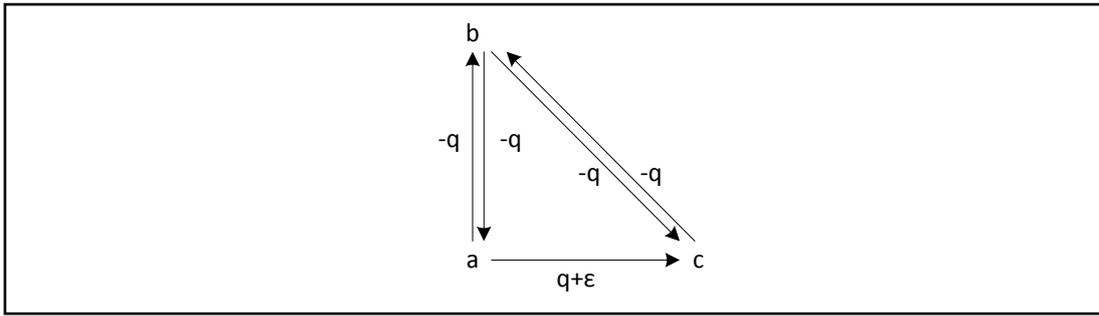


Figura 1-3 Rappresentazione grafica semi ordine $S=(P,I)$

q	g_i	a	b	c
1	$g_1 = 1$	2	1	0
1	$g_2 = 1$	9,5	8,5	7,5
2,5	$g_3 = 1$	3,5	1	0
2,5	$g_3 = 1$	10,5	8,5	7
2,5	$g_3 = 1$	3,5	2,5	0

Tabella 1-4 ε - rappresentazioni per $\varepsilon=1$

Una rappresentazione (g^*, q^*, ε) è minima nell'insieme di tutte le ε - rappresentazioni (g, q, ε) di un semi ordine se e solo se $\forall a \in A g^*(a) \leq g(a)$. La rappresentazione $(g^*_{q^*, \varepsilon}, q^*, \varepsilon)$ è minima nell'insieme di tutte le ε - rappresentazioni di un semi ordine R .

1.3.4.2.3 Ordine intervallare

Un intervallo può essere rappresentato tramite due funzioni reali l, r nell'insieme finito A tali che: $\forall a \in A l(a) \leq r(a)$.

Una relazione riflessiva $R = (P \cup I)$ nell'insieme finito A è un ordine intervallare se e solo se esiste una coppia di funzioni $l, r: A \mapsto R^+$ nonché una costante positiva ε tale che $\forall a, b \in A$ si ha:

$$\begin{cases} aPb \text{ se e solo se } l(a) > r(b) + q + \varepsilon \\ aIb \text{ se e solo se } l(a) \geq r(b) \text{ e } l(b) \geq r(a). \end{cases}$$

La tripletta (l, r, ε) è una ε - rappresentazione un ordine intervallare $P \cup I$. La ε - rappresentazione (l^*, r^*, ε) di un ordine intervallare $P \cup I$ è minima se e solo se per ogni altra ε - rappresentazione $(l, r, \varepsilon) \forall a \in A$ si ha: $l^*(a) \leq l(a)$ ed $r^*(a) \leq r(a)$.

Per ogni ordine intervallare $P \cup I$ esiste una minima ε – rappresentazione (l^*, r^*, ε) dove i valori l^* ed r^* sono integrali multipli di ε .

1.3.5 Logica delle preferenze

La modellazione delle preferenze, oltre la matematica pura, ha interessato altre discipline ed in particolare logica e filosofia. Gli studiosi di logica si sono interrogati circa l'esistenza di una logica generale mediante la quale le preferenze possono essere rappresentate, il linguaggio e gli assiomi della stessa; altri hanno filosofeggiato circa la possibilità di giungere ad una definizione assoluta di bontà o meno relativamente ad una scelta. L'obiettivo di tali studi è sempre stato relativo alla definizione di una logica strutturata da implementare nella modellazione delle preferenze.

I primi assiomi di logica delle preferenze sono da attribuire a Von Wright¹¹ il quale si dedicò allo studio degli oggetti di preferenza e dell'interpretazione delle preferenze (18). Secondo Von Wright le preferenze possono essere di natura estrinseca o intrinseca: le prime derivano dalla necessità di trovare una ragione con riferimento ad uno scopo specifico mentre le seconde sono auto-referenziali ovvero relative ad un attore che esprime le preferenze e quindi espressione del sistema di valori dello stesso attore. Von Wright afferma inoltre che le preferenze si possono esprimere per “stati di cose” ovvero l'espressione “ a è preferito a b ” deve essere intesa come la preferenza di uno stato in cui si verifica a su uno stato in cui si verifica b .

Le teorie di Von Wright si basano su cinque assiomi.

$$A^W 1. \forall x, y p(x, y) \rightarrow \neg p(y, x);$$

$$A^W 2. \forall x, y, z p(x, y) \wedge p(y, z) \rightarrow p(x, z);$$

¹¹ Georg Henrik von Wright (Helsinki, 14 giugno 1916 – Helsinki, 16 giugno 2003) è stato un filosofo finlandese ordinario di logica a Cambridge.

$$A^W3. p(a, b) \equiv p(a \wedge \neg b, \neg a \wedge b);$$

$$A^W4. p(a \vee b, c) \equiv p(a \wedge b \wedge \neg c, \neg a \wedge \neg b \wedge c) \wedge p(a \wedge \neg b \wedge \neg c, \neg a \wedge \neg b \wedge c) \wedge p(\neg a \wedge b \wedge \neg c, \neg a \wedge \neg b \wedge c);$$

$$A^W5. p(a, b) \equiv p(a \wedge c, b \wedge c) \wedge p(a \wedge \neg c, b \wedge \neg c).$$

I primi due assiomi sono asimmetria e transitività della relazione di preferenza mentre i tre successivi affrontano il problema della combinazione di stati di cose. L'uso di elementi specifici in sostituzione di variabili e quantificatori riflette il fatto che von Wright considera gli assiomi non come logiche vere e proprie ma come “principi ragionamento”. Questa distinzione ha importanti conseguenze sul piano del calcolo. Nei primi due assiomi la preferenza è considerata come una relazione binaria, nei tre “principi” successivi la preferenza è una proposizione: i primi due assiomi si riferiscono quindi alla relazione binaria, i successivi tre no e quindi se si cerca di introdurre quantificazioni i tre principi sembrano essere deboli; inoltre l'osservazione empirica del comportamento umano fornisce contro-esempi degli assiomi dati.

Altri autori respingono gli assiomi A^W3 e A^W4 proponendo un'assiomatizzazione alternativa basata sui concetti di “Buono” e “Intrinsecamente migliore” per i quali un “Buono” stato di cose è sempre preferito alla sua negazione (19).

$$A^S1. \forall x, y p(x, y) \rightarrow \neg p(y, x);$$

$$A^S2. \forall x, y, z \neg p(x, y) \wedge \neg p(y, z) \rightarrow \neg p(x, z);$$

$$A^S3 \forall x, y, \\ \neg p(x, \neg x) \wedge \neg p(\neg x, x) \wedge \neg p(y, \neg y) \wedge \neg p(\neg y, y) \rightarrow \neg p(x, y);$$

$$A^S4. \forall x, y p(x, y) \wedge \neg p(y, \neg y) \wedge \neg p(\neg y, y) \rightarrow p(x, \neg x);$$

$$A^S5. \forall x, y p(y, \neg x) \wedge \neg p(y, \neg y) \wedge \neg p(\neg y, y) \rightarrow p(x, \neg x).$$

Il comportamento umano fornisce contro-esempi degli assiomi sopra esposti; pertanto altri autori considerano solo due assiomi fondamentali (20):

$$A^H 1. \forall x, y, z \ s(x, y) \wedge s(y, z) \rightarrow s(x, z);$$

$A^H 2. \forall x, y \ (x, y) \vee s(y, z)$ dove s è una “grande relazione di preferenza” e due relazioni di preferenza specifiche sono definite: p preferenza rigorosa ed i indifferenza.

$$D^H 1. \forall x, y \ p(x, y) \equiv s(x, y) \wedge \neg s(y, x);$$

$$D^H 2. \forall x, y \ i(x, y) \equiv s(x, y) \wedge s(y, x).$$

Von Wright ha successivamente introdotto un quadro generale per definire le preferenze “olistica” o “ceteris paribus”. In tale approccio si considera un insieme S di stati in cui gli elementi sono n elementi di A e tutte le combinazioni 2^n degli elementi di A . Dati due stati s e t si hanno $i = 2^{n-m}$ combinazioni C_i degli altri stati. Si definisce $s - stato$ ogni stato che sussiste con s . La combinazione C_i di stati è anch'essa uno stato che può essere definito $C_i - stato$.

Von Wright ha elaborato due definizioni di preferenza: forte e debole.

- Preferenza forte: s è preferita a t nelle circostanze C_i se e solo se ogni $C_i - stato$ che è anche un $s - stato$ ma non un $t - stato$ è preferito ad ogni $C_i - stato$ che è anche un $t - stato$ ma non un $s - stato$.
- Preferenza debole: s è preferita a t nelle circostanze C_i se e solo se qualche $C_i - stato$ che è anche un $s - stato$ è preferito ad un $C_i - stato$ che è anche un $t - stato$ ma non esiste un $C_i - stato$ che è un $t - stato$ preferito ad un $C_i - stato$ che è anche un $s - stato$.

s è “ceteris paribus” preferita a t se e solo se lo è in tutte le circostanze C_i . L'obiettivo teso alla definizione di una logica strutturata unica, da implementare nella modellazione delle preferenze, appare pertanto difficile da raggiungere.

1.4 Classificazione dei problemi di Multiple Criteria Decision Analysis

I problemi di MCDA, in relazione all'obiettivo del processo decisionale, possono appartenere alle seguenti quattro categorie non esaustive.

1. *Choosing problem* o $(P.\alpha)$, consentono la selezione del minor numero possibile N di potenziali azioni o alternative ritenute soddisfacenti e non ulteriormente comparabili.
2. *Sorting problem* o $(P.\beta)$, determinano l'assegnazione di potenziali azioni o alternative a categorie predefinite e non ordinate costituite anche da una sola possibile azione o alternativa.
3. *Ranking problem* o $(P.\gamma)$, si concretizzano nella classificazione di potenziali azioni o alternative in cluster predefiniti ed ordinati, costituiti anche da una sola possibile azione o alternativa ed all'interno dei quali non è possibile effettuare ulteriori comparazioni.
4. *Description problem* o $(P.\delta)$, definiscono solitamente criteri, performance e soglie di accettazione senza tuttavia operare valutazioni e confronti tra potenziali azioni o alternative (4).

In ogni problema di MCDA non si può non tenere conto di condizioni di aleatorietà derivanti da almeno tre fonti (21):

- imprecisione nella definizione di parametri quali - quantitativi del problema;
- incertezza legata alla tempistica della decisione;
- instabilità del sistema di valori che condurrà alla decisione.

Al fine di minimizzare gli effetti dei sopra esposti fattori sulla decisione appare pertanto opportuno:

- definire con precisione domini di esistenza dei parametri quali - quantitativi;
- analizzare molteplici scenari evolutivi differenti tra loro;
- definire con chiarezza le modalità di aggregazione dei criteri nel processo decisionale.

Le modalità di aggregazione dei criteri nel processo decisionale rappresentano un fattore cruciale per la significatività dei problemi di MCDA. Due potenziali azioni o alternative $a \in A$ e $b \in A$ possono infatti presentare performance contrastanti con riferimento ad uno o più degli m criteri. In MCDA i *problemi di aggregazione* definiscono le modalità mediante le quali, ai fini del processo decisionale, si tiene conto delle performance di tutte le potenziali azioni o alternative e dei contributi di tutti i criteri individuati (22).

Le procedure di risoluzione dei problemi di aggregazione prendono il nome di Multiple Criteria Aggregation Procedures (MCAP); tali procedure devono necessariamente considerare:

- i parametri inter-criterio in grado di evidenziare il ruolo di ogni criterio rispetto agli altri;
- la logica di aggregazione dei criteri connessa all'utilizzo di tecniche compensatorie o non compensatorie ed alla interdipendenza tra criteri.

Le procedure MCAP possono essere implementate secondo due approcci matematici differenti:

- synthesizing criterion;
- synthesizing preference relational system.

L'approccio *synthesizing criterion* è il più tradizionale ed utilizza regole formali, matematiche e non, per addivenire ad una classificazione ordinata di potenziali azioni o alternative su di un unico criterio in grado di sintetizzare gli m criteri rispetto ai quali risulta valutata ogni potenziale azione o alternativa.

L'approccio *synthesizing criterion* non ammette incomparabilità ed utilizza una logica solitamente compensatoria. Utilizzando l'approccio in questione, imprecisione, incertezza ed instabilità possono essere presi in considerazione solo attraverso l'utilizzo di modelli probabilistici o fuzzy. È il caso delle MAUVT o *Multi - Attribute Utility and Value Theories*.

L'approccio *synthesizing preference relational system* differisce dal precedente per la modalità di valutazione di ogni potenziale azione o alternativa operata mediante il concetto di *confronto a coppie* al fine di definire una relazione di preferenza tra potenziali azioni o alternative tenendo in considerazione le *m* performance di ogni potenziale azione o alternativa nell'ambito di ogni criterio. L'approccio *synthesizing preference relational* ammette incomparabilità, utilizza solitamente una logica non compensatoria ed i concetti di *exploitation procedure*, *soglia di discriminazione*, *soglia di veto* al fine di identificare preferenza, indifferenza o incomparabilità tra le alternative; la tipologia di approccio in esame consente la valutazione di performance qualitative e l'utilizzo della logica fuzzy per fronteggiare eventuali condizioni di imprecisione, incertezza ed instabilità. È il caso degli *outranking methods*.

Occorre infine ricordare l'esistenza di approcci non basati su una MCAP che assumono significato solo localmente poiché facenti riferimento ad un numero molto limitato di potenziali azioni o alternative sequenziate mediante procedure *trial and error*.

Gli studi in ambito MCDA hanno pertanto originato due differenti scuole di pensiero:

1. la scuola francese basata principalmente sul concetto di *outranking*;
2. la scuola americana delle MAUVT o Multi - Attribute Utility and Value Theories.

1.4.1 Outranking methods

Si basano su relazioni binarie di preferenza dette di outranking a differenza delle Multi - Attribute Utility and Value Theories, non presentano basi assiomatiche e si presentano computazionalmente onerosi al crescere del numero di alternative. Una classificazione non esaustiva dei metodi di outranking evidenzia: ELECTRE, PROMETHEE, altri metodi di outranking.

1.4.1.1 ELECTRE

Il metodo ELECTRE (ELimination And Choice Expressing The REality), rappresenta in realtà una famiglia di metodi che nel tempo hanno goduto di numerosi aggiornamenti. Le origini di ELECTRE risalgono infatti al 1965, quando un team dell'agenzia di consulenza europea SEMA sviluppò il metodo MARSAN basato sulla logica della somma ponderata per l'utilizzo di più criteri di scelta fra le alternative rappresentate da nuove attività imprenditoriali. Gli ingegneri SEMA incapparono in problemi di applicazione; essi modificarono e migliorarono il metodo ricorrendo alla teoria dei grafi originando ELECTRE, successivamente furono elaborati ELECTRE I ed ELECTRE I-S. Il metodo definisce relazioni di surclassamento tra criteri utilizzando indici e soglie di concordanza o discordanza; successivamente determina l'alternativa che rappresenta il miglior compromesso nell'ambito delle relazioni di surclassamento ordinate.

1.4.1.2 PROMETHEE

Il metodo PROMETHEE (Preference Ranking Organization Methods for Enrichment Evaluations) è stato presentato per la prima volta ad una conferenza sui metodi decisionali tenutasi nel 1982 presso l'Università di Laval in Canada. Nel 1988, con l'aggiunta del modulo GUI GAIA nel 1988, venne presentato PROMETHEE II. Il metodo permette di ottenere un ordinamento totale delle alternative a partire da informazioni tra i criteri o pesi ed informazioni all'interno di ogni criterio ovvero sia risultati di confronti a coppie operati in termini di differenze

di performance confrontate con valori soglia. La dominanza è valutata in termini di flussi netti in entrata o in uscita da ogni alternativa.

1.4.1.3 Altri metodi di outranking: QUALIFLEX, REGIME, ORESTE, ARGUS, EVAMIX, TACTIC, MELCHIOR, MAPPAC, PRAGMA, IDRA, PACMAN, Martel e Zara

Sono definiti metodi misti tutti gli approcci MCDA che a rigore non possono essere classificati tra i metodi di outranking e tra le Multi - Attribute Utility and Value Theories. Si tratta di metodi in grado di elaborare modelli di preferenza a criteri misti qualitativi e quantitativi. Tra questi i metodi QUALIFLEX, REGIME, ORESTE, ARGUS, EVAMIX, TACTIC, MELCHIOR seguono il concetto di outranking; altri, quali MAPPAC, PRAGMA, IDRA, PACMAN utilizzano l'approccio *expert systems* di apprendimento tramite esempi per la valutazione di situazioni complesse che non possono essere gestite con modelli di preferenza basati sui concetti matematici canonici. Il metodo Martel e Zara infine opera modelli di preferenza in condizioni non deterministiche mediante distribuzioni di probabilità.

Definito anche il metodo permutazionale di Legrèze, QUALIFLEX, datato 1978, è una procedura metrica basata sulla valutazione di tutte le possibili permutazioni di rango per le alternative in esame valutate, sotto ogni criterio, mediante la regola di Kemeny e Snell. Il metodo fa uso di matrici di impatto ed indicatori di concordanza per il confronto a coppie delle alternative.

REGIME è un metodo MCDA presentato nel 1990 che opera mediante confronti a coppie ed analisi di concordanza. La matrice REGIME consente il ranking delle alternative mediante il confronto a coppie multicriteriale delle realizzato utilizzando il set di valori di concordanza/discordanza/indifferenza $\{1,0,-1\}$.

Il metodo ORESTE datato 1982 opera il ranking globale delle alternative dopo aver definito ranking parziali di alternative e criteri. Il metodo evidenzia tre fasi: la prima di proiezione della matrice di posizione con indicazioni numeriche per

le relazioni di preferenza, indifferenza e non comparabilità; la seconda fase di ranking delle proiezioni; la terza fase di aggregazione delle proiezioni e ranking globale per ogni alternativa.

Il metodo ARGUS è un metodo MCDA datato 1984 tramite il quale i criteri sono valutati su scala qualitativa ordinale a cinque livelli; le alternative sono valutate su scala qualitativa ordinale o scala quantitativa intervallare o di rapporto. La matrice di preferenza ed il metodo di sintesi per l'ottenimento del ranking globale sono funzione del tipo di scala utilizzata.

Il metodo EVAMIX è stato ideato nel 1983 e rappresenta la generalizzazione di un'analisi di concordanza multicriteriale. Il confronto a coppie tra alternative determina indici di concordanza e discordanza; il ranking globale delle alternative è combinazione dei sopra citati indici aggregati per criteri quantitativi in scala cardinale e qualitativi in scala ordinale.

Il metodo TACTIC, proposto nel 1998, utilizza i concetti di vero criterio e pseudo criterio con soglia per la definizione di relazioni binarie di outranking. La condizione di concordanza definisce la sussistenza della relazione di preferenza tra alternative nel caso di veri criteri; condizione di concordanza e di non veto definiscono la sussistenza della relazione di preferenza nel caso di pseudo criteri.

MELCHIOR datato 1988 è un metodo MCDA che fa uso di pseudo criteri secondo soglie di preferenza ed indifferenza. Il metodo non definisce pesi per i criteri poiché è basato su una relazione binaria secondo la quale un criterio è valido ed importante tanto quanto qualsiasi altro; è tuttavia proposto un confronto tra criteri per verificare la sussistenza di potenziali condizioni di discordanza o di veto. Un criterio è detto favorevole alla relazione di outranking se si verifica una situazione di preferenza rigorosa rispetto ad un altro criterio definito sfavorevole alla relazione. L'analisi di concordanza rispetto alla relazione di outranking permette di evidenziare relazioni nascoste tra i criteri.

MAPPAC, presentato nel 1990, è un metodo MCDA basato sull'approccio expert systems, in grado di consentire la valutazione di situazioni complesse

mediante apprendimento per esempi operato in metodologia *Pairwise Criterion Comparison Approach* o PCCA. Il metodo fa uso di relazioni di dominanza aventi indici di credibilità fuzzy compresi nell'intervallo $[0,1]$.

Il metodo PRAGMA, acronimo di Preferences Ranking Global frequencies in Multicriteria Analysis, è un metodo sviluppato nel 1988 e basato su metodologia PCAA. Particolarmente flessibile, utilizza indici di preferenza per determinare informazioni specifiche a supporto della decisione e non si basa su relazioni binarie. Utilizza frequenze parziali e globali valutate rispetto alla differenza normalizzata e ponderata delle valutazioni nel rispetto dei criteri.

Intercriteria Decision Rule Approach o IDRA, altrimenti definito metodo di Laplace, sviluppato nell'anno 1997, rappresenta un'applicazione della metodologia PCCA che evidenzia i concetti di coerenza di giudizio e coerenza metodologica rispettivamente legati ad informazioni di importanza relativa, fornite dal decision maker, e ad informazioni teoriche di natura assiomatica. Il metodo realizza sia trade-off che confronti tra criteri al fine di ottenere indici di preferenza di base e globali.

PACMAN o Passive and Active Compensability Multicriteria Analysis è un metodo presentato nel 1998 basato sul concetto di compensazione tra coppie di criteri per la classificazione teorica in relazione ai giudizi del decisore. Il metodo opera in tre step: analisi di compensazione per modellare i criteri; valutazione del grado di preferenza attiva e passiva di un'alternativa mediante indice binario; determinazione di relazioni binarie di preferenza rigorosa, preferenza debole o indifferenza per ogni coppia di alternative.

Il metodo Martel e Zara è un metodo di outranking per la gestione di problemi di MCDA che utilizzano dati non deterministici. Il metodo opera associando una distribuzione di probabilità ad ogni alternativa nell'ambito di ogni criterio e definisce la dominanza stocastica delle alternative tramite confronti a coppie di distribuzioni stocastiche. I criteri sono assunti indipendenti ed oggetto di analisi di concordanza/discordanza. Il metodo può definire situazioni chiare e situazioni non

chiare in relazione al soddisfacimento o meno delle condizioni teoriche di dominanza stocastica.

1.4.2 Multi - Attribute Utility and Value Theories

Le MAUVT o Multi - Attribute Utility and Value Theories, rappresentano metodologie di MCDA fondate su basi assiomatiche differenti in relazione ai contesti applicativi. Consentono la classificazione ordinata di potenziali azioni o alternative su di un unico criterio in grado di sintetizzare gli m criteri rispetto ai quali ogni potenziale azione o alternativa può essere valutata facendo uso di *value function* per esprimere i livelli di certezza delle preferenze o *utility function* per esprimere i livelli di rischio connesso alle preferenze (23). Le MAUVT non sono in grado di gestire la non transitività delle relazioni di preferenza. La classificazione non esaustiva delle Multi - Attribute Utility and Value Theories evidenzia i metodi UTA e MACBETH, brevemente descritti a seguire, ed il metodo Analytic Hierarchy Process che sarà oggetto di più approfondita analisi.

1.4.2.1 UTA

Il metodo UTA o UTilities Additives, datato 1982, è basato sul concetto di sintesi additiva per l'aggregazione dei criteri e fa uso di tecniche di programmazione lineare a supporto della consistenza di giudizio. Il metodo, estremamente laborioso, utilizza la funzione di utilità marginale nell'ambito di ogni criterio ed intervalli di utilità all'interno dei quali l'utilità marginale di ogni alternativa è definita mediante interpolazione lineare.

1.4.2.2 MACBETH

MACBETH, Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique, è un metodo sviluppato nel 1990 che si configura come tecnica di valutazione su base categoriale. Il metodo opera in due fasi: la prima fase è relativa all'espressione di giudizi qualitativi in scala ordinale per quantificare mediante confronti a coppie l'*attrattività relativa* delle alternative; la seconda fase realizza il

ranking globale valutando le differenze della funzione attrattività in precedenza quantificata.

2 Analytic Hierarchy Process

Un generico problema di MCDA coinvolge potenziali azioni o alternative e criteri di valutazione o punti di vista, questi ultimi solitamente d'importanza differente e contrastanti tra loro. Metodi e scale di misura sono fondamentali per la valutazione delle performance di potenziali azioni o alternative e/o criteri di valutazione o punti di vista ovverosia per la risoluzione del problema decisionale.

Il pensiero matematico moderno, d'origine cartesiana, è improntato sulla realizzazione di misure operate esclusivamente su scale fisiche, dotate di punto zero e di un'unità di misura da applicare all'entità oggetto di misurazione; spesso si trascura la considerazione in base alla quale le misure assumono, per il lettore delle stesse, un significato intrinsecamente legato alla ragione per la quale vengono effettuate. Thomas Lorie Saaty¹² afferma che:

“Un numero non ha alcun significato se non quello assegnato ad esso da chi è chiamato ad interpretarlo”.

Si può essere quindi tutti d'accordo sul valore numerico di una lettura su scala metrica ma non su ciò che esattamente quel numero possa significare per ognuno in termini pratici. In inverno 15°C possono essere fonte di disagio ma in estate possono essere fonte di sollievo. I numeri sono destinati a servire un bisogno che è inevitabilmente soggettivo; pertanto ragioni, credenze e valori soggettivi costituiscono il fondamento per l'interpretazione di letture ottenute tramite misurazioni; appare quindi pacifico che persone diverse possono interpretare diversamente la stessa lettura. La lettura di una misurazione può quindi essere definita oggettiva ma l'interpretazione della stessa è prevalentemente soggettiva; in

¹² Thomas Lorie Saaty (Mosul, 1926) è un matematico statunitense di origine irachena, Professore Emerito presso l'Università di Pittsburgh è l'inventore della metodologia Multiple Criteria Decision Analysis definita Analytic Hierarchy Process.

tal senso la soggettività è importante, senza di essa l'oggettività non ha alcun significato intrinseco.

Scale di misura accurate e affidabili, seppur prive di punto zero e di un'unità di misura da applicare all'entità oggetto di misurazione, possono essere derivate utilizzando le facoltà mentali di comprensione e giudizio, determinanti fondamentali della ragione per la quale si opera la misurazione. Inconsciamente tale operazione è realizzata n volte nella vita quotidiana di ognuno. Appare utile ricordare che molte persone nel mondo, pur non conoscendo il concetto di numero, sono in grado di esprimere giudizi affidabili sulla base delle loro facoltà mentali di comprensione di un fenomeno. Le scale fisiche, prodotto di menti "tecnologiche", supportano la comprensione di fenomeni misurabili; è comunque elevato il numero di fenomeni non misurabili ed è altamente improbabile che si potrà mai trovare il modo di misurare ogni fenomeno su scala fisica dotata di punto zero ed unità di misura. Quando hanno a disposizione conoscenza ed esperienza relativamente al fenomeno, le menti umane rappresentano quindi eccellenti strumenti di misura che, supportate da misurazioni scientifiche, sono in grado di migliorare la comprensione del fenomeno stesso; per tale ragione i giudizi espressi dagli esperti di un fenomeno dovrebbero avere maggiore rilievo dei giudizi espressi da non esperti (24). Lo psicologo cognitivo Arthur Blumenthal afferma l'esistenza di due tipi di giudizio.

Il giudizio comparativo è l'identificazione di alcune relazioni tra due stimoli entrambi presenti nell'osservatore; il giudizio assoluto coinvolge il rapporto tra un singolo stimolo e alcune informazioni contenute nella memoria a breve termine relative ad alcuni stimoli di confronto o precedenti esperienze su scale di misura con le quali è stato valutato il singolo stimolo.

Entrambi i processi implicano confronti ed il confronto implica che tutto ciò che è noto su un'entità è da intendersi in termini relativi ad altre entità. Non appare possibile conoscere verità assolute su un'entità indipendentemente da altre entità influenzanti o influenzate (25).

In matematica esistono due topologie fondamentali: la topologia metrica e la topologia d'ordine. La topologia metrica consente la quantificazione di un attributo mediante scale di rapporto dotate di un punto zero e di un'unità di misura in origine scelta arbitrariamente ma applicata in modo uniforme in tutte le misure operate sulla stessa scala. Il risultato di tale operazione prende il nome di misura. La topologia d'ordine è inerente la misurazione della dominanza di un elemento sugli altri con riferimento ad un criterio comune. Il risultato di tale operazione è noto con il nome di priorità.

In tutte le scienze fisiche quindi si realizzano misure oggettive che utilizzano scale di rapporto in topologia metrica; le misure realizzate sono successivamente soggette ad interpretazione. In un processo decisionale, tuttavia, non sempre esistono leggi fisiche e strutture matematiche universali in grado di replicare il fenomeno di misura oggettivo caratteristico delle scale di rapporto; la comprensione del fenomeno da parte di esperti è pertanto necessaria per strutturare un problema decisionale e successivamente esprimere giudizi. In un processo decisionale, quindi, le scale di priorità sono derivate oggettivamente dopo l'espressione di giudizi soggettivi: l'esatto contrario di ciò che avviene nelle scienze fisiche.

La tendenza della comunità scientifica relativamente al DA è stata e continua ed essere orientata all'utilizzo della topologia metrica anziché della topologia d'ordine. Le proprietà metriche di un'entità, direttamente o indirettamente misurabili, sono utilizzate ai fini decisionali e numerose teorie decisionali sono state sviluppate in topologia metrica. Ma in DA le misure necessitano di comprensione e giudizi umani per effettuare valutazioni d'importanza delle stesse e quindi sviluppare un ordine. Le misure di priorità devono pertanto far uso di topologie d'ordine e di scale assolute, invarianti per trasformazioni, nelle quali un numero assoluto non può essere sostituito con un altro nell'identificazione significativa ed univoca di una quantità multipla di un'altra.

Per lungo tempo e fino all'invenzione delle scale di misura, l'uomo ha dovuto confrontare, tra di esse o con uno standard, potenziali azioni o alternative al fine di determinarne un ordine relativo. L'esistenza delle scale di misura non ha fatto venir

meno la capacità di confronto e di giudizio della mente umana, specie nei casi in cui non è possibile operare la misurazione per via dell'assenza di idonei strumenti e/o scale di misura o per incoerenza tra scala di misura e sistema di valori.

Un ripetuto confronto a coppie di potenziali azioni o alternative può quindi consentire l'ordinamento delle stesse senza l'assegnazione di valori numerici. Tuttavia, in problemi di MCDA, non è facile ottenere un ordine totale combinando gli ordini ottenuti con riferimento ai diversi criteri, a meno che non venga associato ad ogni ordine parziale relativo al singolo criterio un numero significativo del peso, della priorità o dell'importanza da attribuire al criterio.

Per molto tempo l'uomo ha sostenuto con forza l'impossibilità di quantificare l'intensità delle sensazioni. MacKay scrisse: "Perseguire l'approccio cardinale delle sensazioni equivale ad inseguire ciò che non può essere catturato". Davis e Hersh affermarono: "Esistono cose come emozioni, credenze, atteggiamenti, sogni, intenzioni, gelosie, invidie, desideri, rimpianti, nostalgie, rabbie, compassioni e molti altri aspetti interiori della vita umana che non possono essere matematizzati" (26). LeShan e Margenau dichiararono: "Non possiamo quantificare le osservazioni nel dominio della coscienza. Non ci sono regole di corrispondenza che permettono di quantificare i nostri sentimenti. Siamo in grado di fare affermazioni circa l'intensità relativa dei sentimenti ma non possiamo andare oltre questo. Possiamo dire di sentirci più arrabbiati rispetto al giorno prima, ma non di essere tre e mezzo volte più arrabbiati rispetto a prima" (27). Il premio Nobel Henri Bergson¹³ scrisse: "Anche gli avversari della psicofisica non vedono alcun male nel descrivere una sensazione più intensa rispetto ad un'altra, uno sforzo maggiore di un altro elaborando quindi differenze di quantità tra stati puramente interni" .

¹³ Henri-Louis Bergson (Parigi, 18 ottobre 1859 – Auteuil, 4 gennaio 1941) è stato un filosofo francese che ebbe una forte influenza nei campi della psicologia, della biologia, dell'arte, della letteratura e della teologia. Fu insignito del Premio Nobel per la letteratura nel 1927.

Henri Lebesgue,¹⁴ con riferimento alle teorie di misura scrisse: “Per ragioni connesse all’economia del processo di misura, potrebbe apparire conveniente realizzare rapporti diretti e non rapporti di misurazioni. Tuttavia, esistono unità di misura specifiche: metri per la lunghezza, kilogrammi per la massa, ecc..., ci si avvale quindi di unità di misura ausiliarie, con lo svantaggio di avere a che fare con due misure anziché una. A volte ciò accade a causa di difficoltà che impediscono il confronto diretto di lunghezze o di masse, ma c’è anche un’altra ragione. Nei problemi geometrici infatti, si ha la necessità di confrontare, ad esempio, due lunghezze e solo le due lunghezze date. Diverso è il caso in cui è necessario misurare un centinaio di lunghezze; in tal caso è auspicabile una procedura economica per misurare ogni nuova lunghezza. La singola misura di lunghezza può essere quindi operata mediante il rapporto tra la lunghezza in questione ed ogni altra lunghezza, in tal caso i confronti non sono quasi mai operati direttamente, ma con riferimento ad una scala standard”.

Il confronto a coppie, ovvero sia la misurazione dell’importanza relativa tra potenziali azioni o alternative, secondo un criterio o punto di vista di livello superiore, consente la determinazione di una scala di priorità per entità fortemente legate a valori soggettivi, non valutabili tramite topologia metrica. Entità intangibili per definizione prive di scale di misura, ma anche entità tangibili valutabili in topologia metrica su idonee scale di misura, possono essere oggetto di confronti a coppie.

L’Analytic Hierarchy Process (AHP), metodologia di Multiple Criteria Decision Analysis sviluppata da Thomas Lorie Saaty alla fine degli anni ’70, opera, mediante confronti a coppie, priorità per le alternative e per i criteri utilizzati nel giudizio delle alternative; sintetizza i giudizi su criteri ed alternative al fine di ottenere un giudizio globale rappresentativo di una “decisione razionale che realizza al meglio il gran numero di obiettivi del decisore”.

¹⁴ Henri Léon Lebesgue (Beauvais, 28 giugno 1875 – Parigi, 26 luglio 1941) è stato un matematico francese, famoso soprattutto per i suoi contributi alla moderna teoria dell’integrazione.

2.1 AHP-R per confronti relativi e ranking parallelo

Il primo passo per l'applicazione della metodologia AHP, al fine di operare confronti relativi in parallelo ed il ranking di un numero definito di alternative, è la definizione della gerarchia in almeno 3 livelli:

- livello 1: obiettivo generale della valutazione (1);
- livello 2: criteri di valutazione (r);
- livello 3: alternative oggetto di valutazione (s);

Il grafico in Figura 2-1 evidenzia la gerarchia AHP su tre livelli e le connessioni pesate tra obiettivo, criteri ed alternative.

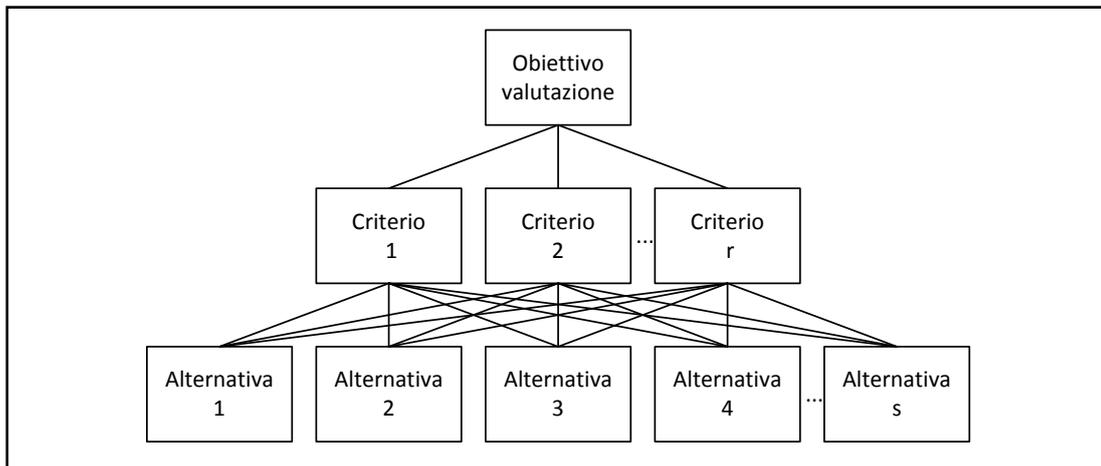


Figura 2-1 Gerarchia AHP a 3 livelli

Il passo successivo nell'applicazione del metodo AHP è la costruzione delle matrici di confronto a coppie ove tutti gli elementi appartenenti al medesimo livello gerarchico, subordinati ad un elemento di livello gerarchico superiore, sono oggetto di confronti a coppie tra loro. Si costruiranno quindi:

- 1 matrice di confronto a coppie tra r criteri;
- r matrici di confronto a coppie tra s alternative.

Si analizza di seguito in dettaglio la procedura di formazione ed elaborazione della singola matrice.

Gli elementi di ciascuna coppia vengono comparati al fine di stabilire quale di essi sia più importante in rapporto all'elemento sovraordinato ed in quale misura; il risultato del confronto è un coefficiente a_{ij} , detto *coefficiente di dominanza*, che rappresenta una stima della dominanza dell'elemento i rispetto all'elemento j . Per determinare i valori dei coefficienti a_{ij} si utilizza la *scala fondamentale di Saaty* che mette in relazione i primi nove numeri interi con altrettanti giudizi in grado di esprimere i possibili risultati del confronto.

Intensità a_{ij}	Definizione
1	Uguale importanza tra i e j .
3	Prevalenza debole di i rispetto a j .
5	Prevalenza forte di i rispetto a j .
7	Prevalenza dimostrata di i rispetto a j .
9	Prevalenza assoluta di i rispetto a j .
2, 4, 6, 8	Valori intermedi.

Tabella 2-1 Scala fondamentale di Saaty

Confrontando a coppie n elementi si ottengono n^2 coefficienti; di questi soltanto $\frac{n(n-1)}{2}$ devono essere direttamente determinati dal decisore essendo:

Equazione 2-1

$$a_{ij} = 1 \quad \forall i = j$$

Equazione 2-2

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} \quad \forall i \text{ e } \forall j$$

La condizione descritta dall'Equazione 2-2, nota come relazione di reciprocità, scaturisce dalla necessità di garantire la simmetria dei giudizi di dominanza. I coefficienti di dominanza definiscono una matrice quadrata reciproca e positiva detta *matrice dei confronti a coppie*:

Equazione 2-3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matrice $A = (a_{ij})$ è detta *consistente* se è valida la relazione:

Equazione 2-4

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$$

In tal caso il suo autovettore principale è uguale a n , in alternativa, se non si verifica la condizione dell'Equazione 2-4 la matrice è semplicemente reciproca. Costruite le matrici di confronto a coppie si passa alla determinazione dei *pesi locali* che misurano l'importanza degli elementi appartenenti al medesimo livello gerarchico, subordinati ad un elemento di livello gerarchico superiore.

Supponendo di poter determinare in modo diretto il vettore W dei pesi locali degli n elementi di cui sopra e di calcolare il coefficiente di dominanza di ogni coppia di elementi come rapporto dei rispettivi pesi:

Equazione 2-5

$$W = w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n$$

Equazione 2-6

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$$

e moltiplicando la matrice A per il vettore W , si verifica che:

Equazione 2-7

$$AW = nW$$

Infatti:

Equazione 2-8

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_1}{w_1} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \\ \frac{w_n}{w_1} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Ovverosia, per l'algebra delle matrici W risulta essere un autovettore per la matrice A con autovalore n .

Supponendo impossibile la determinazione dei pesi locali di cui all'Equazione 2-5; la stima degli stessi può essere affidata ai giudizi di uno o più esperti i quali, non disponendo di strumenti e/o scale di misura, non saranno in grado di determinare direttamente e con esattezza i pesi locali ma potranno fornire stime approssimate dei

loro rapporti facendo affidamento alla personale esperienza ed invocando l'ausilio della scala fondamentale di Saaty.

La matrice A , in genere, non sarà consistente a causa della difficoltà che incontra l'esperto nel mantenere la coerenza di giudizio in tutti i confronti a coppie; solitamente l'Equazione 2-7 non è valida ed al fine di determinare il vettore dei pesi locali si deve far ricorso a due importanti risultati della teoria delle matrici.

1. Siano $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ n autovalori per A , con $A = (a_{ij})$ matrice di dimensioni $n \times n$; se A è tale che $a_{ij} = 1 \forall i = j$, allora vale la seguente relazione:

Equazione 2-9

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = n$$

Ovverosia, tutti gli autovalori sono necessariamente uguali a 0 escluso uno che vale n ; se ne deduce che quando A è una matrice consistente n è il suo autovalore massimo o principale ed è l'unico a essere diverso da zero; infatti le colonne della matrice A sono proporzionali tra loro, la matrice presenta quindi rango 1, cioè ha un solo autovalore diverso da zero; poiché la somma degli autovalori di una matrice quadrata è la traccia della matrice ed un solo autovalore è diverso da zero, quest'ultimo deve valere n ; gli n elementi della diagonale principale sono infatti uguali a 1 e quindi la loro somma è uguale ad n . A questo autovalore, che è unico, diverso da zero e massimo tra gli autovalori, si assegna il nome di autovalore principale $\lambda_{max} = n$.

2. Se si modificano leggermente i valori a_{ij} di una matrice reciproca e positiva, i corrispondenti valori degli autovalori variano di poco e in modo continuo.

Combinando i risultati precedenti si deduce che quando gli elementi della diagonale principale della matrice A sono tutti uguali a 1 e la matrice è consistente, variando di poco i valori a_{ij} l'autovalore principale λ_{max} della matrice assumerà un

valore che non differisce molto da n , mentre i restanti autovalori si mantengono prossimi a zero. Per risolvere il problema basterà allora calcolare il vettore W che soddisfa l'equazione:

Equazione 2-10

$$AW = \lambda_{max}W$$

Ovverosia basterà determinare l'autovettore principale associato all'autovalore λ_{max} della matrice A e successivamente normalizzare W sulla somma dei suoi elementi. Occorre tuttavia stabilire se i pesi locali che si ottengono mediante la risoluzione della Equazione 2-10 rispecchiano i giudizi di chi ha effettuato i confronti; in altri termini occorre stabilire se ed in quale misura i valori dei rapporti $\frac{w_i}{w_j}$, che si calcolano dopo aver determinato l'autovettore principale W , si discostano dalle stime a_{ij} fornite dall'esperto. A tal fine il metodo AHP definisce il seguente *indice di consistenza* in grado di misurare lo scarto tra i due insiemi di valori:

Equazione 2-11

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

Il metodo prevede il calcolo del *rapporto di consistenza CR* calcolato rapportando l'indice CI con l'indice RI o random index; questo ultimo è tabellato poiché pre-calcolato effettuando la media dei valori CI di n , per $n \rightarrow \infty$, matrici reciproche dello stesso ordine, i cui coefficienti sono stati generati in modalità random; quando il rapporto di consistenza CR supera il valore soglia del 10 % l'esperto deve sforzarsi di aumentare la coerenza dei suoi giudizi modificando, totalmente o in parte, i valori di a_{ij} .

Equazione 2-12

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RI	0,00	0,00	0,52	0,89	1,11	1,25	1,35	1,40	1,45	1,49	1,52	1,54	1,56	1,58	1,59

Tabella 2-2 Random index

Lo step finale per il ranking di un numero definito (s) di alternative è la definizione dei pesi globali delle alternative applicando il principio di composizione gerarchica per determinare l'importanza degli elementi appartenenti al livello gerarchico di base con riferimento all'obiettivo principale. I pesi locali di ogni elemento vengono moltiplicati per pesi locali dei corrispondenti elementi sovraordinati ed i prodotti così ottenuti sono sommati. Procedendo dall'alto verso il basso, i pesi locali di tutti gli elementi della gerarchia vengono così trasformati progressivamente in pesi globali. I pesi globali degli elementi collocati alla base della gerarchia rappresentano il risultato principale della valutazione. La definizione dei pesi globali si effettua elaborando il prodotto tra la matrice di dimensione $s \times r$ costituita da r vettori dei pesi locali delle s alternative ed il vettore di dimensione $r \times 1$ dei pesi locali degli r criteri; si ottiene quindi il vettore di dimensione $s \times 1$ dei pesi globali delle s alternative.

I pesi globali consentono di determinare un ordine di preferenza o ranking: un'alternativa sarà tanto più preferibile quanto maggiore è il suo peso globale.

2.2 Applicazione AHP-R per confronti relativi e ranking parallelo

Al fine di sperimentare l'applicazione della metodologia AHP-R ed operare confronti relativi in parallelo ed il ranking di un numero definito di alternative, si consideri la seguente gerarchia a 3 livelli:

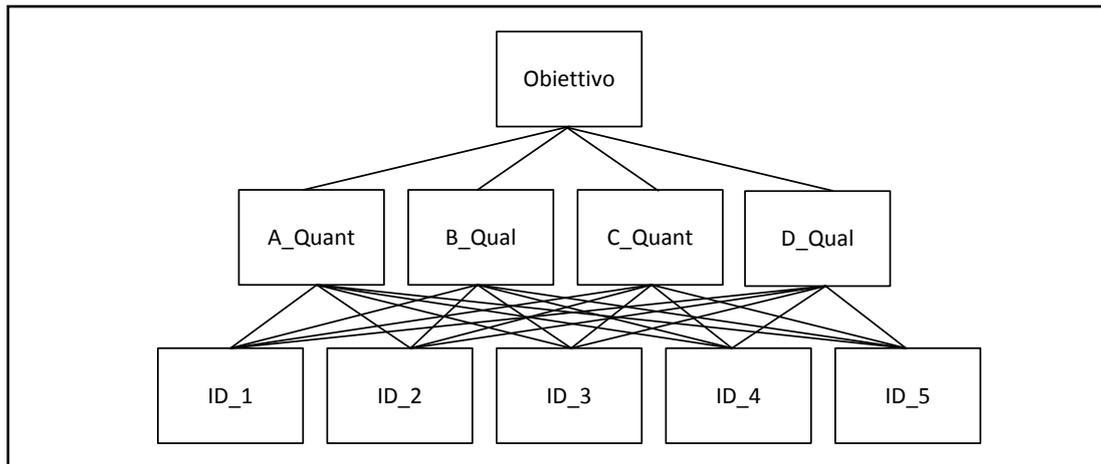


Figura 2-2 Gerarchia applicazione AHP-R

Il livello 1 della gerarchia evidenzia l'obiettivo generale della valutazione ossia la scelta della migliore alternativa con riferimento ai 4 criteri di valutazione evidenziati al livello 2; ogni criterio risulta connesso a tutte le 5 alternative oggetto di valutazione evidenziate al livello 3 della struttura.

In Tabella 2-3 sono riportate le performance delle 5 alternative con riferimento ad ognuno dei 4 criteri; in particolare:

- le performance delle 5 alternative con riferimento al criterio “A_Quant” sono espresse in scala quantitativa di rapporto $[0, 100]$;
- le performance delle 5 alternative con riferimento al criterio “B_Qual” sono espresse in scala qualitativa nominale $\{1,2,3,4,5\}$;
- le performance delle 5 alternative con riferimento al criterio “C_Quant” sono espresse in scala quantitativa di rapporto $[0, 100]$;
- le performance delle 5 alternative con riferimento al criterio “D_Qual” sono espresse in scala qualitativa nominale $\{1,2,3,4,5\}$;

I valori di performance in tabella sono stati determinati in modalità random mediante estrazione casuale del dato di performance su distribuzioni aleatorie uniformi facenti riferimento agli insiemi quali – quantitativi sopra esposti.

	A_Quant	B_Qual	C_Quant	D_Qual
ID_1	64,85	5	28,58	4
ID_2	46,64	3	5,79	3
ID_3	40,02	3	18,72	3
ID_4	87,97	5	74,11	5
ID_5	0,50	4	74,00	1

Tabella 2-3 Performance quali – quantitative delle alternative sui criteri

2.3.1 Rating distributivo e pesi locali tra criteri in AHP-R

Il passo che segue è finalizzato alla definizione del *rating distributivo* con i valori dei pesi locali degli elementi dislocati al livello 2 della gerarchia ossia i criteri.

La matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-4 definisce i coefficienti di dominanza tra criteri.

i/j	A_Quant	B_Qual	C_Quant	D_Qual
A_Quant	1	1/3	1/5	1/7
B_Qual	3	1	1/3	1/5
C_Quant	5	3	1	1/3
D_Qual	7	5	3	1

Tabella 2-4 Matrice di confronto a coppie tra i criteri

In Tabella 2-5 sono riportate le iterazioni necessarie al calcolo dell'autovettore principale associato all'autovalore λ_{max} della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-4. Il calcolo degli autovalori ed autovettori di una matrice è un problema non lineare; non viene di regola affrontato attraverso l'algoritmo classico, determinando cioè gli autovalori come zeri del polinomio caratteristico, ma mediante opportuni metodi iterativi fino a stabilizzazione dei valori determinati; nel caso specifico si utilizza il metodo delle potenze.¹⁵

	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)	x(5)	x(6)	x(7)
A_Quant	1,676	0,233	0,225	0,227	0,228	0,228	0,228

¹⁵ Il metodo delle potenze calcola, a partire da un vettore iniziale $x(1)$, una successione di vettori il cui termine k-esimo è $x(k) = A^k x(1)$, da cui il nome del metodo. Essendo A una matrice diagonalizzabile, esiste una base di autovettori e quindi il vettore iniziale $x(1)$ può essere espresso come loro combinazione lineare ovvero come combinazione lineare delle colonne di A . Per motivi numerici, è opportuno valutare $x(k)$ mediante la formula $x(k) = Ax(k-1)$, dove $x(k-1)$ è il vettore normalizzato sull'unità e relativo all'iterazione precedente.

B_Qual	4,533	0,503	0,476	0,483	0,484	0,484	0,484
C_Quant	9,333	1,162	1,064	1,077	1,080	1,080	1,079
D_Qual	16,000	2,486	2,308	2,322	2,327	2,326	2,326

Tabella 2-5 Autovettore principale per la matrice di confronto a coppie tra criteri

In Tabella 2-6 si riportano le iterazioni relative al calcolo dell'autovettore principale, normalizzato sull'unità con metodo distributivo, della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-4. Il calcolo dell'autovettore principale, normalizzato sull'unità con metodo distributivo, si realizza mediante il rapporto tra ogni componente dell'autovettore e la somma di tutte le componenti dello stesso.

	xn(1)	xn(2)	xn(3)	xn(4)	xn(5)	xn(6)	xn(7)
A_Quant	0,053	0,053	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055
B_Qual	0,144	0,115	0,117	0,118	0,118	0,118	0,118
C_Quant	0,296	0,265	0,261	0,262	0,262	0,262	0,262
D_Qual	0,507	0,567	0,567	0,565	0,565	0,565	0,565

Tabella 2-6 Autovettore principale normalizzato distributivo per la matrice di confronto a coppie tra criteri

In Tabella 2-7 si riportano le iterazioni relative al calcolo dell'autovalore λ_{max} della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-4. Il calcolo dell'autovalore λ_{max} si realizza mediante il *quoziente di Rayleigh*.¹⁶

$\lambda_{max}(1)$	$\lambda_{max}(2)$	$\lambda_{max}(3)$	$\lambda_{max}(4)$	$\lambda_{max}(5)$	$\lambda_{max}(6)$	$\lambda_{max}(7)$
31,543	4,383	4,073	4,110	4,118	4,117	4,117

Tabella 2-7 Autovalore λ_{max} per la matrice di confronto a coppie tra criteri

La Tabella 2-8 riporta, per ogni iterazione, il calcolo dell'indice di consistenza della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-4; il calcolo è stato operato mediante l'Equazione 2-11.

¹⁶ Ad ogni iterazione del metodo delle potenze l'autovalore λ_{max} può essere approssimato mediante il quoziente di Rayleigh: $\lambda_{max}(k) = \frac{x(k)^T A x(k)}{x(k)^T x(k)}$.

CI(1)	CI(2)	CI(3)	CI(4)	CI(5)	CI(6)	CI(7)
9,181	0,128	0,024	0,037	0,039	0,039	0,039

Tabella 2-8 Indice di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra criteri

La Tabella 2-9 riporta, per ogni iterazione, il calcolo del rapporto di consistenza della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-4; il calcolo è stato operato mediante l'Equazione 2-12.

CR(1)	CR(2)	CR(3)	CR(4)	CR(5)	CR(6)	CR(7)
10,316	0,144	0,027	0,041	0,044	0,044	0,044

Tabella 2-9 Rapporto di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra criteri

In Tabella 2-10 ed in Figura 2-3 è riportato il rating distributivo con i valori dei pesi locali degli elementi dislocati al livello 2 della gerarchia ossia i criteri.

Criteri	Pesi locali
A_Quant	5,53%
B_Qual	11,75%
C_Quant	26,22%
D_Qual	56,50%

Tabella 2-10 Rating distributivo dei criteri

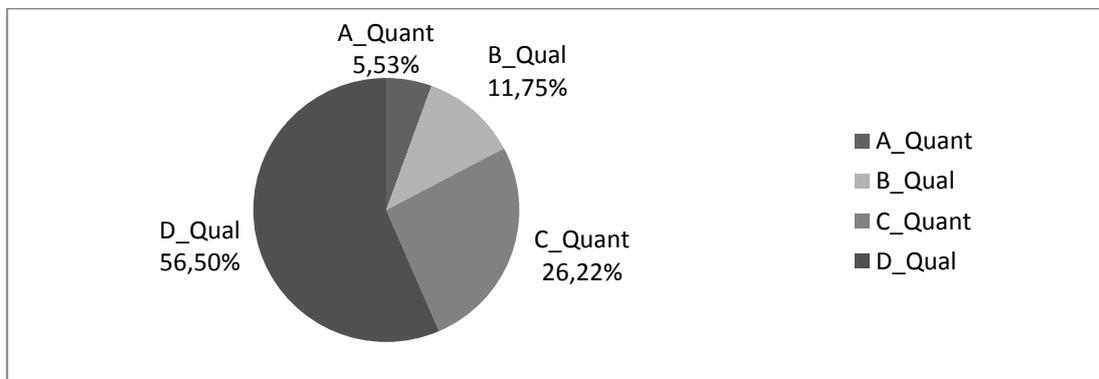


Figura 2-3 Rating distributivo dei criteri

2.3.2 Rating distributivo/ideale e pesi locali delle alternative in AHP-R

Si riporta a seguire la definizione del *rating distributivo/ideale* con i valori dei pesi locali degli elementi dislocati al livello 3 della gerarchia ossia le alternative.

La matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-11 definisce i coefficienti di dominanza tra le alternative con riferimento al criterio "A_Quant". In

Tabella 2-3 le performance delle 5 alternative con riferimento al criterio “A_Quant” sono espresse in scala quantitativa di rapporto [0,100]; tuttavia, mediante interpretazione “estensiva” del pensiero di Saaty, tali valori di performance sono confrontati a coppie tra loro per il tramite della scala fondamentale di Saaty, ovvero senza operare rapporti matematici tra i valori di performance di Tabella 2-3 ma mediante interpretazione degli stessi in scala fondamentale di Saaty.

i/j A_Quant	ID_5	ID_3	ID_2	ID_1	ID_4
ID_5	1	1/4	1/5	1/6	1/9
ID_3	4	1	1	1/2	1/4
ID_2	5	1	1	1/2	1/5
ID_1	6	2	2	1	1/2
ID_4	9	4	5	2	1

Tabella 2-11 Matrice di confronto a coppie tra alternative su “A_Quant”

In Tabella 2-12 sono riportate le iterazioni necessarie al calcolo dell'autovettore principale associato all'autovalore λ_{max} della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-4.

	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)	x(5)	x(6)	x(7)	x(8)
ID_5	1,728	0,189	0,184	0,185	0,185	0,185	0,185	0,185
ID_3	6,750	0,665	0,629	0,635	0,635	0,635	0,635	0,635
ID_2	7,700	0,679	0,640	0,648	0,648	0,648	0,648	0,648
ID_1	11,500	1,259	1,187	1,197	1,198	1,198	1,198	1,198
ID_4	21,000	2,569	2,396	2,411	2,414	2,413	2,413	2,413

Tabella 2-12 Autovettore principale per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “A_Quant”

In Tabella 2-13 si riportano le iterazioni relative al calcolo dell'autovettore principale, normalizzato sull'unità con metodo distributivo, della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-11.

	xn(1)	xn(2)	xn(3)	xn(4)	xn(5)	xn(6)	xn(7)	xn(8)
ID_5	0,035	0,035	0,037	0,037	0,036	0,036	0,036	0,036
ID_3	0,139	0,124	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
ID_2	0,158	0,127	0,127	0,128	0,128	0,128	0,128	0,128
ID_1	0,236	0,235	0,236	0,236	0,236	0,236	0,236	0,236
ID_4	0,431	0,479	0,476	0,475	0,475	0,475	0,475	0,475

Tabella 2-13 Autovettore principale normalizzato distributivo per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "A_Quant"

In Tabella 2-14 si riportano le iterazioni relative al calcolo dell'autovalore λ_{max} della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-11.

$\lambda_{max}(1)$	$\lambda_{max}(2)$	$\lambda_{max}(3)$	$\lambda_{max}(4)$	$\lambda_{max}(5)$	$\lambda_{max}(6)$	$\lambda_{max}(7)$	$\lambda_{max}(8)$
48,678	5,360	5,036	5,076	5,080	5,079	5,079	5,079

Tabella 2-14 Autovalore λ_{max} per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "A_Quant"

La Tabella 2-15 riporta, per ogni iterazione, il calcolo dell'indice di consistenza della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-11.

CI(1)	CI(2)	CI(3)	CI(4)	CI(5)	CI(6)	CI(7)	CI(8)
10,919	0,090	0,009	0,019	0,020	0,020	0,020	0,020

Tabella 2-15 Indice di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "A_Quant"

La Tabella 2-16 riporta, per ogni iterazione, il calcolo del rapporto di consistenza della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-11.

CR(1)	CR(2)	CR(3)	CR(4)	CR(5)	CR(6)	CR(7)	CR(8)
9,837	0,081	0,008	0,017	0,018	0,018	0,018	0,018

Tabella 2-16 Rapporto di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "A_Quant"

In Tabella 2-17, Figura 2-4 e Figura 2-5 sono riportati il rating distributivo con i valori dei pesi locali delle alternative con riferimento al criterio "A_Quant" ed il rating ideale delle alternative con riferimento al criterio "A_Quant", calcolato mediante rapporto tra il peso locale di ogni alternativa ed il max valore di peso locale tra tutte le alternative.

Alternative	Pesi locali	Rating ideale
ID_5	3,65%	0,077
ID_3	12,51%	0,263
ID_2	12,76%	0,269

ID_1	23,58%	0,496
ID_4	47,51%	1,000

Tabella 2-17 Rating distributivo ed ideale AHP-R delle alternative su "A_Quant"

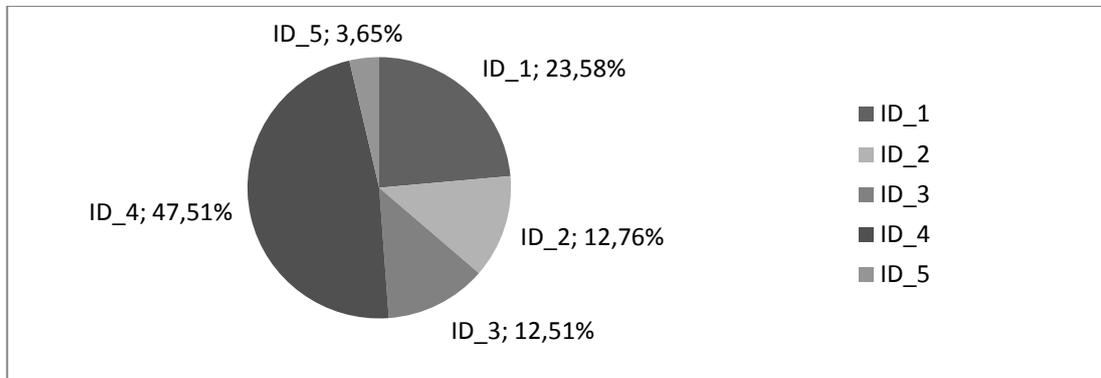


Figura 2-4 Rating distributivo AHP-R delle alternative su "A_Quant"

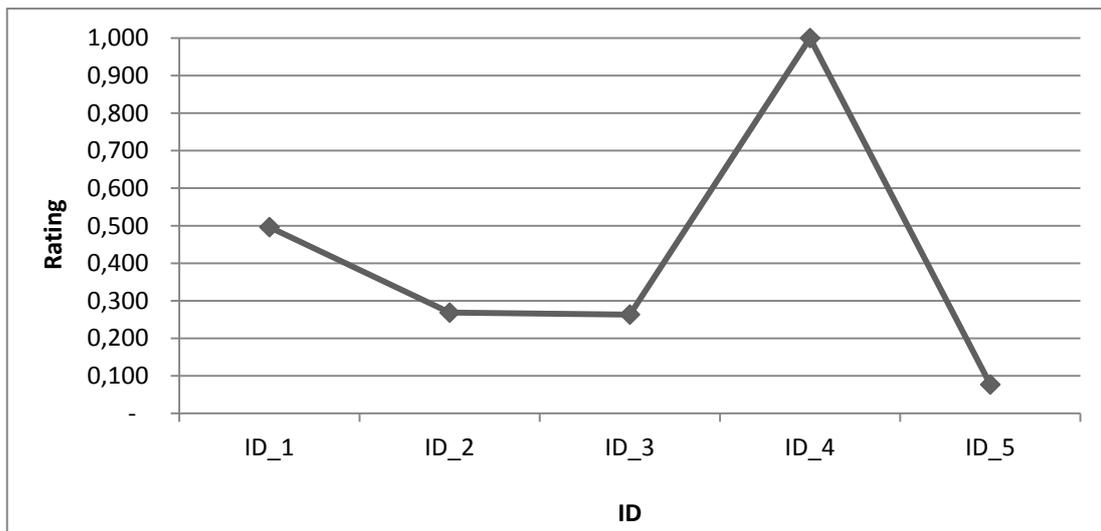


Figura 2-5 Rating ideale AHP-R delle alternative su "A_Quant"

In Tabella 2-18 e Figura 2-6 si riporta il ranking delle 5 alternative con riferimento al criterio "A_Quant" operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking	Alternative	Rating ideale
1	ID_4	1,000
2	ID_1	0,496
3	ID_2	0,269
4	ID_3	0,263
5	ID_5	0,077

Tabella 2-18 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “A_Quant”

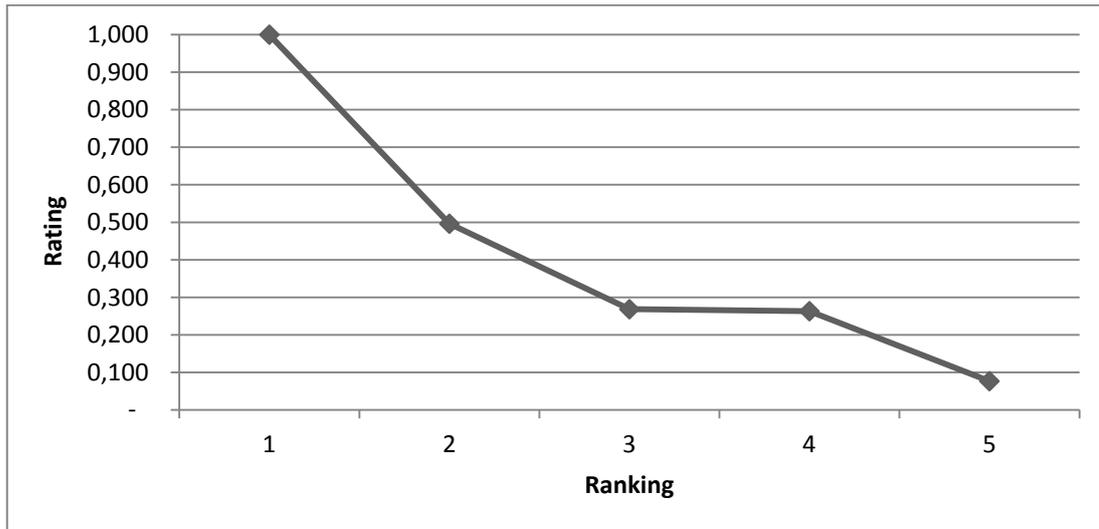


Figura 2-6 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “A_Quant”

La matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-19 definisce i coefficienti di dominanza tra le alternative con riferimento al criterio “B_Qual”. In Tabella 2-3 le performance delle 5 alternative con riferimento al criterio “B_Qual” sono espresse in scala qualitativa nominale {1,2,3,4,5}; tali valori di performance sono confrontati a coppie tra loro per il tramite della scala fondamentale di Saaty.

i/j B_Qual	ID_2	ID_3	ID_5	ID_1	ID_4
ID_2	1	1	1/3	1/5	1/5
ID_3	1	1	1/3	1/5	1/5
ID_5	3	3	1	1/3	1/3
ID_1	5	5	3	1	1/3
ID_4	5	5	3	3	1

Tabella 2-19 Matrice di confronto a coppie tra alternative su “B_Qual”

In Tabella 2-20 sono riportate le iterazioni necessarie al calcolo dell'autovettore principale associato all'autovalore λ_{max} della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-19.

	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)	x(5)	x(6)	x(7)	x(8)
ID_2	2,733	0,321	0,313	0,316	0,317	0,317	0,317	0,317
ID_3	2,733	0,321	0,313	0,316	0,317	0,317	0,317	0,317
ID_5	7,667	0,776	0,740	0,753	0,755	0,754	0,754	0,754
ID_1	14,333	1,582	1,450	1,472	1,477	1,476	1,476	1,476
ID_4	17,000	2,481	2,329	2,338	2,344	2,343	2,343	2,343

Tabella 2-20 Autovettore principale per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "B_Qual"

In Tabella 2-21 si riportano le iterazioni relative al calcolo dell'autovettore principale, normalizzato sull'unità con metodo distributivo, della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-19.

	xn(1)	xn(2)	xn(3)	xn(4)	xn(5)	xn(6)	xn(7)	xn(8)
ID_2	0,061	0,059	0,061	0,061	0,061	0,061	0,061	0,061
ID_3	0,061	0,059	0,061	0,061	0,061	0,061	0,061	0,061
ID_5	0,172	0,142	0,144	0,145	0,145	0,145	0,145	0,145
ID_1	0,322	0,289	0,282	0,283	0,284	0,284	0,284	0,284
ID_4	0,382	0,453	0,453	0,450	0,450	0,450	0,450	0,450

Tabella 2-21 Autovettore principale normalizzato distributivo per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "B_Qual"

In Tabella 2-22 si riportano le iterazioni relative al calcolo dell'autovalore λ_{max} della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-19.

$\lambda_{max}(1)$	$\lambda_{max}(2)$	$\lambda_{max}(3)$	$\lambda_{max}(4)$	$\lambda_{max}(5)$	$\lambda_{max}(6)$	$\lambda_{max}(7)$	$\lambda_{max}(8)$
44,467	5,482	5,145	5,196	5,209	5,207	5,207	5,207

Tabella 2-22 Autovalore λ_{max} per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "B_Qual"

La Tabella 2-23 riporta, per ogni iterazione, il calcolo dell'indice di consistenza della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-19.

CI(1)	CI(2)	CI(3)	CI(4)	CI(5)	CI(6)	CI(7)	CI(8)
9,867	0,120	0,036	0,049	0,052	0,052	0,052	0,052

Tabella 2-23 Indice di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "B_Qual"

La Tabella 2-24 riporta, per ogni iterazione, il calcolo dell'indice di consistenza della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-19.

CR(1)	CR(2)	CR(3)	CR(4)	CR(5)	CR(6)	CR(7)	CR(8)
8,889	0,109	0,033	0,044	0,047	0,047	0,047	0,047

Tabella 2-24 Rapporto di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "B_Qual"

In Tabella 2-25, Figura 2-7 e Figura 2-8 sono riportati il rating distributivo con i valori dei pesi locali delle alternative con riferimento al criterio "B_Qual" ed il rating ideale delle alternative con riferimento al criterio "B_Qual".

Alternative	Rating distributivo	Rating ideale
ID_2	6,08%	0,135
ID_3	6,08%	0,135
ID_5	14,49%	0,322
ID_1	28,35%	0,630
ID_4	45,00%	1,000

Tabella 2-25 Rating distributivo ed ideale AHP-R delle alternative su "B_Qual"

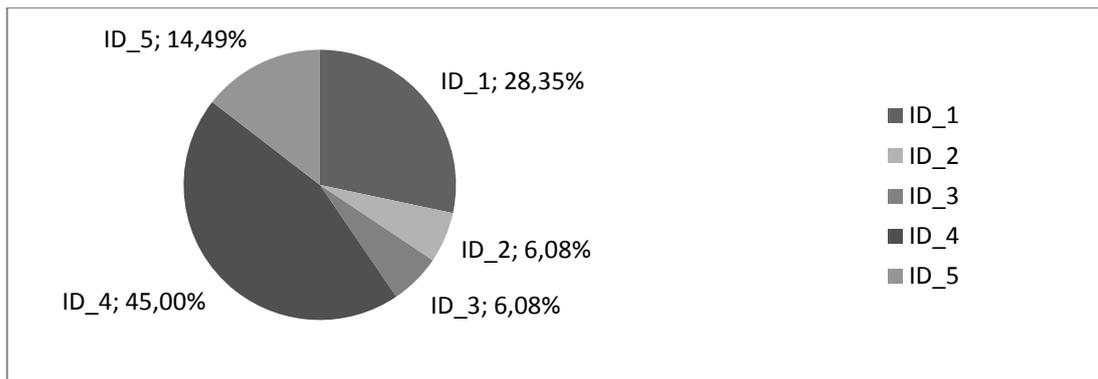


Figura 2-7 Rating distributivo AHP-R delle alternative su "B_Qual"

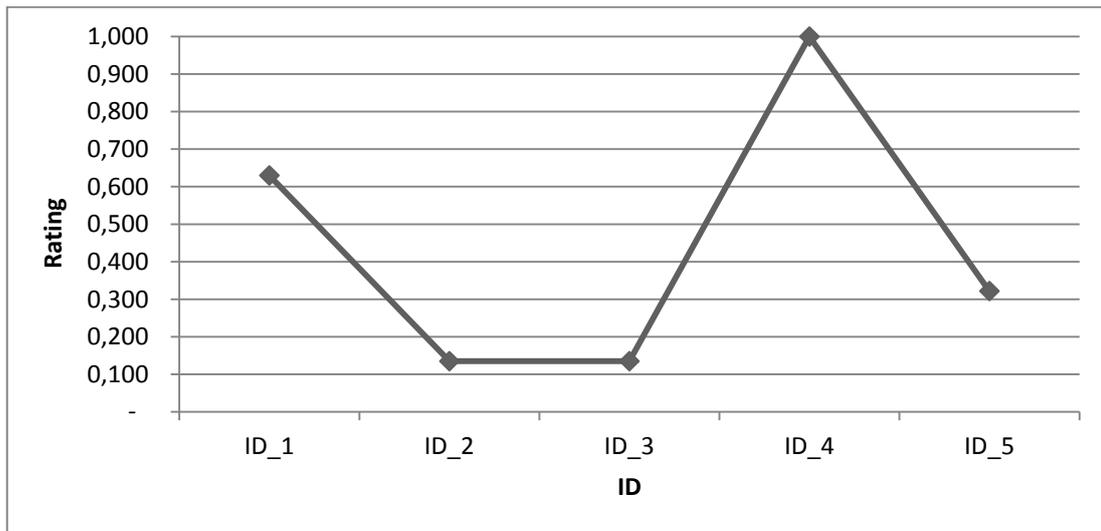


Figura 2-8 Rating ideale AHP-R delle alternative su “B_Qual”

In Tabella 2-26 e Figura 2-9 si riporta il ranking delle 5 alternative con riferimento al criterio “B_Qual” operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking	Alternative	Rating ideale
1	ID_4	1,000
2	ID_1	0,630
3	ID_5	0,322
4	ID_2	0,135
5	ID_3	0,135

Tabella 2-26 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “B_Qual”

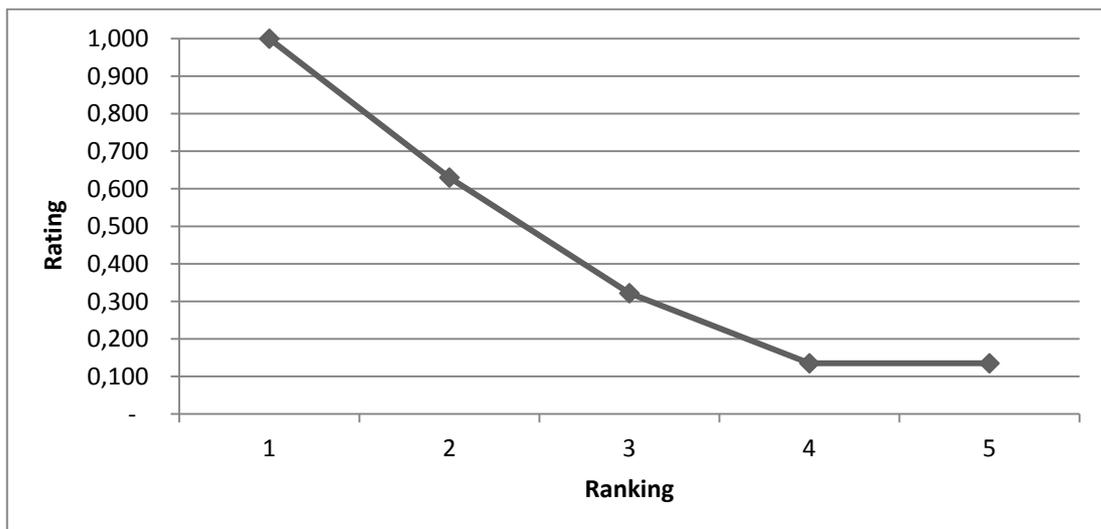


Figura 2-9 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “B_Qual”

La matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-27 definisce i coefficienti di dominanza tra le alternative con riferimento al criterio “C_Quant”. In Tabella 2-3 le performance delle 5 alternative con riferimento al criterio “C_Quant” sono espresse in scala quantitativa di rapporto [0,100]; tuttavia, mediante interpretazione “estensiva” del pensiero di Saaty, tali valori di performance sono confrontati a coppie tra loro per il tramite della scala fondamentale di Saaty, ovvero senza operare rapporti matematici tra i valori di performance di Tabella 2-3, ma mediante interpretazione degli stessi in scala fondamentale di Saaty.

i/j C_Quant	ID_2	ID_3	ID_1	ID_5	ID_4
ID_2	1	1/2	1/3	1/7	1/7
ID_3	2	1	1/2	1/4	1/4
ID_1	3	2	1	1/3	1/3
ID_5	7	4	3	1	1
ID_4	7	4	3	1	1

Tabella 2-27 Matrice di confronto a coppie tra alternative su “C_Quant”

In Tabella 2-28 sono riportate le iterazioni necessarie al calcolo dell'autovettore principale associato all'autovalore λ_{max} della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-27.

	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)	x(5)	x(6)	x(7)	x(8)
ID_2	2,119	0,244	0,241	0,241	0,241	0,241	0,241	0,241
ID_3	4,000	0,437	0,433	0,434	0,434	0,434	0,434	0,434
ID_1	6,667	0,708	0,697	0,698	0,698	0,698	0,698	0,698
ID_5	16,000	1,850	1,823	1,825	1,825	1,825	1,825	1,825
ID_4	16,000	1,850	1,823	1,825	1,825	1,825	1,825	1,825

Tabella 2-28 Autovettore principale per la matrice di confronto a coppie tra alternative su “C_Quant”

In Tabella 2-29 si riportano le iterazioni relative al calcolo dell'autovettore principale, normalizzato sull'unità con metodo distributivo, della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-27.

	xn(1)	xn(2)	xn(3)	xn(4)	xn(5)	xn(6)	xn(7)	xn(8)
ID_2	0,047	0,048	0,048	0,048	0,048	0,048	0,048	0,048
ID_3	0,089	0,086	0,086	0,086	0,086	0,086	0,086	0,086
ID_1	0,149	0,139	0,139	0,139	0,139	0,139	0,139	0,139
ID_5	0,357	0,364	0,363	0,363	0,363	0,363	0,363	0,363
ID_4	0,357	0,364	0,363	0,363	0,363	0,363	0,363	0,363

Tabella 2-29 Autovettore principale normalizzato distributivo per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "C_Quant"

In Tabella 2-30 si riportano le iterazioni relative al calcolo dell'autovalore λ_{max} della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-27.

$\lambda_{max}(1)$	$\lambda_{max}(2)$	$\lambda_{max}(3)$	$\lambda_{max}(4)$	$\lambda_{max}(5)$	$\lambda_{max}(6)$	$\lambda_{max}(7)$	$\lambda_{max}(8)$
44,786	5,087	5,018	5,023	5,023	5,023	5,023	5,023

Tabella 2-30 Autovalore λ_{max} per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "C_Quant"

La Tabella 2-31 riporta, per ogni iterazione, il calcolo dell'indice di consistenza della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-27.

CI(1)	CI(2)	CI(3)	CI(4)	CI(5)	CI(6)	CI(7)	CI(8)
9,946	0,022	0,004	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006

Tabella 2-31 Indice di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "C_Quant"

La Tabella 2-32 riporta, per ogni iterazione, il calcolo del rapporto di consistenza della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-27.

CR(1)	CR(2)	CR(3)	CR(4)	CR(5)	CR(6)	CR(7)	CR(8)
8,961	0,020	0,004	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005

Tabella 2-32 Rapporto di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "C_Quant"

In Tabella 2-33, Figura 2-10 e Figura 2-11 sono riportati il rating distributivo con i valori dei pesi locali delle alternative con riferimento al criterio "C_Quant" ed il rating ideale delle alternative con riferimento al criterio "C_Quant".

Alternative	Rating distributivo	Rating ideale
ID_2	4,80%	0,132
ID_3	8,63%	0,238
ID_1	13,89%	0,382
ID_5	36,33%	1,000
ID_4	36,33%	1,000

Tabella 2-33 Rating distributivo ed ideale AHP-R delle alternative su “C_Quant”

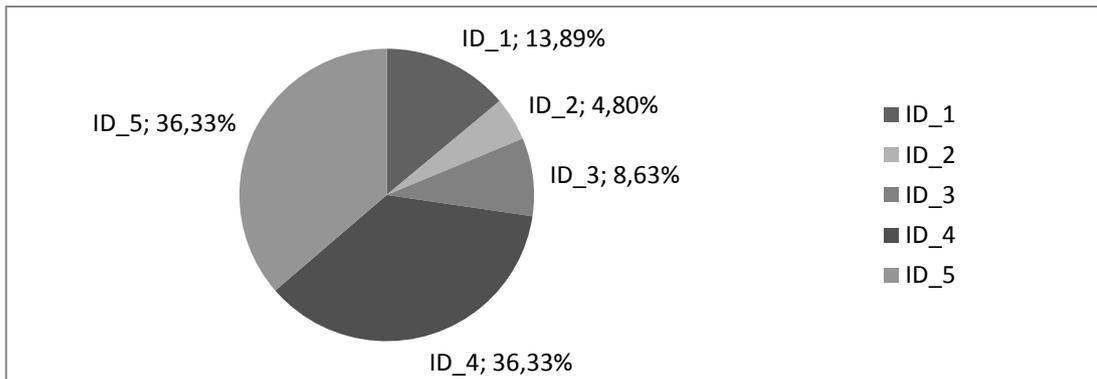


Figura 2-10 Rating distributivo AHP-R delle alternative su “C_Quant”

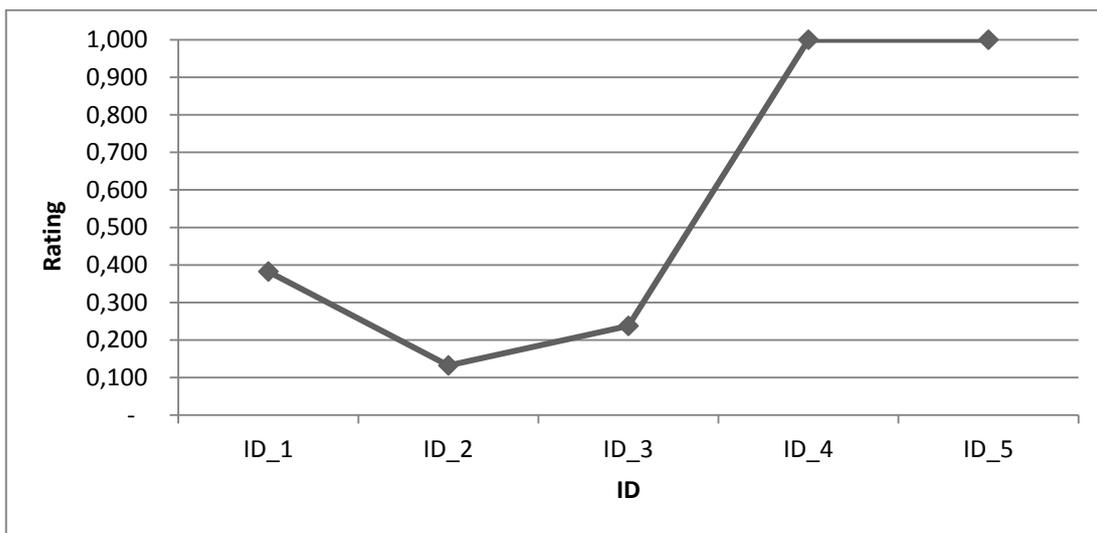


Figura 2-11 Rating ideale AHP-R delle alternative su “C_Quant”

In Figura 3-6 e Figura 2-12 si riporta il ranking delle 5 alternative con riferimento al criterio “C_Quant” operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking	Alternative	Rating ideale
1	ID_5	1,000
2	ID_4	1,000
3	ID_1	0,382
4	ID_3	0,238

5	ID_2	0,132
---	------	-------

Tabella 2-34 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “C_Quant”

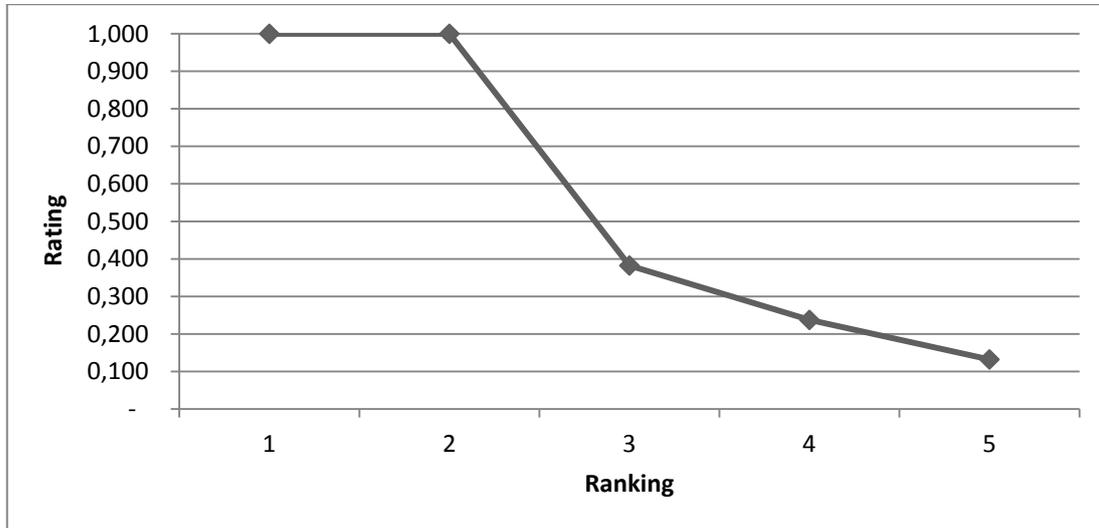


Figura 2-12 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “C_Quant”

La matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-35 definisce i coefficienti di dominanza tra le alternative con riferimento al criterio “D_Qual”. In Tabella 2-3 le performance delle 5 alternative con riferimento al criterio “D_Qual” sono espresse in scala qualitativa nominale {1,2,3,4,5}; tali valori di performance sono confrontati a coppie tra loro per il tramite della scala fondamentale di Saaty.

i/j D_Qual	ID_5	ID_2	ID_3	ID_1	ID_4
ID_5	1	1/3	1/3	1/7	1/9
ID_2	3	1	1	1/3	1/4
ID_3	3	1	1	1/3	1/4
ID_1	7	3	3	1	1/3
ID_4	9	4	4	3	1

Tabella 2-35 Matrice di confronto a coppie tra alternative su “D_Qual”

In Tabella 2-36 sono riportate le iterazioni necessarie al calcolo dell'autovettore principale associato all'autovalore λ_{max} della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-35.

	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)	x(5)	x(6)	x(7)	x(8)
ID_5	1,921	0,207	0,200	0,202	0,202	0,202	0,202	0,202
ID_2	5,583	0,557	0,535	0,539	0,540	0,540	0,540	0,540
ID_3	5,583	0,557	0,535	0,539	0,540	0,540	0,540	0,540
ID_1	14,333	1,410	1,325	1,336	1,337	1,337	1,337	1,337
ID_4	21,000	2,601	2,466	2,475	2,477	2,477	2,477	2,477

Tabella 2-36 Autovettore principale per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "D_Qual"

In Tabella 2-37 si riportano le iterazioni relative al calcolo dell'autovettore principale, normalizzato sull'unità con metodo distributivo, della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-35.

	xn(1)	xn(2)	xn(3)	xn(4)	xn(5)	xn(6)	xn(7)	xn(8)
ID_5	0,040	0,039	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040
ID_2	0,115	0,104	0,106	0,106	0,106	0,106	0,106	0,106
ID_3	0,115	0,104	0,106	0,106	0,106	0,106	0,106	0,106
ID_1	0,296	0,264	0,262	0,262	0,262	0,262	0,262	0,262
ID_4	0,434	0,488	0,487	0,486	0,486	0,486	0,486	0,486

Tabella 2-37 Autovettore principale normalizzato distributivo per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "D_Qual"

In Tabella 2-38 si riportano le iterazioni relative al calcolo dell'autovalore λ_{max} della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-35.

$\lambda_{max}(1)$	$\lambda_{max}(2)$	$\lambda_{max}(3)$	$\lambda_{max}(4)$	$\lambda_{max}(5)$	$\lambda_{max}(6)$	$\lambda_{max}(7)$	$\lambda_{max}(8)$
48,421	5,332	5,063	5,091	5,096	5,095	5,095	5,095

Tabella 2-38 Autovalore λ_{max} per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "D_Qual"

La Tabella 2-39 riporta, per ogni iterazione, il calcolo dell'indice di consistenza della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-35.

CI(1)	CI(2)	CI(3)	CI(4)	CI(5)	CI(6)	CI(7)	CI(8)
10,855	0,083	0,016	0,023	0,024	0,024	0,024	0,024

Tabella 2-39 Indice di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "D_Qual"

La Tabella 2-40 riporta, per ogni iterazione, il calcolo dell'indice di consistenza della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-35.

CR(1)	CR(2)	CR(3)	CR(4)	CR(5)	CR(6)	CR(7)	CR(8)
9,779	0,075	0,014	0,020	0,022	0,021	0,021	0,021

Tabella 2-40 Rapporto di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra alternative su "D_Qual"

In Tabella 2-41, Figura 2-13 e Figura 2-14 sono riportati il rating distributivo con i valori dei pesi locali delle alternative con riferimento al criterio "D_Qual" ed il rating ideale delle alternative con riferimento al criterio "D_Qual".

Alternative	Rating distributivo	Rating ideale
ID_5	3,96%	0,081
ID_2	10,59%	0,218
ID_3	10,59%	0,218
ID_1	26,24%	0,540
ID_4	48,62%	1,000

Tabella 2-41 Rating distributivo ed ideale AHP-R delle alternative su "D_Qual"

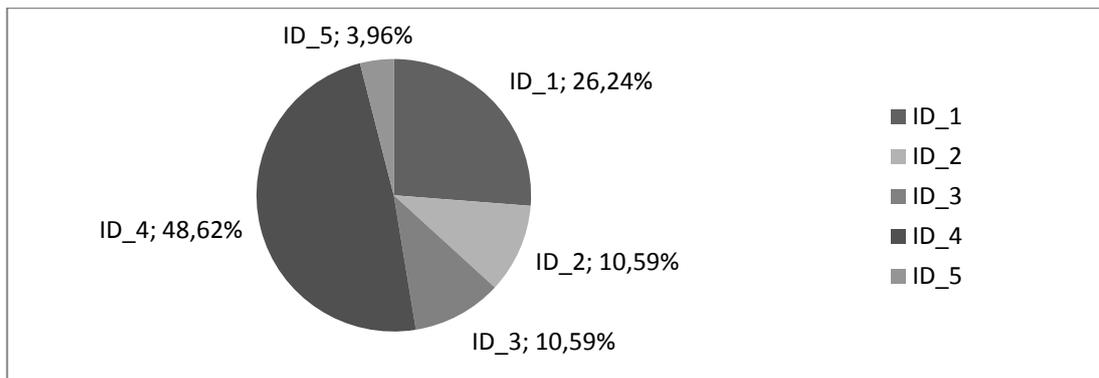


Figura 2-13 Rating distributivo AHP-R delle alternative su "D_Qual"

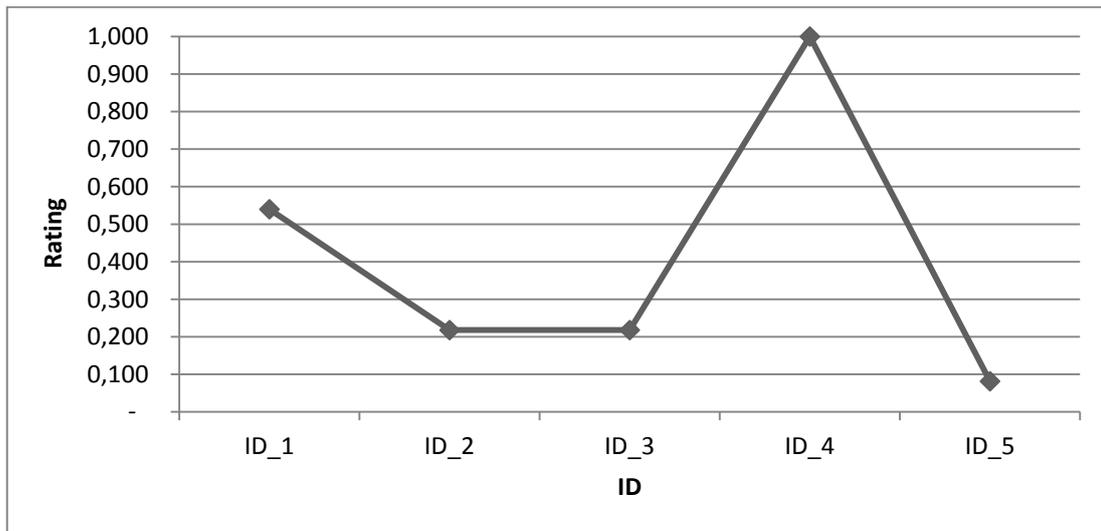


Figura 2-14 Rating ideale AHP-R delle alternative su “D_Qual”

In Tabella 2-42 e Figura 2-15 si riporta il ranking delle 5 alternative con riferimento al criterio “D_Qual” operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking	Alternative	Rating ideale
1	ID_4	1,000
2	ID_1	0,540
3	ID_2	0,218
4	ID_3	0,218
5	ID_5	0,081

Tabella 2-42 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “D_Qual”

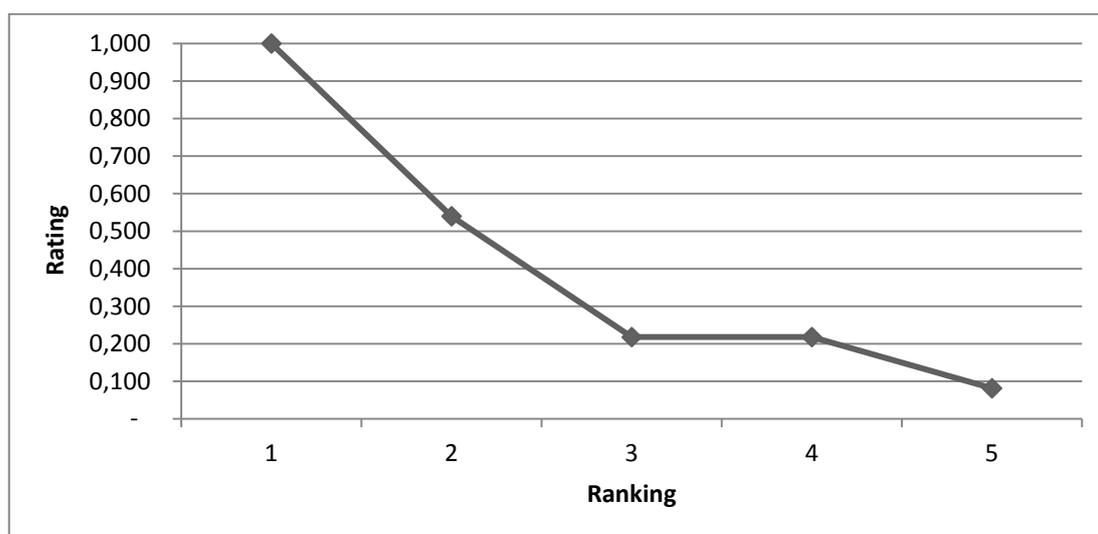


Figura 2-15 Rating e ranking AHP-R delle alternative su “D_Qual”

La Tabella 2-43 riportata il rating ideale delle 5 alternative di livello gerarchico 3, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2.

Alternative	Rating ideale A_Quant	Rating ideale B_Qual	Rating ideale C_Quant	Rating ideale D_Qual
ID_1	0,496	0,630	0,382	0,540
ID_2	0,269	0,135	0,132	0,218
ID_3	0,263	0,135	0,238	0,218
ID_4	1,000	1,000	1,000	1,000
ID_5	0,077	0,322	1,000	0,081

Tabella 2-43 Rating ideale AHP-R delle alternative sui criteri

In Tabella 2-44 e Figura 2-16 si riporta il rating ideale globale AHP-R delle 5 alternative di livello gerarchico 3, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2. Il rating ideale globale è ottenuto mediante *sintesi moltiplicativa* ossia mediante prodotto matriciale tra la matrice di dimensione 5×4 di Tabella 2-43 costituita da 4 vettori dei rating ideali delle 5 alternative ed il vettore di Tabella 2-10 di dimensione 4×1 del rating distributivo ovvero dei pesi locali dei 4 criteri; si ottiene quindi il vettore di dimensione 5×1 di Tabella 2-44 del rating ideale globale delle 5 alternative.

Alternative	Rating ideale AHP-R
ID_5	0,081
ID_2	0,218
ID_3	0,218
ID_1	0,540

ID_4

1,000

Tabella 2-44 Rating ideale globale AHP-R delle alternative sui criteri

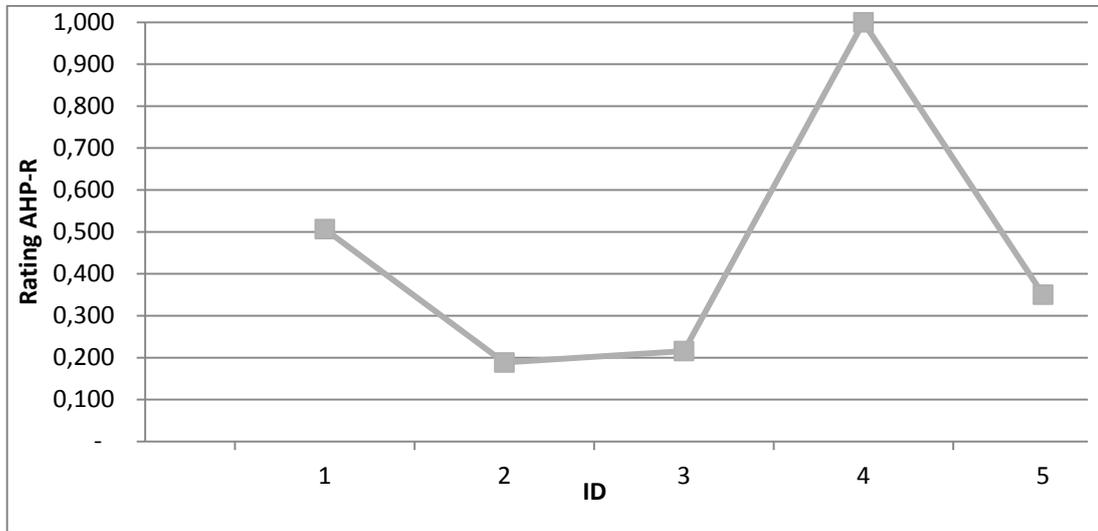


Figura 2-16 Rating ideale globale AHP-R delle alternative sui criteri

In Tabella 2-45 e Figura 2-17 si riporta il ranking globale AHP-R delle 5 alternative di livello gerarchico 3, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2 operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking	Alternative	Rating ideale AHP-R
1	ID_4	1,000
2	ID_1	0,507
3	ID_5	0,350
4	ID_3	0,216
5	ID_2	0,188

Tabella 2-45 Rating e ranking globale AHP-R delle alternative sui criteri

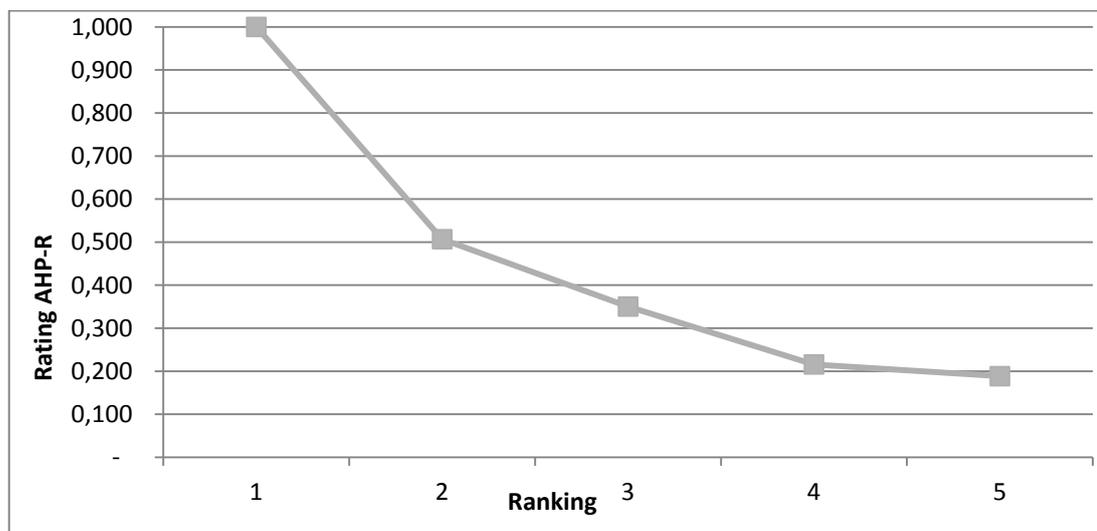


Figura 2-17 Rating e ranking globale AHP-R delle alternative sui criteri

2.3 AHP-A per confronti assoluti e ranking seriale

L'Analytic Hierarchy Process, per mezzo di opportune modifiche a seguire descritte, consente confronti assoluti in serie ed il ranking di un numero indefinito di alternative.

La psicologia cognitiva ormai da tempo ha dimostrato che l'uomo è in grado di operare due tipologie di confronti: assoluti e relativi. Nel confronto assoluto si tende a confrontare potenziali azioni o alternative con uno standard insito nella memoria di chi opera e sviluppato tramite esperienza e conoscenza del fenomeno; nei confronti relativi si realizzano confronti a coppie tra potenziali azioni o alternative aventi un attributo comune. I confronti assoluti appaiono quindi utili per la classificazione indipendente o *one at time* di potenziali azioni o alternative con riferimento ad intensità di rating per ciascun criterio; tale intensità di rating può essere espressa in termini quantitativi o qualitativi.

La tecnica AHP modificata come sopra necessita di una gerarchia costituita da almeno 4 livelli:

- livello 1: obiettivo generale della valutazione (1);
- livello 2: criteri di valutazione (r);

- livello 3: intensità delle alternative (n);
- livello 4: alternative oggetto di valutazione (s).

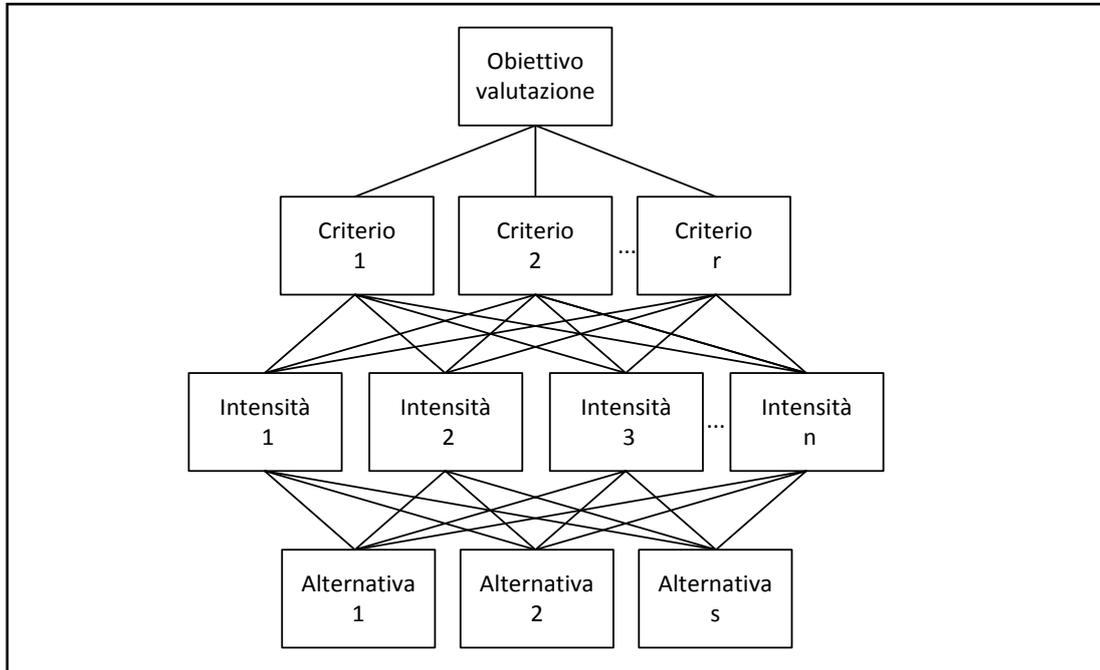


Figura 2-18 Gerarchia AHP a 4 livelli

Il calcolo dei pesi locali, utilizzando il supporto matematico e semantico di Saaty in precedenza descritto, riguarderà i livelli 2 e 3 della gerarchia; si otterranno quindi: un vettore di dimensione $r \times 1$ dei pesi locali degli r criteri ed un vettore di dimensione $n \times 1$ dei pesi locali delle n intensità.

Applicando l'associazione tra la i -esima alternativa ($i = 1, 2 \dots s$) e la j -esima intensità ($j = 1, 2 \dots n$) relativamente al k -esimo criterio ($k = 1, 2 \dots r$), si determina il vettore di dimensione $1 \times r$ dei pesi locali della i -esima alternativa. Lo step finale per il ranking di un numero indefinito (s) di alternative è la definizione del peso globale della i -esima alternativa applicando il principio di composizione gerarchica ovvero elaborando il prodotto tra il vettore di dimensione $r \times 1$ dei pesi locali degli r criteri ed il vettore di dimensione $1 \times r$ dei pesi locali della i -esima alternativa. Iterando il passo finale sopra citato per un numero indefinito (s) di alternative si ottiene il vettore di dimensione $s \times 1$ dei pesi globali delle s alternative

I pesi globali consentono di determinare un ordine di preferenza: un'alternativa sarà tanto più preferibile quanto maggiore è il suo peso globale.

2.4 Applicazione AHP-A per confronti assoluti e ranking seriale

Al fine di sperimentare l'applicazione della metodologia AHP-A ed operare confronti assoluti in serie ed il ranking di un numero indefinito di alternative, si consideri la seguente gerarchia a 4 livelli.

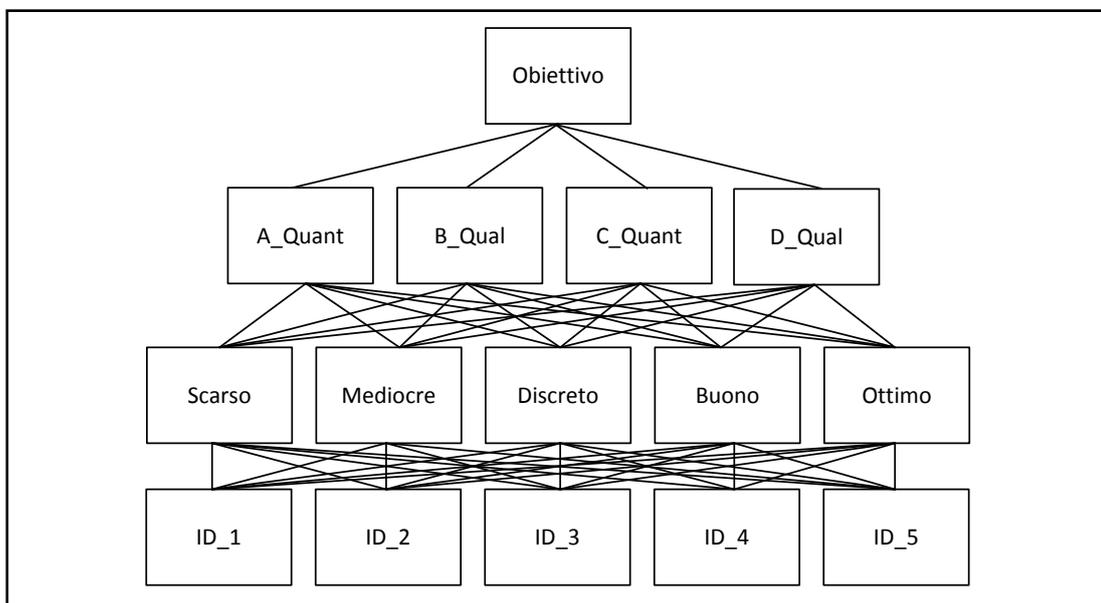


Figura 2-19 Gerarchia applicazione AHP-A

Il livello 1 della gerarchia evidenzia l'obiettivo generale della valutazione ossia la scelta della migliore alternativa con riferimento ai 4 criteri di valutazione evidenziati al livello 2; ogni criterio risulta connesso a tutti i livelli di intensità delle alternative evidenziati al livello 3 della struttura ed ogni livello di intensità è connesso a tutte le 5 alternative oggetto di valutazione evidenziate al livello 4.

In Tabella 2-46 sono riportate le performance delle 5 alternative con riferimento ad ognuno dei 4 criteri; in particolare:

- le performance delle 5 alternative con riferimento al criterio "A_Quant" sono espresse in scala quantitativa di rapporto [0, 100];

- le performance delle 5 alternative con riferimento al criterio “B_Qual” sono espresse in scala qualitativa nominale {1,2,3,4,5};
- le performance delle 5 alternative con riferimento al criterio “C_Quant” sono espresse in scala quantitativa di rapporto [0, 100];
- le performance delle 5 alternative con riferimento al criterio “D_Qual” sono espresse in scala qualitativa nominale {1,2,3,4,5};

I valori di performance in Tabella 2-46 equivalgono ai valori di Tabella 2-3 già determinati in modalità random mediante estrazione casuale del dato di performance su distribuzioni aleatorie rettilinee ed uniformi facenti riferimento agli insiemi quali – quantitativi sopra esposti.

	A_Quant	B_Qual	C_Quant	D_Qual
ID_1	64,85	5	28,58	4
ID_2	46,64	3	5,79	3
ID_3	40,02	3	18,72	3
ID_4	87,97	5	74,11	5
ID_5	0,50	4	74,00	1

Tabella 2-46 Performance quali – quantitative delle alternative sui criteri

2.3.3 Rating distributivo e pesi locali tra criteri in AHP-A

Al fine di calcolare il *rating distributivo* con i valori dei pesi locali degli elementi dislocati al livello 2 della gerarchia, ossia i criteri, si richiama il contenuto del paragrafo 2.3.1 “Rating distributivo e pesi locali tra criteri in AHP-R”.

2.3.4 Rating distributivo/ideale e pesi locali delle intensità in AHP-A

La matrice di confronto a coppie in Tabella 2-47 riporta i coefficienti di dominanza, definiti tramite la scala fondamentale di Saaty, mediante confronti a coppie tra le 5 intensità al livello 3 della gerarchia.

i/j	Scarso	Mediocre	Sufficiente	Buono	Ottimo
Scarso	1	1/3	1/5	1/7	1/9
Mediocre	3	1	1/3	1/5	1/7
Sufficiente	5	3	1	1/3	1/5

Buono	7	5	3	1	1/3
Ottimo	9	7	5	3	1

Tabella 2-47 Matrice di confronto a coppie tra le intensità

In Tabella 2-48 sono riportate le iterazioni necessarie al calcolo dell'autovettore principale associato all'autovalore λ_{max} della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-47.

	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)	x(5)	x(6)	x(7)	x(8)
Scarso	1,787	0,181	0,172	0,174	0,175	0,175	0,175	0,175
Mediocre	4,676	0,350	0,323	0,331	0,332	0,332	0,332	0,332
Sufficiente	9,533	0,749	0,657	0,672	0,676	0,676	0,675	0,676
Buono	16,333	1,555	1,344	1,362	1,371	1,370	1,370	1,370
Ottimo	25,000	2,974	2,662	2,674	2,687	2,686	2,686	2,686

Tabella 2-48 Autovettore principale per la matrice di confronto tra le intensità

In Tabella 2-49 si riportano le iterazioni relative al calcolo dell'autovettore principale, normalizzato sull'unità con metodo distributivo, della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-47.

	xn(1)	xn(2)	xn(3)	xn(4)	xn(5)	xn(6)	xn(7)	xn(8)
Scarso	0,031	0,031	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033
Mediocre	0,082	0,060	0,063	0,064	0,063	0,063	0,063	0,063
Sufficiente	0,166	0,129	0,127	0,129	0,129	0,129	0,129	0,129
Buono	0,285	0,268	0,261	0,261	0,262	0,262	0,261	0,261
Ottimo	0,436	0,512	0,516	0,513	0,513	0,513	0,513	0,513

Tabella 2-49 Autovettore principale normalizzato distributivo per la matrice di confronto a coppie tra le intensità

In Tabella 2-50 si riportano le iterazioni relative al calcolo dell'autovalore λ_{max} della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-47.

$\lambda_{max}(1)$	$\lambda_{max}(2)$	$\lambda_{max}(3)$	$\lambda_{max}(4)$	$\lambda_{max}(5)$	$\lambda_{max}(6)$	$\lambda_{max}(7)$	$\lambda_{max}(8)$
57,330	5,809	5,158	5,213	5,241	5,239	5,237	5,237

Tabella 2-50 Autovalore λ_{max} per la matrice di confronto a coppie tra le intensità

La Tabella 2-51 riporta, per ogni iterazione, il calcolo dell'indice di consistenza della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-47.

CI(1)	CI(2)	CI(3)	CI(4)	CI(5)	CI(6)	CI(7)	CI(8)
13,083	0,202	0,040	0,053	0,060	0,060	0,059	0,059

Tabella 2-51 Indice di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra le intensità

La Tabella 2-52 riporta, per ogni iterazione, il calcolo dell'indice di consistenza della matrice di confronto a coppie riportata in Tabella 2-47.

CR(1)	CR(2)	CR(3)	CR(4)	CR(5)	CR(6)	CR(7)	CR(8)
11,786	0,182	0,036	0,048	0,054	0,054	0,053	0,053

Tabella 2-52 Rapporto di consistenza per la matrice di confronto a coppie tra le intensità

In Tabella 2-53, Figura 2-20 e Figura 2-21 sono riportati il rating distributivo con i valori dei pesi locali delle intensità ed il rating ideale delle intensità.

Alternative	Rating distributivo	Rating ideale
Scarso	3,33%	0,065
Mediocre	6,34%	0,124
Sufficiente	12,90%	0,252
Buono	26,15%	0,510
Ottimo	51,28%	1,000

Tabella 2-53 Rating distributivo ed ideale AHP-A delle intensità

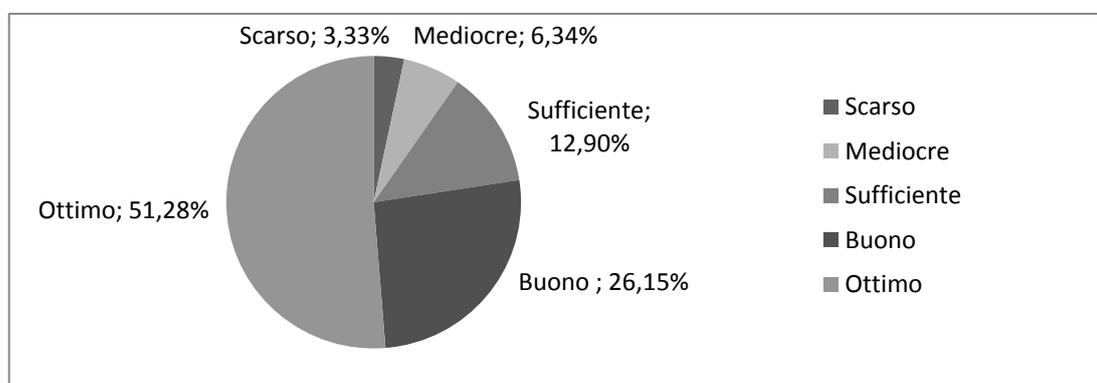


Figura 2-20 Rating distributivo AHP-A delle intensità

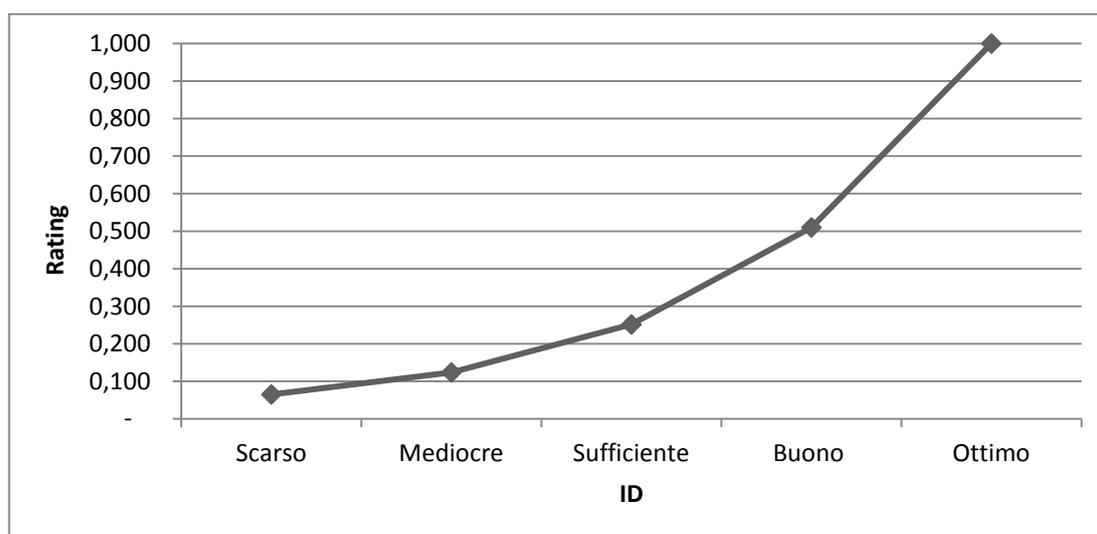


Figura 2-21 Rating ideale AHP-A delle intensità

2.3.5 Rating ideale delle alternative in AHP-A

Allo scopo di definire il rating ideale in AHP-A delle alternative poste al livello 4 della gerarchia è necessario operare, con riferimento ad ogni criterio, facendo ricorso ai giudizi di uno o più esperti, l'associazione tra intensità, rating ideale delle intensità ed intervalli potenziali di valori di performance. In Tabella 2-54 si riporta l'associazione delle 5 intensità al livello 4 della gerarchia con altrettanti intervalli potenziali di valori di performance per criteri quantitativi ed altrettanti valori nominali di performance per intervalli qualitativi.

	A_Quant	B_Qual	C_Quant	D_Qual	Rating ideale
Scarso	[0;20,00[1	[0;20,00[1	0,065
Mediocre	[20,00;40,00[2	[20,00;40,00[2	0,124
Sufficiente	[40,00;60,00[3	[40,00;60,00[3	0,252
Buono	[60,00;80,00[4	[60,00;80,00[4	0,510
Ottimo	[80,00;100,00]	5	[80,00;100,00]	5	1,000

Tabella 2-54 Associazione tra intensità, rating ideale delle intensità ed intervalli potenziali di valori di performance

In Tabella 2-55 e Figura 2-22 si riporta il rating ideale delle alternative poste al livello 4 della gerarchia con riferimento al criterio "A_Quant". Il rating ideale deriva dal confronto della performance quantitativa di ogni alternativa indicata in Tabella 2-46 con la Tabella 2-54 di associazione tra intensità, rating ideale delle intensità ed intervalli potenziali di valori di performance.

Alternative	Rating ideale
ID_1	0,510
ID_2	0,252
ID_3	0,252
ID_4	1,000
ID_5	0,065

Tabella 2-55 Rating ideale AHP-A delle alternative su "A_Quant"

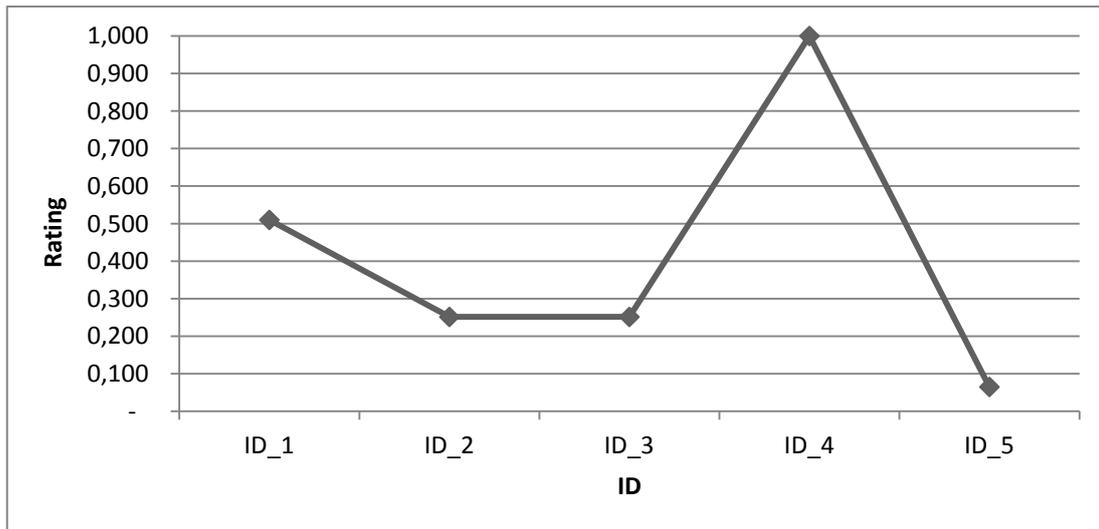


Figura 2-22 Rating ideale AHP-A delle alternative su "A_Quant"

In Tabella 2-56 e Figura 2-23 si riporta il ranking delle 5 alternative con riferimento al criterio "A_Quant" operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking	Alternative	Rating ideale
1	ID_4	1,000
2	ID_1	0,510
3	ID_2	0,252
4	ID_3	0,252
5	ID_5	0,065

Tabella 2-56 Rating e ranking AHP-A delle alternative su "A_Quant"

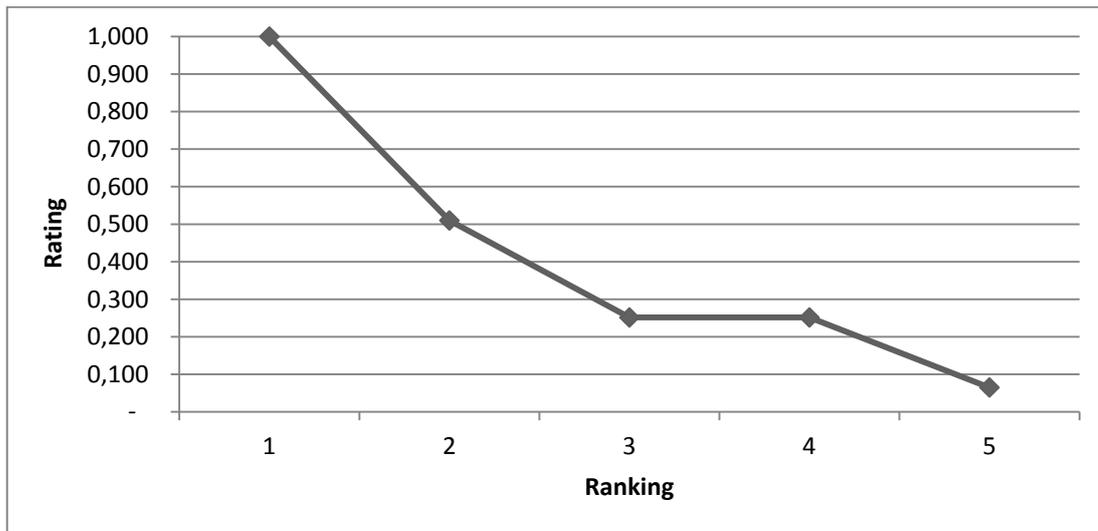


Figura 2-23 Rating e ranking AHP-A delle alternative su "A_Quant"

In Tabella 2-57 e Figura 2-24 si riporta il rating ideale delle alternative poste al livello 4 della gerarchia con riferimento al criterio "B_Qual". Il rating ideale deriva dal confronto della performance qualitativa di ogni alternativa indicata in Tabella 2-46 con la Tabella 2-54 di associazione tra intensità, rating ideale delle intensità ed intervalli potenziali di valori di performance.

Alternative	Rating ideale
ID_1	1,000
ID_2	0,252
ID_3	0,252
ID_4	1,000
ID_5	0,510

Tabella 2-57 Rating ideale AHP-A delle alternative su "B_Qual"

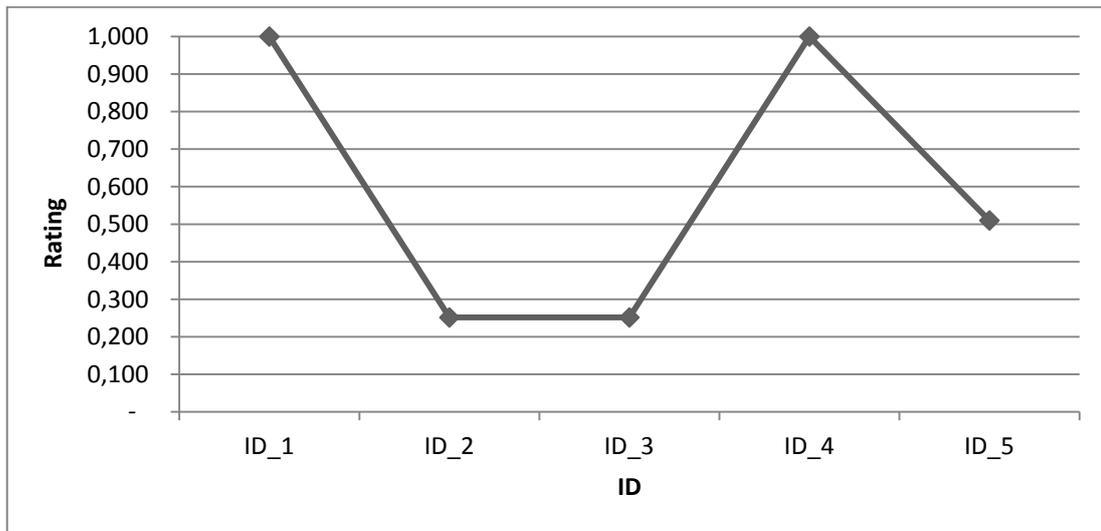


Figura 2-24 Rating ideale AHP-A delle alternative su “B_Qual”

In Tabella 2-58 e Figura 2-25 si riporta il ranking delle 5 alternative con riferimento al criterio “B_Qual” operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking	Alternative	Rating ideale
1	ID_1	1,000
2	ID_4	1,000
3	ID_5	0,510
4	ID_2	0,252
5	ID_3	0,252

Tabella 2-58 Rating e ranking AHP-A delle alternative su “B_Qual”

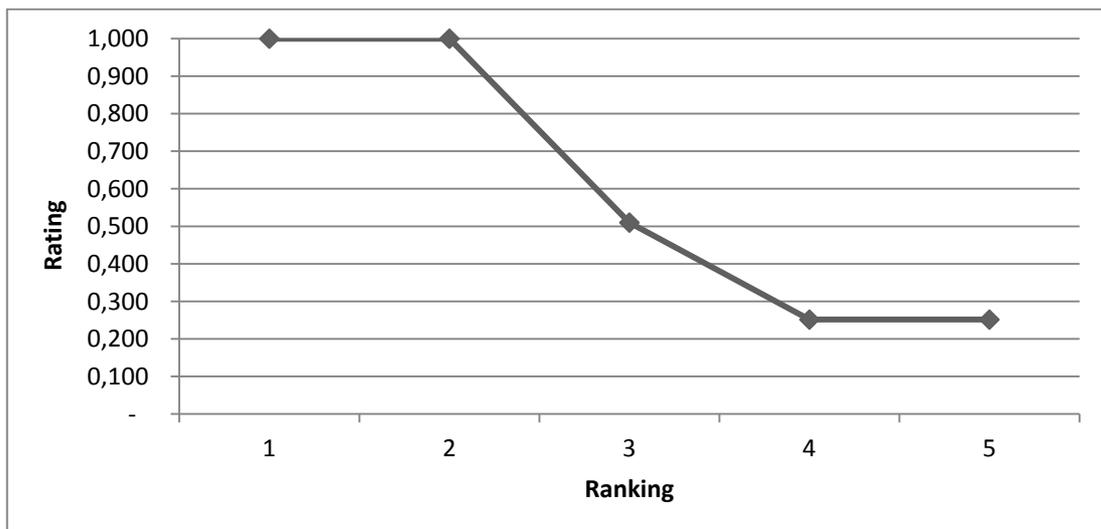


Figura 2-25 Rating e ranking AHP-A delle alternative su “B_Qual”

In Tabella 2-59 e Figura 2-26 si riporta il rating ideale delle alternative poste al livello 4 della gerarchia con riferimento al criterio “C_Quant”. Il rating ideale deriva dal confronto della performance quantitativa di ogni alternativa indicata in Tabella 2-46 con la Tabella 2-54 di associazione tra intensità, rating ideale delle intensità ed intervalli potenziali di valori di performance.

Alternative	Rating ideale
ID_1	0,124
ID_2	0,065
ID_3	0,065
ID_4	0,510
ID_5	0,510

Tabella 2-59 Rating ideale AHP-A delle alternative su “C_Quant”

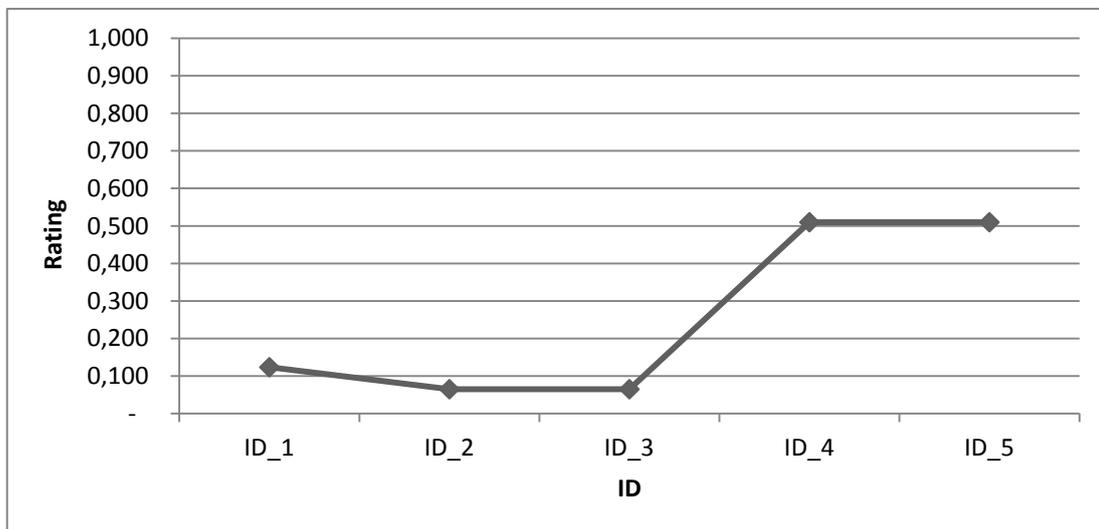


Figura 2-26 Rating ideale AHP-A delle alternative su “C_Quant”

In Tabella 2-60 e Figura 2-27 si riporta il ranking delle 5 alternative con riferimento al criterio “C_Quant” operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking	Alternative	Rating ideale
1	ID_4	0,510
2	ID_5	0,510
3	ID_1	0,124
4	ID_2	0,065
5	ID_3	0,065

Tabella 2-60 Rating e ranking AHP-A delle alternative su "C_Quant"

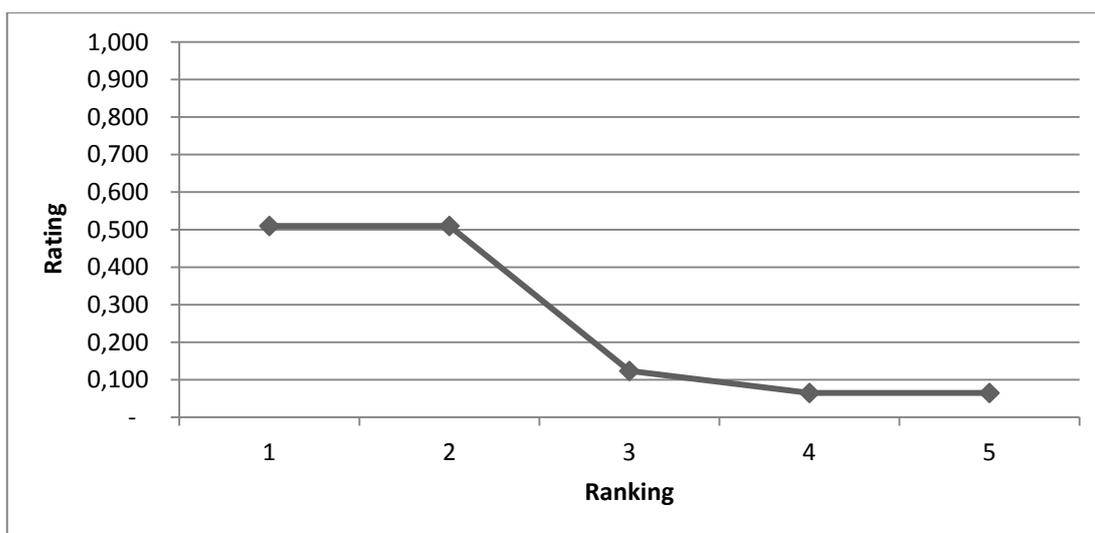


Figura 2-27 Rating e ranking AHP-A delle alternative su "C_Quant"

In Tabella 2-61 e Figura 2-28 si riporta il rating ideale delle alternative poste al livello 4 della gerarchia con riferimento al criterio "D_Qual". Il rating ideale deriva dal confronto della performance qualitativa di ogni alternativa indicata in Tabella 2-46 con la Tabella 2-54 di associazione tra intensità, rating ideale delle intensità ed intervalli potenziali di valori di performance.

Alternative	Rating ideale
ID_1	0,510
ID_2	0,252
ID_3	0,252
ID_4	1,000
ID_5	0,065

Tabella 2-61 Rating ideale AHP-A delle alternative su "D_Qual"

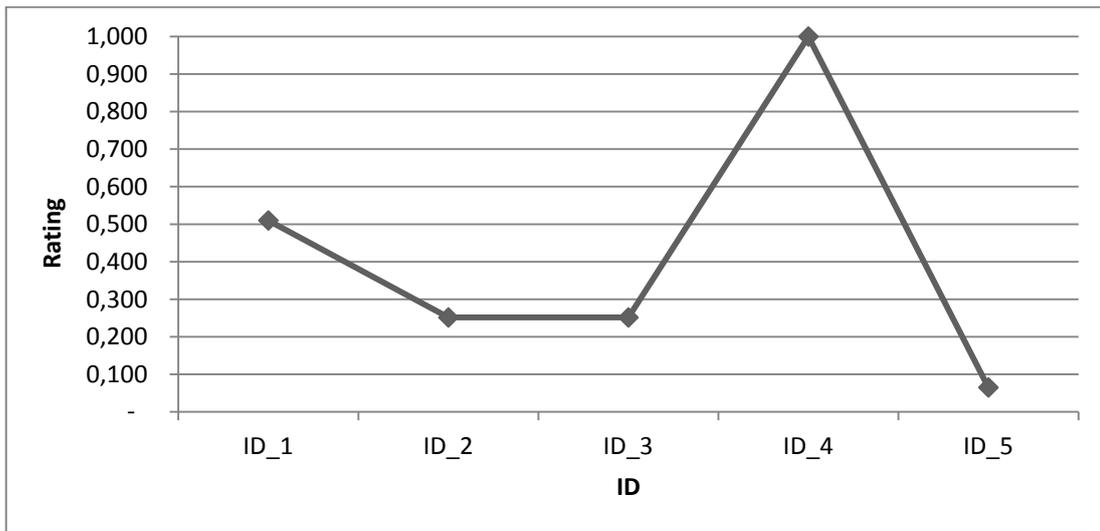


Figura 2-28 Rating ideale AHP-A delle alternative su “D_Qual”

In Tabella 2-62 e Figura 2-29 si riporta il ranking delle 5 alternative con riferimento al criterio “D_Qual” operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking	Alternative	Rating ideale
1	ID_4	1,000
2	ID_1	0,510
3	ID_2	0,252
4	ID_3	0,252
5	ID_5	0,065

Tabella 2-62 Rating e ranking AHP-A delle alternative su “D_Qual”

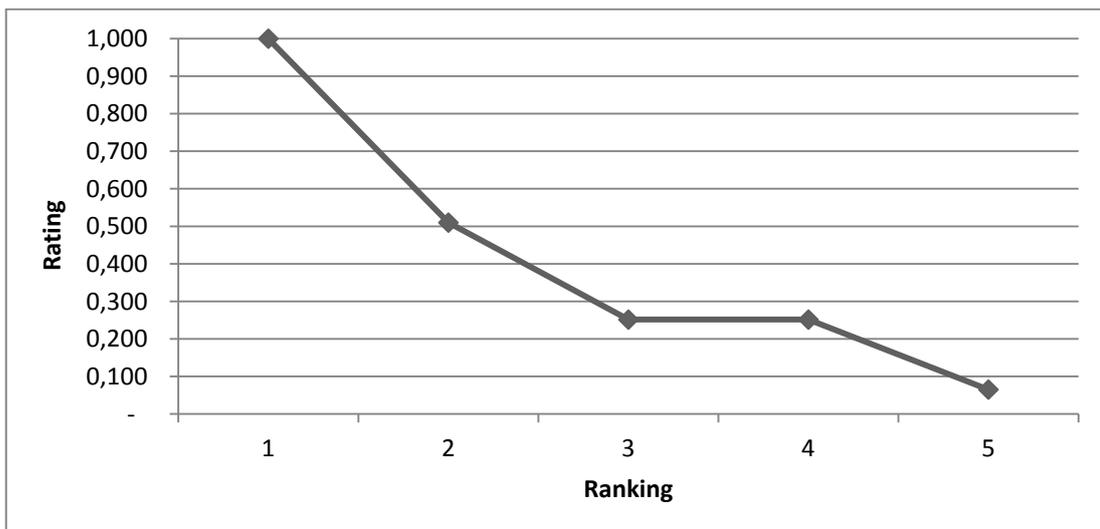


Figura 2-29 Rating e ranking AHP-A delle alternative su “D_Qual”

La Tabella 2-63 riporta il rating ideale delle 5 alternative di livello gerarchico 4, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2.

Alternative	Rating ideale A_Quant	Rating ideale B_Qual	Rating ideale C_Quant	Rating ideale D_Qual
ID_1	0,510	1,000	0,124	0,510
ID_2	0,252	0,252	0,065	0,252
ID_3	0,252	0,252	0,065	0,252
ID_4	1,000	1,000	0,510	1,000
ID_5	0,065	0,510	0,510	0,065

Tabella 2-63 Rating ideale AHP-A delle alternative sui criteri

In Tabella 2-64 e Figura 2-30 si riporta il rating ideale globale AHP-R delle 5 alternative di livello gerarchico 4, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2. Il rating ideale globale è ottenuto mediante *sintesi moltiplicativa* ossia mediante prodotto matriciale tra la matrice di dimensione 5×4 di Tabella 2-63 costituita da 4 vettori dei rating ideali delle 5 alternative ed il vettore di Tabella 2-10 di dimensione 4×1 del rating distributivo ovvero dei pesi locali dei 4 criteri; si ottiene quindi il vettore di dimensione 5×1 di Tabella 2-64 del rating ideale globale delle 5 alternative.

Alternative	Rating ideale AHP-A
ID_1	0,466
ID_2	0,203
ID_3	0,203
ID_4	0,872
ID_5	0,234

Tabella 2-64 Rating ideale globale AHP-A delle alternative sui criteri

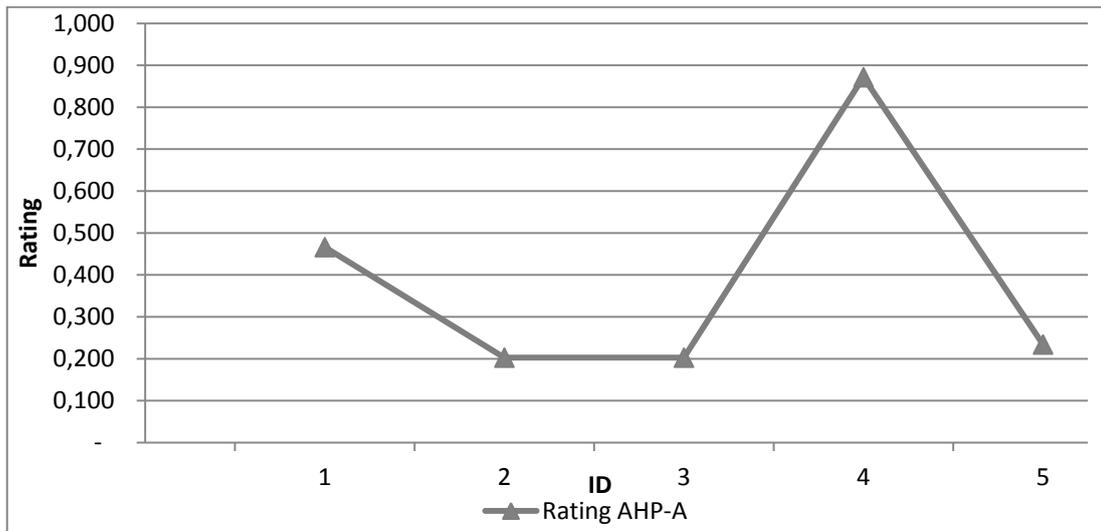


Figura 2-30 Rating ideale globale AHP-A delle alternative sui criteri

In Tabella 2-65 e Figura 2-31 si riporta il ranking globale AHP-A delle 5 alternative di livello gerarchico 4, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2 operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking	Alternative	Rating ideale AHP-A
1	ID_4	0,872
2	ID_1	0,466
3	ID_5	0,234
4	ID_2	0,203
5	ID_3	0,203

Tabella 2-65 Rating e ranking globale AHP-A delle alternative sui criteri

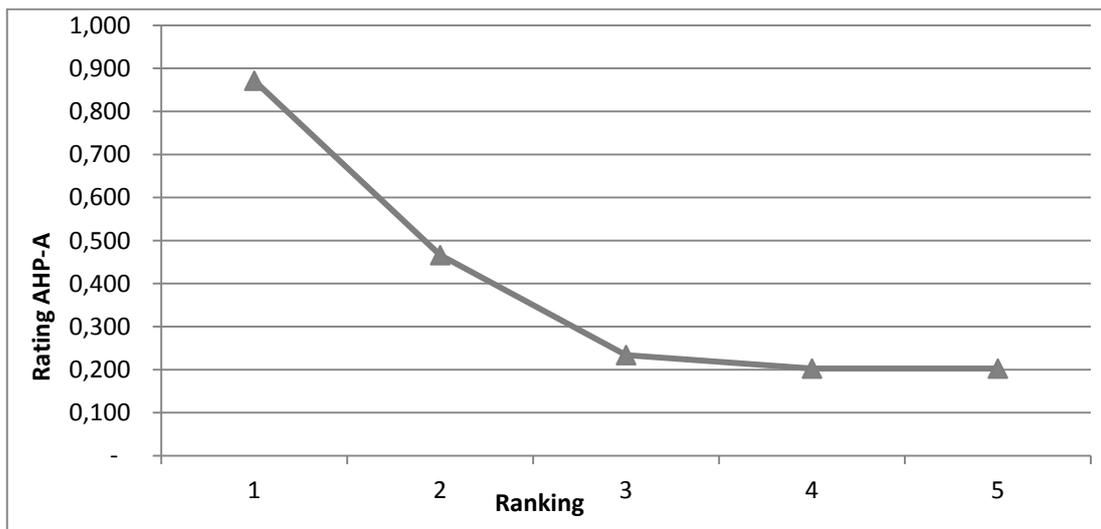


Figura 2-31 Rating e ranking globale AHP-A delle alternative sui criteri

2.5 Fondamenti di AHP

L'Analytic Hierarchy Process fornisce il supporto matematico necessario per l'elaborazione delle preferenze, inevitabilmente soggettive, di un decisore o di un gruppo di decisori in un contesto di MCDA. L'AHP realizza gerarchie e confronti a coppie di criteri ed alternative con riferimento all'elemento gerarchico sovra ordinato al fine di derivare scale di rapporto successivamente sintetizzate sull'intera struttura per la scelta dell'alternativa migliore.

Solitamente i criteri sono valutati su scale diverse, quantitative ma anche qualitative; misure su scale diverse non possono ovviamente essere direttamente associate. Mediante l'AHP le priorità sono anzitutto derivate per i criteri in termini di importanza per il raggiungimento dell'obiettivo generale del processo decisionale; successivamente le priorità sono derivate per le alternative nell'ambito di ciascun criterio. Infine, una somma pesata consente di ottenere le priorità generali per le alternative con riferimento all'obiettivo di MCDA. Con l'AHP un problema di scala multidimensionale è quindi trasformato in un problema di scala unidimensionale. L'AHP evidenzia due modalità di ranking di potenziali azioni o alternative:

- AHP-R o modalità relativa, scaturente da confronti a coppie;
- AHP-A o modalità assoluta scaturente da confronti con standard di riferimento.

L'Analytic Hierarchy Process si fonda su sette concetti base:

1. scale di rapporto derivanti da confronti a coppie;
2. origine psico-fisica della scala fondamentale;
3. consistenza della matrice di confronto a coppie e sensitività dell'autovettore principale;
4. omogeneità e clustering per l'estensione della scala fondamentale;
5. sintesi delle priorità;
6. conservazione ed inversione del rango;

7. decision making individuale e di gruppo.

2.5.1 Scale di rapporto derivanti da reciproci confronti a coppie

Un rapporto è il valore relativo o quoziente $\frac{a}{b}$ di due quantità a e b dello stesso tipo; un rapporto si definisce commensurato se è un numero razionale altrimenti è detto incommensurato. La condizione di uguaglianza tra due rapporti $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ definisce il concetto di proporzionalità.

Una scala di rapporto è un insieme di numeri invariante per trasformazione di similarità derivanti dal prodotto per una costante positiva; si possono utilizzare unità di misura differenti, quali libbre o kilogrammi, per misurare la massa, ma il rapporto tra la massa di due oggetti è uguale in entrambe le scale. Un'estensione naturale di questo concetto è inerente la possibilità di standardizzare tramite *normalizzazione*. In generale, se la lettura su una scala di rapporto è aw_i^* , $i = 1,2 \dots n$, la forma standard della lettura è $w_i = \frac{aw_i^*}{aw_i^*} = \frac{w_i^*}{w_i^*}$, a seguito della quale si ha $w_i = 1$, $i = 1,2 \dots n$; tale operazione è detta normalizzazione e w_i , $i = 1,2 \dots n$ è detto normalizzato. L'operazione di normalizzazione consente quindi di operare anche in assenza di unità di misura poiché fa uso di una *scala assoluta* di *numeri dominanza*. Una scala assoluta è invariante per trasformazione identità, priva di punto zero ed unità di misura. Il rapporto tra due numeri in scala di rapporto è un numero di dominanza su scala assoluta.

La scala fondamentale utilizzata in AHP, riportata in Tabella 2-1, è una scala assoluta di numeri di dominanza originati dai confronti a coppie al fine di stabilire la dominanza di un elemento sugli altri con riferimento ad un attributo gerarchicamente sovraordinato. Nella matrice di confronto a coppie di cui alla Equazione 2-8, anziché assegnare due numeri in scala di rapporto w_i e w_j , nel caso in specie non noti, si assegna un numero di dominanza a_{ij} in scala assoluta, ovverosia il numero intero che meglio approssima il rapporto $\frac{w_i}{w_j}$.

È una scala assoluta di numeri relativi, priva di punto zero ed unità di misura, la scala derivata ottenuta risolvendo il sistema omogeneo di equazioni lineari di cui alla Equazione 2-10 ovvero sia alla seguente relazione:

Equazione 2-13

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j = \lambda_{max} w_i$$

La soluzione dell'equazione sopra esposta rappresenta l'autovettore di cui alla Equazione 2-5 associato all'autovalore massimo λ_{max} e normalizzato come segue:

Equazione 2-14

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

I numeri relativi in scala assoluta possono essere oggetto di somme di prodotto necessarie per la sintesi gerarchica delle priorità.

2.5.2 Origine psico-fisica della scala fondamentale

La scala fondamentale di Tabella 2-1 Scala fondamentale di Saaty

è utilizzata per assegnare, tramite giudizi scaturenti da confronti a coppie, il numero di dominanza in scala assoluta a_{ij} che meglio approssima la dominanza dell'elemento i sull'elemento j con riferimento ad un attributo comune di livello gerarchico superiore. Nei giudizi di dominanza l'elemento più piccolo è considerato *unità di riferimento* per l'espressione della dominanza di tutti gli altri elementi; in siffatti giudizi il termine *dominanza* è sinonimo di *importanza* ma può anche inteso come probabilità di successo.

Il confronto a coppie si opera tra elementi appartenenti ad un insieme omogeneo, ovvero sia la dominanza dell'elemento più importante rispetto all'elemento unità non deve essere superiore al valore massimo della scala fondamentale; se ve ne fosse necessità si potrebbero realizzare gruppi omogenei da trattare utilizzando la stessa scala fondamentale integrata con valori decimali tra i livelli base.

La scala fondamentale utilizzata per esprimere giudizi nei confronti a coppie è derivata matematicamente dalla nota funzione logaritmica di risposta psico-fisica agli stimoli elaborata da Weber¹⁷ e Fechner¹⁸ (28). Nel 1846 Weber dimostrò che se un uomo tiene in mano oggetti con pesi differenti è in grado di distinguere tra un peso di 20 grammi e un peso di 21 grammi ma non tra un peso di 20 grammi e un peso di 20,5 grammi; può distinguere tra 40 grammi e 42 grammi ma non tra 40 grammi e 41 grammi e così via. Si ha quindi la necessità di aumentare uno stimolo s di un valore minimo Δs per raggiungere un livello per il quale i nostri sensi possono discriminare tra s e $s + \Delta s$. Δs si definisce *just noticeable difference* e si indica con l'acronimo JND. Il rapporto $r = \frac{\Delta s}{s}$ non dipende da s . La legge di Weber afferma che il cambiamento nella sensazione è notato quando lo stimolo è aumentato di un frazione costante dello stimolo stesso. La legge di Weber è verificata per valori di Δs modesti con riferimento ad s ed in pratica non può essere verificata per livelli bassi o alti di s . L'aggregazione o la decomposizione di stimoli in gruppi o livelli gerarchici rappresenta un modo efficace per estendere gli usi della legge di Weber.

Nel 1860 Fechner deriva una sequenza crescente di just noticeable stimoli a partire dallo stimolo s_0 :

Equazione 2-15

$$s_1 = s_0 + \Delta s_0 = s_0 + \frac{\Delta s_0}{s_0} s_0 = s_0(1 + r);$$

Equazione 2-16

$$s_2 = s_1 + \Delta s_1 = s_1(1 + r) = s_0(1 + r)^2 = s_0\alpha^2;$$

...

¹⁷ Ernst Heinrich Weber (Wittenberg, 24 giugno 1795 – Lipsia, 26 gennaio 1878) è stato un fisiologo e anatomista tedesco, universalmente conosciuto come il fondatore della psicologia sperimentale.

¹⁸ Gustav Theodor Fechner (Dr. Mises) (Groß Särchen, 19 aprile 1801 – Lipsia, 18 novembre 1887) è stato uno psicologo e statistico tedesco, fondatore della psicofisica.

Equazione 2-17

$$s_n = s_{n-1} + \Delta s_{n-1} = s_{n-1}(1 + r) = s_0(1 + r)^n = s_0\alpha^n, n = 0, 1, 2 \dots$$

Stimoli con JND si susseguono quindi in progressione geometrica. Fechner notò che le sensazioni o risposte corrispondenti a stimoli in progressione geometrica si susseguono invece aritmeticamente nei punti discreti nei quali si verificano le differenze notevoli e si ottengono risolvendo la Equazione 2-18:

Equazione 2-18

$$n = \frac{\log s_n - \log s_0}{\log \alpha};$$

Le sensazioni sono quindi funzioni lineari del logaritmo degli stimoli, quindi, denotando con M le sensazioni e con s gli stimoli, è possibile definire come segue la legge psico-fisica di Weber-Fechner:

Equazione 2-19

$$M = a \log s + b, a \neq 0;$$

Partendo dal presupposto per il quale uno stimolo deriva dal confronto a coppie di attività relativamente comparabili, ciò che interessa è una risposta numerica i cui valori sono espressi in forma di rapporti ovvero sia tale che l'Equazione 2-19 presenti $b = 0$; quindi dovrebbe aversi $\log s_0 = 0$ ovvero sia $s_0 = 1$ stimolo unità, $s_1 = s_0\alpha = \alpha$, $s_2 = s_0\alpha^2 = \alpha^2$ e così via. In siffatto contesto la risposta agli stimoli sarà del tipo:

Equazione 2-20

$$M_i = a \log \alpha^i, i = 1, 2, \dots, n$$

Ovverosia:

Equazione 2-21

$$M_1 = a \log \alpha;$$

Equazione 2-22

$$M_2 = 2a \log \alpha;$$

...

Equazione 2-23

$$M_n = na \log \alpha;$$

Si può notare che lo stimolo derivante dal confronto a coppie aumenta geometricamente, la risposta allo stimolo aumenta aritmeticamente. Si noti che $M_0 = 0$ evidenzia l'assenza di risposta. Dividendo ogni risposta M_i per M_1 si ottiene la sequenza di numeri assoluti che costituisce la scala fondamentale 1 – 9 di Saaty. Per definire il valore massimo della scala si assume che, qualitativamente, l'uomo ha la capacità di classificare la risposta agli stimoli in tre livelli: alto, medio e basso; inoltre ha la capacità di affinare questa classificazione identificando altri tre livelli nell'ambito di ciascun livello già individuato ottenendo quindi i nove livelli della scala fondamentale.

2.5.3 Consistenza della matrice di confronto a coppie e sensitività dell'autovettore principale

La sensitività dell'autovettore principale ai giudizi espressi mediante i confronti a coppie limita il numero di elementi oggetto di confronto e ne richiede l'omogeneità. L'approssimazione al primo ordine della perturbazione ΔW relativa all'autovettore principale W e dovuta alla perturbazione ΔA relativa alla matrice consistente A è data dalla:

Equazione 2-24

$$\Delta W = \sum_{j=2}^n (V_j^t \Delta A W / (\lambda_{max} - \lambda_j) V_j^t W_j) W_j;$$

L'autovettore principale W non è sensibile alle perturbazioni relative alla matrice consistente A quando l'autovalore principale λ_{max} è separato dagli altri autovalori λ_j qui considerati distinti ed i prodotti $V_j^t W_j$ di autovettori dx e sx sono non elevati in valore. Gli autovettori non principali non devono essere positivi in tutte le loro componenti e possono essere complessi. Si può dimostrare che i prodotti $V_j^t W_j$ sono dello stesso ordine e che $V^t W$, prodotto degli autovettori principali dx e sx normalizzati, è uguale ad n . Se n è non elevato e gli elementi comparati sono

omogenei, nessuna delle componenti di W e V^t sarà non elevata in valore; pertanto il loro prodotto sarà elevato quindi l'autovettore principale W non risulterà sensibile alle perturbazioni relative alla matrice consistente A .

Al fine di stabilire il valore ottimale di n è necessario mettere in relazione tra loro i concetti di consistenza di giudizio e di autovalore massimo della matrice dei confronti a coppie.

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice reciproca e positiva di dimensioni $n \times n$ tale che $a_{ij} = 1/a_{ji} \forall i, j, i, j = 1, 2, \dots, n$. Sia $W = (w_i)$ l'autovettore dx associato all'autovalore massimo della matrice A . Sia $D = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_n)$ una matrice diagonale di dimensioni $n \times n$ avente sulla diagonale principale il vettore W . Sia $E \equiv D^{-1}AD = (a_{ij} \frac{w_j}{w_i}) = \varepsilon_{ij}$. Allora la matrice E è simile ad A e sarà reciproca e positiva finché $\varepsilon_{ji} = a_{ji} \frac{w_i}{w_j} = (a_{ij} \frac{w_j}{w_i})^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_{ij}}$. Inoltre tutte le somme di riga su E equivalgono all'autovalore massimo della matrice A :

Equazione 2-25

$$\sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{w_j}{w_i} = \frac{(AW)_i}{w_i} = \lambda_{max} \frac{w_i}{w_i} = \lambda_{max}$$

Dalla relazione:

Equazione 2-26

$$\begin{aligned} n\lambda_{max} &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ii} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}) \\ &= n + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^{-1}) \\ &\geq n + 2 \frac{(n^2 - n)}{2} \end{aligned}$$

$$= n^2$$

Si ha che:

Equazione 2-27

$$\lambda_{max} \geq n.$$

Inoltre, finché $\frac{(x+1)}{x} \geq 2$ per tutte le $x > 0$, si ha uguaglianza se e solo se $x = 1$; si ha che $\lambda_{max} = n$ se e solo se $\varepsilon_{ij} = 1$ ovvero $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$.

A seguire si dimostra che una matrice reciproca e positiva A è consistente se e solo se $\lambda_{max} = n$. L'indice di consistenza μ è una misura la deviazione di A dalla condizione di consistenza:

Equazione 2-28

$$\mu = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

$\mu \geq 0$ e $\mu = 0$ se e solo se A è consistente. Quindi $\mu \rightarrow 0$ se $a_{ij} \rightarrow \frac{w_i}{w_j}$ ovvero $a_{ij} \frac{w_i}{w_j} \rightarrow 1$. Tali condizioni motivano la presenza del termine n a numeratore della formula per il calcolo dell'indice di consistenza, a seguire le ragioni per le quali è presente il termine $n - 1$ a denominatore della stessa. Poiché $Tr(A) = n$ rappresenta la somma di tutti gli autovalori della matrice A ; se indichiamo con $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ tutti gli autovalori di A diversi da λ_{max} , si può notare che $n = \lambda_{max} + \sum_{i=2}^n \lambda_i$ ovvero $\lambda_{max} = n - \sum_{i=2}^n \lambda_i$ quindi $\mu = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \lambda_i$ rappresenta la media degli autovalori di A diversi da λ_{max} .

2.5.4 Omogeneità e clustering per l'estensione della scala fondamentale

I concetti di omogeneità e clustering sono utilizzati in AHP per l'estensione graduale della scala fondamentale da $[1 - 9]$ a $[1 - \infty[$. La scala fondamentale è tale da non consentire confronti diretti ove per situazioni contingenti la stessa non copre l'intervallo reale di variazione di magnitudo: si pensi alla necessità di confrontare le

altezze di una casa piano terra e di un grattacielo di novanta piani. È tuttavia possibile operare a tappe, confrontando oggetti di magnitudo omogenea *clusterizzati* incrementando gradualmente la magnitudo fino al raggiungimento della massima magnitudo da valutare. Utilizzando la scala fondamentale la casa piano terra potrebbe essere confrontata in un primo cluster di elementi omogenei con un palazzo di tre piani ed un palazzo di nove piani; si otterrebbe un autovettore tridimensionale il cui ultimo elemento, peso del palazzo di nove piani, diverrebbe riferimento unitario per il cluster successivo costituito dal palazzo di nove piani, da un grattacielo di trenta piani e dal grattacielo di novanta piani di magnitudo massima; anche in questo secondo caso si otterrebbe un autovettore tridimensionale il cui ultimo elemento rappresenterebbe il peso del palazzo di novanta piani. Il prodotto dei rapporti tra il massimo ed il minimo peso di ogni cluster costituirà la magnitudo massima della scala fondamentale estesa.

2.5.5 Sintesi delle priorità

Sia H una gerarchia completa a h livelli. Sia B_k la matrice di confronto a coppie relativa al k –esimo livello con $k = 2, \dots, h$. Se W' è il vettore priorità del p –esimo livello, allora il vettore priorità W_q del q –esimo livello con $p < q$, è dato dalla seguente:

Equazione 2-29

$$W_q = B_q B_{q-1} \dots B_{p+1} W'$$

Il vettore priorità W_h del h –esimo livello ovverosia il livello più basso con riferimento all'obiettivo è dato dalla seguente:

Equazione 2-30

$$W_h = B_h B_{h-1} \dots B_2 W'$$

In generale si ha $W' = 1$. La sensitività dei livelli gerarchici inferiori alla modifica dei pesi nei livelli gerarchici superiori è oggetto di applicazioni multilineari.

Il processo di confronto degli elementi di un livello con riferimento ad un elemento sovra ordinato si applica a tutti i livelli, indipendentemente dalla presenza o

meno di una scala fisica: eventuali misure in scala fisica potrebbero infatti non riflettere l'importanza relativa degli elementi a confronto tra di loro con riferimento ad un elemento sovra ordinato (29).

I vettori priorità relativi a criteri o sub-criteri appartenenti al medesimo livello gerarchico ed aventi uguali unità di misura possono essere oggetto di sintesi additiva o moltiplicativa. La sintesi additiva estrapola un unico criterio o sub-criterio ricavato dalla somma dei valori delle alternative realizzabile per uguaglianza delle unità di misura dei criteri in esame; la sintesi moltiplicativa valuta le alternative con riferimento a criteri o sub-criteri distinti pur avendo la medesima unità di misura (30).

2.5.6 Conservazione ed inversione del rango

Data l'ipotesi di alternative completamente indipendenti l'una dall'altra, in un processo decisionale è necessario analizzare il problema dell'inversione di rango a seguito dell'aggiunta o dell'eliminazione di criteri o alternative. I fattori strutturali ovverosia i numeri che scaturiscono dalla misura delle alternative influenzano sempre l'importanza dei criteri. Quando le priorità dei criteri sono determinate in termini di criteri di più alto livello o di obiettivo della valutazione, l'importanza funzionale dei criteri è legata ai fattori strutturali delle alternative ovverosia dalla misura delle alternative. Se le alternative sono misurate su una scala diversa per ogni criterio, la normalizzazione rappresenta lo strumento per aggiornare l'importanza dei criteri in termini di fattori strutturali delle alternative. Poiché le priorità delle alternative sono ponderate con le priorità dei criteri che dipendono dalle alternative, la classifica generale dipenderà dalla misura e dal numero di tutte le alternative. Per preservare sempre il rango, le priorità dei criteri non dovrebbero dipendere dalla misura e dal numero delle alternative ma solo dall'importanza funzionale dei criteri rispetto al livello obiettivo.

Un modo per preservare il rango è rappresentato dalla valutazione *one at time* delle alternative; in AHP tale valutazione avviene tramite confronti assoluti delle alternative rispetto ad un set completo di intensità comprese nell'intervallo $[0 - 1]$.

Un'ulteriore tecnica di preservazione del rango nelle misurazioni relative è rappresentata dall'utilizzo di un'alternativa *ideale* al di sotto di ogni criterio anche se simulazioni hanno dimostrato differenze poco significative tra le due modalità di sintesi *distributiva* e *ideale*. In modalità distributiva l'AHP opera il ranking delle alternative tramite normalizzazione: al di sotto di ogni criterio il rating della singola alternativa è diviso per la somma dei rating di tutte le alternative; l'aggiunta o l'eliminazione di un'alternativa possono determinare una modifica del ranking. In modalità ideale l'AHP opera il ranking delle alternative tramite benchmarking: al di sotto di ogni criterio il rating della singola alternativa è diviso per il rating della migliore alternativa; il rating della singola alternativa è pertanto indipendente dal rating delle altre alternative eccetto la migliore (31).

La modalità distributiva dovrebbe essere utilizzata quando il decisore è interessato a valutare quanto un'alternativa domina le altre al di sotto di ogni criterio. La modalità ideale dovrebbe essere utilizzata quando il decision maker è interessato a valutare quanto un'alternativa si avvicina all'alternativa migliore o benchmark, al di sotto di ogni criterio (32).

2.5.6.1 Aggregare giudizi individuali

La funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di sintesi degli n giudizi forniti da n esperti soddisfa le seguenti condizioni:

- condizione di separabilità (S): $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n)$ per tutte le $x \in P$; le influenze dei giudizi individuali possono essere separate come sopra evidenziato;
- condizione di unanimità (U): $f(x, x, \dots, x) = x$ per tutte le $x \in P$; se tutti gli esperti forniscono il medesimo giudizio x allora tale giudizio costituirà anche giudizio di sintesi;
- condizione di omogeneità (H): $f(ux_1, ux_2, \dots, ux_n) = uf(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u > 0, u \in P, x_k \in P, k = 1, 2, \dots, n$; in giudizi di rapporto, se tutti gli

esperti giudicano un rapporto u volte più grande di un altro, tale deve essere anche il giudizio di sintesi;

- condizione di potenza (P_p): $f(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p) = f^p(x_1, x_2, \dots, x_n)$; in giudizi di rapporto, se tutti gli esperti giudicano un rapporto come potenza p – esima di un altro, tale deve essere anche il giudizio di sintesi;
- condizione di reciprocità (R): $f\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$; in giudizi di rapporto, se tutti gli esperti giudicano un rapporto inverso rispetto ad un altro, tale deve essere anche il giudizio di sintesi.

In generale funzioni di sintesi separabili soddisfacenti la condizione di unanimità ed omogeneità sono la media geometrica e la radice di media di potenze. Se la condizione di reciprocità è verificata per una n – upla (x_1, x_2, \dots, x_n) di giudizi individuali differenti, allora solo la media geometrica soddisfa tutte le condizioni di cui sopra.

Poiché in un consesso decisionale potrebbe rivelarsi utile differenziare il peso dei giudizi degli esperti, la condizione di separabilità può essere trasformata in condizione di separabilità pesata (WS) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n)$. Le diverse influenze si riflettono quindi nelle diverse funzioni $g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n)$.

Godono delle condizioni di separabilità pesata, unanimità ed omogeneità le funzioni:

- media geometrica pesata: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{q_1}, x_2^{q_2}, \dots, x_n^{q_n}$.
- radice di media di potenze pesata: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[q_1 + q_2 + \dots + q_n]{q_1 x_1^{q_1} + q_2 x_2^{q_2} + \dots + q_n x_n^{q_n}}$, $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1, q_k > 0, k = 1, 2, \dots, n, \gamma > 0$.

Se $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$ $i = 1, 2, \dots, m$ rappresentano m ranking di n alternative, operati da m esperti indipendenti, se a_i rappresenta il peso dell'esperto i –

esimo, $\sum_{i=1}^m a_i = 1$, allora: $(\prod_{i=1}^m x_1^{a_i}, \dots, \prod_{i=1}^m x_n^{a_i})$ rappresenta il rango combinato degli m esperti relativo alle n alternative. La potenza o priorità del giudizio i – esimo è quindi vista come una replica del giudizio medesimo ovvero il prodotto del giudizio o per se stesso operato a_i volte (33).

Dato un gruppo di esperti, un insieme di alternative e scale ordinali individuali di preferenza per le alternative, è impossibile costruire una funzione di scelta in grado di aggregare le preferenze individuali e tale da soddisfare le seguenti quattro condizioni:

- risolutezza: la procedura di aggregazione deve generalmente produrre un ordine di gruppo;
- unanimità: se tutti gli esperti preferiscono l'alternativa A all'alternativa B , la procedura di aggregazione deve produrre un ordine di gruppo tale da preferire A a B ;
- indipendenza delle alternative irrilevanti: dati due insiemi di alternative che includono entrambi le alternative A e B , se tutti gli esperti preferiscono A a B in entrambi gli insiemi, la procedura di aggregazione produrrà un ordine di gruppo dove A sarà preferito a B in ognuno dei due insiemi di alternative.
- nessun dittatore: singoli esperti non possono stabilire l'ordine di gruppo.

Utilizzando l'approccio AHP ovvero un approccio guidato da scale di rapporto, si può dimostrare che avendo a che fare con preferenze individuali cardinali anziché ordinali, è possibile operare una scelta razionale associata che soddisfa le quattro condizioni sopra esposte poiché:

- le scale di priorità individuali possono sempre essere derivate da una serie di coppie di giudizi di preferenza cardinali se questi consentono almeno un *minimum spanning tree* nel grafo completamente connesso degli elementi messi a confronto;

- i giudizi di preferenza cardinali associati con un gruppo di scelta appartengono ad una scala di rapporto che rappresenta l'intensità relativa delle preferenze di gruppo.

2.6 Assiomi di AHP

Sia \mathfrak{A} un insieme finito di n elementi definiti alternative. Sia \mathfrak{C} un insieme finito di proprietà o attributi rispetto ai quali gli elementi di \mathfrak{A} sono comparati. Una proprietà è una caratteristica che un'entità possiede pur essendo questa ignorata da terzi; un attributo è una caratteristica assegnata da terzi ad un'entità ovvero sia un concetto. A seguire i termini proprietà ed attributo saranno considerati sinonimi e più in generale definiti criteri; il criterio è un concetto primitivo (34).

Quando due elementi in \mathfrak{A} sono comparati con riferimento al criterio $C \in \mathfrak{C}$, si realizza una comparazione binaria. Sia $>_C$ una relazione binaria su \mathfrak{A} di preferenza o dominanza con riferimento al criterio $C \in \mathfrak{C}$. Sia \sim_C una relazione binaria su \mathfrak{A} di indifferenza con riferimento al criterio $C \in \mathfrak{C}$. Dati due elementi $A_i, A_j \in \mathfrak{A}$ si può avere: $A_i >_C A_j, A_j >_C A_i, A_i \sim_C A_j \forall C \in \mathfrak{C}$. La famiglia di relazioni binarie $>_C$ rispetto al criterio $C \in \mathfrak{C}$ è un concetto primitivo.

Sia \mathfrak{P} un insieme di funzioni definite in $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ con valore in \mathbb{R}^+ . Sia $f: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{P}$. Sia $P_c \in f(C) \forall C \in \mathfrak{C}$. P_c assegna un numero reale positivo ad ogni coppia $(A_i, A_j) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$. Sia $\frac{P_c(A_i, A_j)}{a_{i,j}} \in \mathbb{R}^+, A_i, A_j \in \mathfrak{A}. \forall C \in \mathfrak{C}$ la tripletta $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}, \mathbb{R}^+, P_c)$ è una *scala fondamentale o primitiva* in grado di mappare oggetti in un sistema numerico.

Per tutti i $A_i, A_j \in \mathfrak{A}, C \in \mathfrak{C}$ si ha che:

$A_i >_C A_j$ se e solo se $P_c(A_i, A_j) > 1$;

$A_i \sim_C A_j$ se e solo se $P_c(A_i, A_j) = 1$;

Se $A_i >_C A_j$ allora A_i domina A_j con riferimento al criterio $C \in \mathfrak{C}$ e P_c rappresenta l'intensità di dominanza di un'alternativa sull'altra.

2.6.1 Assioma di reciprocità

Per tutti i $A_i, A_j \in \mathfrak{A}, C \in \mathfrak{C}$ si ha che:

Equazione 2-31

$$P_c(A_i, A_j) = \frac{1}{A_j, A_i}$$

Quando di operano dei confronti a coppie è ovviamente necessario considerare entrambi gli elementi della coppia da confrontare; l'elemento non dominate è utilizzato come unità di confronti con riferimento al criterio in esame; l'elemento dominate è quindi stimato come multiplo, non necessariamente intero, dell'unità.

Sia $A = \frac{a_{i,j}}{P_c(A_i, A_j)}$ un insieme di confronti a coppie tra alternative con riferimento al criterio $C \in \mathfrak{C}$. Per l'Equazione 2-31 si ha che la matrice A risulta essere reciproca e positiva. Lo scopo è ottenere una scala di dominanza relativa, ovverosia un rank order delle alternative, a partire dai confronti a coppie in A ; quanto segue produce il risultato sperato.

Sia $R_{M(n)}$ un insieme di matrici reciproche e positive di dimensione $n \times n$ definite come $A = \frac{a_{i,j}}{P_c(A_i, A_j)} \forall C \in \mathfrak{C}$. Sia $[0,1]^n$ l' n -esimo prodotto cartesiano di $[0,1]$ e $\Psi(A): R_{M(n)} \rightarrow [0,1]^n, A \in R_{M(n)}$, $\Psi(A)$ è un vettore di dimensione n compreso nell'intervallo $[0,1]$. La tripletta $(R_{M(n)}, [0,1]^n, \Psi)$ rappresenta una scala derivata ovverosia una mappatura di due sistemi numerici relazionali.

Il rank order che scaturisce dalla scala derivata può non coincidere con l'ordine rappresentato dai confronti a coppie. Se $\Psi_i(A)$ è la componente i -esima di $\Psi(A)$ essa denota la dominanza relativa dell'alternativa i -esima. Per definizione, $A_i, A_j \in \mathfrak{A}, A_i >_C A_j$ implica $P_c(A_i, A_j) > 1$. Tuttavia, se $P_c(A_i, A_j) > 1$, la scala derivata potrebbe implicare che $\Psi_j(A) > \Psi_i(A)$; ciò potrebbe accadere se per $A_i, A_j \in \mathfrak{A}, C \in \mathfrak{C}$ la relazione $P_c(A_i, A_j) \geq P_c(A_j, A_k)$ non è valida per tutte le

$A_k \in \mathfrak{A}$. Ovverosia può accadere che $P_c(A_i, A_j) > 1$ e per qualche $A_k \in \mathfrak{A}$ avere $P_c(A_i, A_k) < P_c(A_j, A_k)$.

La mappatura P_c è detta consistente se e solo se $P_c(A_i, A_j)P_c(A_j, A_k) = P_c(A_i, A_k) \forall i, j, k$. Quindi la matrice A è detta consistente se e solo se $a_{i,j}a_{j,k} = a_{i,k} \forall i, j, k$. Se P_c è consistente allora è verificata l'Equazione 2-31 ed il rank order che scaturisce dalla scala derivata coincide con l'ordine rappresentato dai confronti a coppie.

L'assioma "comportamentale" di indipendenza, in base al quale tutte le alternative in \mathfrak{A} sono indipendenti, garantisce il precedente assioma di reciprocità, ma non vale il viceversa. Due alternative $A_i, A_j \in \mathfrak{A}$ sono mutualmente indipendenti con riferimento al criterio $C \in \mathfrak{C}$ se e solo se $\forall A_k$ il confronto a coppie della componente $\{A_i, A_j\}$ rispetto A_k soddisfa le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} P_c(\{A_i, A_j\}, A_k) &= P_c(A_i, A_k)P_c(A_j, A_k) \\ P_c(A_k, \{A_i, A_j\}) &= P_c(A_k, A_i)P_c(A_k, A_j) \end{aligned}$$

2.6.2 Assiomi di gerarchia

Un insieme parzialmente ordinato è un insieme S con una relazione binaria \leq che soddisfa le seguenti condizioni:

riflessività. $\forall x \in S, x \leq x$;

transitività. $\forall x, y, z \in S$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$;

antisimmetria. $\forall x, y \in S$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$.

Per ogni relazione $x \leq y$ si definisce $x < y$ per rappresentare che $x \leq y$ e $x \neq y$. y copre o domina x se $x < y$ e $x < t < y$ è possibile per nessuna t .

Gli insiemi parzialmente ordinati con un numero finito di elementi possono essere rappresentati tramite grafi orientati nei quali i nodi rappresentano gli elementi e gli archi le relazioni di dominanza relativa.

Un sottoinsieme E di un insieme parzialmente ordinato S è detto limitato da sopra (sotto) se c'è un elemento $s \in S$ tale che $x \leq s$ ($x \geq s$) $\forall x \in E$. L'elemento $s \in S$ è chiamato limite superiore (inferiore) di E . E ha un estremo superiore (inferiore) se presenta limiti superiori (inferiori) e se il set di limiti superiori U (inferiori L) conta un elemento u_1 (l_1) tale che $u_1 < u, \forall u \in U$ ($l_1 < l, \forall l \in L$).

Sia \mathfrak{B} un insieme finito parzialmente ordinato. Sia $b \in \mathfrak{B}$ il più grande elemento in \mathfrak{B} . L'insieme \mathfrak{B} è una gerarchia se soddisfa le seguenti condizioni:

- \exists una partizione di \mathfrak{B} in set chiamati livelli $\{L_k, k = 1, 2, \dots, h\}$, con $L_1 = b$;
- $x \in L_k$ implica $x^- \subseteq L_{k+1}$ dove $x^- = \{y | x \text{ domina } y\}$, $k = 1, 2, \dots, h - 1$;
- $x \in L_k$ implica $x^+ \subseteq L_{k-1}$ dove $x^+ = \{y | y \text{ domina } x\}$, $k = 2, 3, \dots, h$.

Dato un numero reale positivo $\rho > 0$, un insieme non vuoto $x^- \subseteq L_{k+1}$ è detto ρ -omogeneo con riferimento a $x \in L_k$ se per ogni coppia di elementi $y_1, y_2 \in x^-$, $\frac{1}{\rho} \leq P_c(y_1, y_2) \leq \rho$. In particolare l'assioma di reciprocità implica che $P_c(y_i, y_i) = 1$.

L'assioma di omogeneità stabilisce che data una gerarchia \mathfrak{B} , $x \in \mathfrak{B}$, $x \in L_k$, $x^- \subseteq L_{k+1}$ è ρ -omogeneo per $k = 1, 2, \dots, h - 1$.

L'omogeneità è fondamentale nei confronti a coppie; la difficoltà dovuta a differenze sostanziali in termini di magnitudo può essere superata facendo ricorso al concetto di clusterizzazione. Le nozioni di scala fondamentale e derivata possono essere estese a $x \in \mathfrak{B}$, $x \in L_k$, $x^- \subseteq L_{k+1}$ sostituendo rispettivamente \mathfrak{C} ed \mathfrak{A} . La scala derivata risultante dal confronto tra gli elementi in x^- con gli elementi in x è detta *scala locale derivata* o *vettore priorità locali*. Dati $L_k, L_{k+1} \subseteq \mathfrak{B}$ si denota con $\Psi_{k+1}(y|x)$, $k = 2, 3, \dots, h - 1$ la scala locale derivata per $y \in x^-$, $x \in L_k$, inoltre $\sum_{y \in x^-} \Psi_{k+1}(y|x) = 1$. Si consideri la matrice $\Psi_k(L_k|L_{k-1})$ le cui colonne rappresentano scale derivate di elementi in L_k con riferimento agli elementi in L_{k-1} .

Un insieme \mathfrak{A} è definito esterno dipendente da un insieme \mathfrak{C} se una scala fondamentale può essere definita con riferimento ad ogni $C \in \mathfrak{C}$. La clusterizzazione implica il contenimento di elementi in elementi di più grandi dimensioni o cluster a loro volta contenuti in una gerarchia con a capo un obiettivo. Sia \mathfrak{A} un insieme esterno dipendente da un insieme \mathfrak{C} . Gli elementi di \mathfrak{A} sono detti interni indipendenti rispetto a $C \in \mathfrak{C}$ se per qualche $A \in \mathfrak{A}$, \mathfrak{A} è esterno dipendente su A .

L'assioma di dipendenza stabilisce che data una gerarchia \mathfrak{A} con livelli L_1, L_2, \dots, L_h . $\forall L_k, k = 1, 2, \dots, h - 1$:

- L_{k+1} è esterno dipendente su $\forall L_k$;
- L_k non è esterno dipendente su L_{k+1} ;
- L_{k+1} non è interno dipendente con riferimento ad ogni $x \in L_k$.

2.6.3 Principio di composizione gerarchica

La sussistenza dell'assioma di dipendenza garantisce l'ottenimento della scala globale derivata o rank order di ogni elemento in \mathfrak{A} dal vettore:

$$\Psi_1(b) = 1$$

$$\Psi_2(L_2) = \Psi_2(b^-|b)$$

⋮

$$\Psi_k(L_k) = \Psi_k(L_k|L_{k-1}), \Psi_{k-1}(L_{k-1}), k = 3, 4, \dots, h.$$

La non sussistenza dell'assioma di dipendenza non consentirebbe l'applicazione del principio di composizione gerarchica a causa della dipendenza esterna e interna tra livelli o componenti che non necessiterebbero di una gerarchia.

Sia \mathfrak{B} una famiglia di insiemi non vuoti $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$ dove \mathfrak{C}_i consta degli elementi $\{e_{i,j}, j = 1, 2, \dots, m_i\}, i = 1, 2, \dots, n$. \mathfrak{B} è un sistema se è anche un grafo orientato con vertici \mathfrak{C}_i ed archi definiti tramite i concetti di dipendenza esterna. Quindi, date due componenti $\mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j \in \mathfrak{B}$, esiste un arco da \mathfrak{C}_i a \mathfrak{C}_j se \mathfrak{C}_i è esterno dipendente da \mathfrak{C}_j .

L'assioma di sistema afferma che dato un sistema \mathfrak{B} di sottoinsiemi non vuoti $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$. Per ogni \mathfrak{C}_i esiste qualche \mathfrak{C}_j tale che \mathfrak{C}_i è esterno dipendente da \mathfrak{C}_j , \mathfrak{C}_j è esterno dipendente da \mathfrak{C}_i o entrambi. L'esterna dipendenza di \mathfrak{C}_i da \mathfrak{C}_j equivale alla dipendenza interna in una gerarchia.

2.7 Criticità in AHP

In letteratura sono stati evidenziati alcuni fattori di criticità inerenti la metodologia AHP (35).

Il primo fattore di criticità è rappresentato dall'inversione del rango a seguito della modifica della struttura decisionale con l'aggiunta o l'eliminazione di criteri e/o alternative. L'inversione di rango è un problema che riguarda i confronti relativi paralleli ed è dovuto al concetto di normalizzazione. La realizzazione di confronti assoluti seriali con modalità di sintesi ideale può preservare il rango fatta eccezione per i casi di interdipendenza tra criteri e alternative in copia o "quasi copia".

Il secondo fattore di criticità è rappresentato dall'effetto dell'incoerenza di giudizio. A tal fine occorre precisare che è ammesso un livello di inconsistenza e quindi di intransitività tale da garantire la trattazione del problema senza incorrere in veti assiomatici. La non ammissibilità di inconsistenza riguarda il caso di ricorso al concetto di ottimo paretiano nell'aggregazione di giudizi individuali che può tuttavia operarsi senza ricorrere al concetto sopra esposto.

Il terzo fattore di criticità è connesso ai tentativi di preservare il rango, combinando i giudizi individuali tramite l'utilizzo del concetto di media geometrica per derivare priorità locali e successivamente del concetto di sintesi moltiplicativa ponderata per derivare le priorità globali. È stato dimostrato che tale procedura comporta effetti deleteri sulle priorità globali delle alternative.

Altri fattori di criticità per la metodologia AHP sono rappresentati dalla scala fondamentale che nel tempo ha subito numerose critiche e proposte di modifica, tuttavia non suffragate da evidenti miglioramenti nei risultati sperimentali, nonché

dalle basi assiomatiche spesso oggetto di discussione in letteratura circa capacità di razionali descrittori normativi della realtà decisionale.

3 Hybrid Analytic Hierarchy Process (H-AHP)

Il lavoro di ricerca in trattazione si concretizza nella definizione di procedure AHP “ibride” per confronti relativi in parallelo o assoluti in serie operati per il ranking di un numero definito o indefinito (s) di alternative.

Lo studio della metodologia *Hybrid Analytic Hierarchy Process* (H-AHP) trae origine dalla definizione di Saaty secondo la quale *un numero non ha alcun significato se non quello assegnato ad esso da chi è chiamato ad interpretarlo*. In presenza di letture su scala metrica, secondo Saaty, si può essere tutti d'accordo sul valore numerico della lettura ma non sul significato da attribuire alla stessa; la lettura è da ritenere quindi oggettiva a differenza dell'interpretazione della stessa da ritenere prevalentemente soggettiva. A partire dalle considerazioni sopra esposte Saaty afferma la necessità di stabilire priorità facendo uso di topologie d'ordine su scale assolute di dominanza contestando l'uso, comune nelle scienze fisiche, di scale di rapporto in topologia metrica al fine di classificare le priorità decisionali. Secondo Saaty entità intangibili, per definizione prive di scale di misura, ma anche entità tangibili valutabili in topologia metrica su idonee scale di misura, possono essere oggetto di confronti a coppie. Il confronto a coppie, ovverosia la misurazione dell'importanza relativa tra potenziali azioni o alternative secondo un criterio o punto di vista di livello superiore, consente la determinazione di una scala di priorità per entità oggetto di analisi.

Al fine di meglio comprendere i risvolti empirici del pensiero di Saaty è opportuno richiamare brevemente il concetto di *grandezza fisica*, ovverosia “La proprietà di un fenomeno, corpo o sostanza, che può essere espressa quantitativamente mediante un numero e un riferimento” (36). Grandezze fisiche e unità derivate del Sistema Internazionale di Unità di Misura (SI) si ricavano dal prodotto di grandezze fisiche e unità fondamentali che rendono il Sistema internazionale un *sistema coerente*.

In un contesto caratterizzato da grandezze fisiche espresse come da Sistema Internazionale, si può essere d'accordo con il pensiero di Saaty relativo all'interpretazione soggettiva della lettura oggettiva su scala fisica in topologia metrica ma il sopra citato concetto di interpretazione decade quando si realizzano misurazioni relative mediante confronti a coppie di letture oggettive su scala fisiche in topologia metrica.

Per la trattazione analitica dell'H-AHP, si considerino noti i pesi locali rappresentati dal vettore di W dell'Equazione 2-5. La pedissequa applicazione delle procedura di Saaty con sostituzione del vettore W nell'Equazione 2-8 darà origine al vettore W dei pesi locali normalizzato sull'unità secondo l'Equazione 2-14 ovverosia al rating distributivo; successivamente è possibile definire il rating ideale tramite benchmarking dividendo la singola componente del vettore W dei pesi locali normalizzato sull'unità per la componente massima del vettore medesimo.

Appare evidente che il vettore W dei pesi locali normalizzato sull'unità secondo l'Equazione 2-14, ovverosia il rating distributivo ed il successivo rating ideale, può ottenersi senza l'implementazione della procedura di Saaty per il calcolo dell'autovettore principale; in particolare: il calcolo del rating distributivo è possibile tramite normalizzazione sull'unità di tutte le letture su scala fisica in topologia metrica relative alle alternative oggetto di analisi; il calcolo del rating ideale è realizzabile dividendo il valore della lettura su scala fisica in topologia metrica della i -esima alternativa per il massimo valore di lettura su scala fisica in topologia metrica ravvisato tra le alternative in esame.

Con riferimento alla struttura gerarchica a 3 livelli di Figura 2-3 ed alle performance quali – quantitative di Tabella 2-3, confermando le performance quantitative nell'ambito dei criteri "A_Quant" e "C_Quant" e forzando le performance qualitative sui criteri "B_Qual" e "D_Qual" in performance quantitative in scala di rapporto [1 – 5], applicando la procedura sopra descritta per il calcolo del rating ideale delle 5 alternative di livello gerarchico 3, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2, si ottengono i valori riportati in Tabella 3-1.

Alternative	Rating ideale A_Quant	Rating ideale B_Qual	Rating ideale C_Quant	Rating ideale D_Qual
ID_1	0,7371	1,0000	0,3857	0,8000
ID_2	0,5302	0,6000	0,0782	0,6000
ID_3	0,4549	0,6000	0,2526	0,6000
ID_4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
ID_5	0,0057	0,8000	0,9985	0,2000

Tabella 3-1 Rating ideale NO-AHP delle alternative sui criteri

In Tabella 3-2 e Figura 3-1 si riporta il rating ideale globale NO-AHP delle 5 alternative di livello gerarchico 3, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2. Il rating ideale globale è ottenuto mediante *sintesi moltiplicativa* ossia mediante prodotto matriciale tra la matrice di dimensione 5×4 di Tabella 3-1 costituita da 4 vettori dei rating ideali delle 5 alternative ed il vettore di Tabella 2-10 di dimensione 4×1 del rating distributivo ovverosia dei pesi locali dei 4 criteri; si ottiene quindi il vettore di dimensione 5×1 di Tabella 3-2 del rating ideale globale delle 5 alternative.

Alternative	Rating NO AHP
ID_1	0,711
ID_2	0,459
ID_3	0,501
ID_4	1,000
ID_5	0,469

Tabella 3-2 Rating ideale globale NO-AHP delle alternative sui criteri

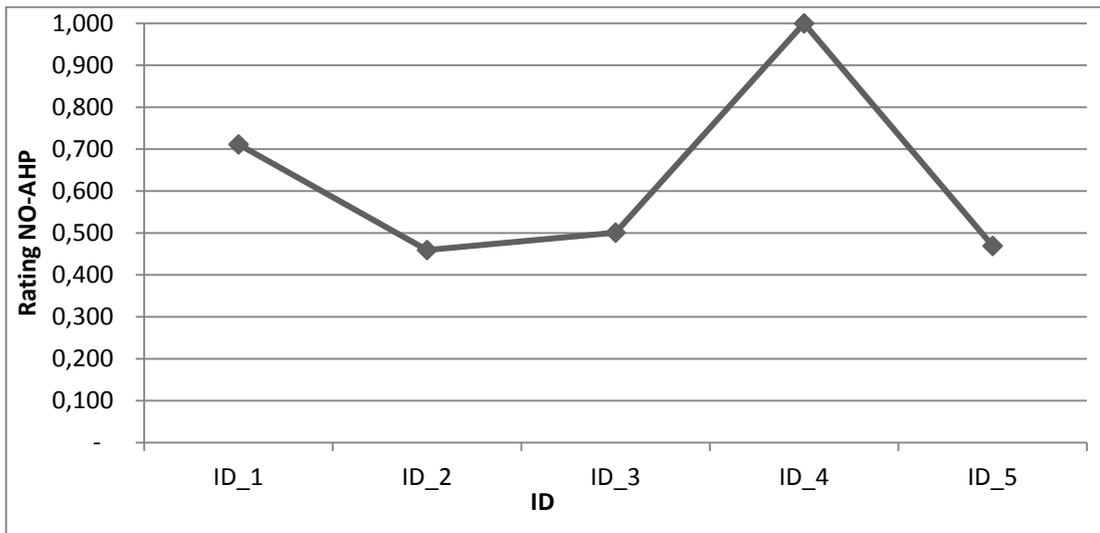


Figura 3-1 Rating ideale globale NO-AHP delle alternative sui criteri

In Tabella 3-3 e Figura 3-2 si riporta il ranking globale AHP-R delle 5 alternative di livello gerarchico 3, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2 operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking NO AHP	Alternative	Rating NO AHP
1	ID_4	1,000
2	ID_1	0,711
3	ID_3	0,501
4	ID_5	0,469
5	ID_2	0,459

Tabella 3-3 Rating e ranking globale NO-AHP delle alternative sui criteri

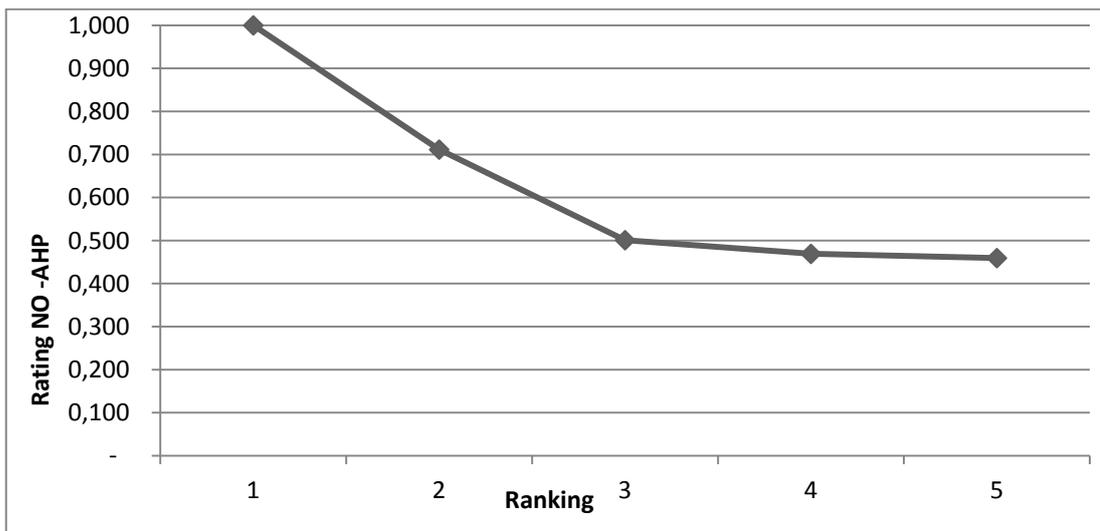


Figura 3-2 Rating e ranking globale NO-AHP delle alternative sui criteri

3.1 H-AHP-R per confronti relativi e ranking parallelo

Si analizza di seguito l'applicazione della metodologia H-AHP-R al fine di operare confronti relativi in parallelo ed il ranking di un numero definito di alternative.

La metodologia H-AHP-R è stata sviluppata combinando i risultati di rating ideale relativamente alle metodologie AHP-R e NO-AHP; in particolare, si utilizza il rating ideale ottenuto con metodologia AHP-R per i criteri qualitativi; si utilizza il rating ideale ottenuto con metodologia NO-AHP per i criteri quantitativi. Ciò consente al *decision analyst* di operare in modalità “lean” semplificando la procedura MCDA mediante calcolo diretto NO-AHP del rating ideale con riferimento ai criteri quantitativi e limitando l'uso della procedura AHP-R ai casi di criteri qualitativi per i quali la metodologia di Saaty appare efficacemente consolidata.

Alternative	Rating ideale A_Quant NO-AHP	Rating ideale B_Qual AHP-R	Rating ideale C_Quant NO-AHP	Rating ideale D_Qual AHP-R
ID_1	0,737	0,630	0,386	0,540
ID_2	0,530	0,135	0,078	0,218
ID_3	0,455	0,135	0,253	0,218
ID_4	1,000	1,000	1,000	1,000
ID_5	0,006	0,322	0,999	0,081

Tabella 3-4 Rating ideale H-AHP-R delle alternative sui criteri

In Tabella 3-5 e Figura 3-3 si riporta il rating ideale globale H-AHP-R delle 5 alternative di livello gerarchico 3, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2. Il rating ideale globale è ottenuto mediante *sintesi moltiplicativa* ossia mediante prodotto matriciale tra la matrice di dimensione 5×4 di Tabella 3-4 costituita da 4 vettori dei rating ideali delle 5 alternative ed il vettore di Tabella 2-10 di dimensione 4×1 del rating distributivo ovvero dei pesi locali dei 4 criteri; si ottiene quindi il vettore di dimensione 5×1 di Tabella 3-5 del rating ideale globale delle 5 alternative.

Alternative	Rating ideale H-AHP-R
ID_1	0,521

ID_2	0,189
ID_3	0,230
ID_4	1,000
ID_5	0,346

Tabella 3-5 Rating ideale globale H-AHP-R delle alternative sui criteri

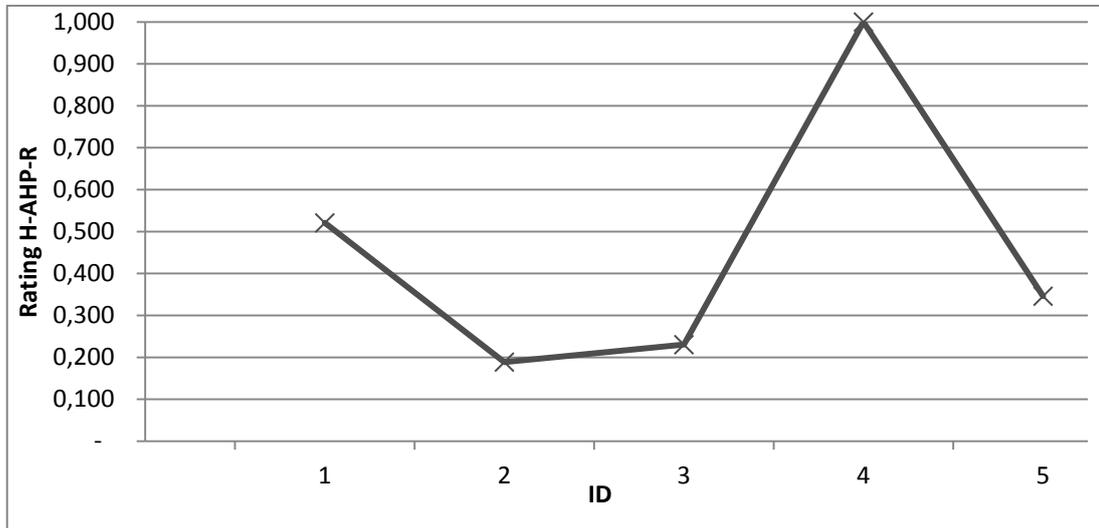


Figura 3-3 Rating ideale globale H-AHP-R delle alternative sui criteri

In Tabella 3-6 e Figura 3-4 si riporta il ranking globale H-AHP-R delle 5 alternative di livello gerarchico 3, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2 operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking	Alternative	Rating ideale H-AHP-R
1	ID_4	1,000
2	ID_1	0,521
3	ID_5	0,346
4	ID_3	0,230
5	ID_2	0,189

Tabella 3-6 Rating e ranking globale H-AHP-R delle alternative sui criteri

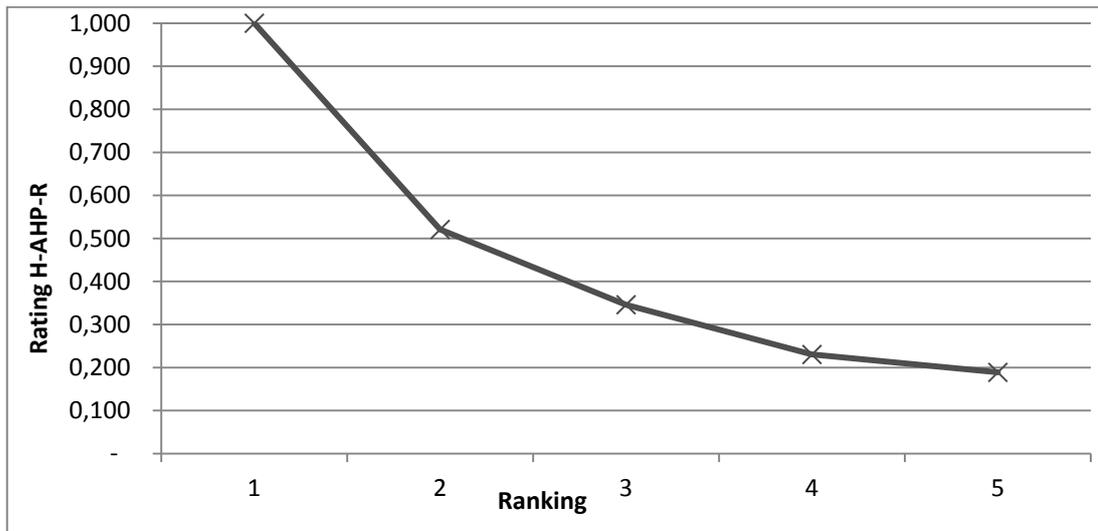


Figura 3-4 Rating e ranking globale H-AHP-R delle alternative sui criteri

3.2 H-AHP-A per confronti assoluti e ranking seriale

Segue l'applicazione della metodologia H-AHP-A finalizzata ad operare confronti assoluti in serie ed il ranking di un numero indefinito di alternative.

La metodologia H-AHP-A trae origine dalla combinazione dei risultati di rating ideale relativamente alle metodologie AHP-A e NO-AHP; in particolare, si utilizza il rating ideale ottenuto con metodologia AHP-A per i criteri qualitativi; si utilizza il rating ideale ottenuto con metodologia NO-AHP per i criteri quantitativi. La metodologia H-AHP-A consente al *decision analyst* di operare in modalità "lean" semplificando la procedura MCDA mediante calcolo diretto NO-AHP del rating ideale con riferimento ai criteri quantitativi e limitando l'uso della procedura AHP-A ai soli casi di criteri qualitativi.

Alternative	Rating ideale A_Quant NO-AHP	Rating ideale B_Qual AHP-A	Rating ideale C_Quant NO-AHP	Rating ideale D_Qual AHP-A
ID_1	0,737	1,000	0,386	0,510
ID_2	0,530	0,252	0,078	0,252
ID_3	0,455	0,252	0,253	0,252
ID_4	1,000	1,000	1,000	1,000
ID_5	0,006	0,510	0,999	0,065

Tabella 3-7 Rating ideale H-AHP-A delle alternative sui criteri

In Tabella 3-8 e Figura 3-5 si riporta il rating ideale globale H-AHP-A delle 5 alternative di livello gerarchico 3, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2. Il rating ideale globale è ottenuto mediante *sintesi moltiplicativa* ossia mediante prodotto matriciale tra la matrice di dimensione 5×4 di Tabella 3-7 costituita da 4 vettori dei rating ideali delle 5 alternative ed il vettore di Tabella 2-10 di dimensione 4×1 del rating distributivo ovverosia dei pesi locali dei 4 criteri; si ottiene quindi il vettore di dimensione 5×1 di Tabella 3-8 del rating ideale globale delle 5 alternative.

Alternative	Rating ideale H-AHP-A
ID_1	0,547
ID_2	0,221
ID_3	0,263
ID_4	1,000
ID_5	0,359

Tabella 3-8 Rating ideale globale H-AHP-A delle alternative sui criteri

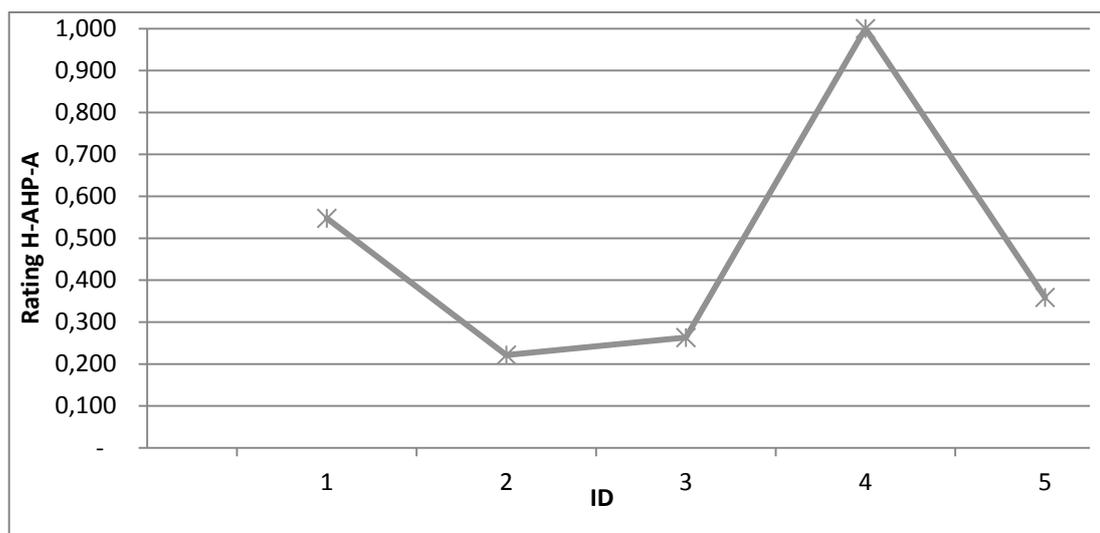


Figura 3-5 Rating ideale globale H-AHP-A delle alternative sui criteri

In Tabella 3-9 e Figura 3-6 si riporta il ranking globale H-AHP-A delle 5 alternative di livello gerarchico 3, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2 operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking	Alternative	Rating ideale H-AHP-A
1	ID_4	1,000
2	ID_1	0,547
3	ID_5	0,359
4	ID_3	0,263

5	ID_2	0,221
---	------	-------

Tabella 3-9 Rating e ranking globale H-AHP-A delle alternative sui criteri

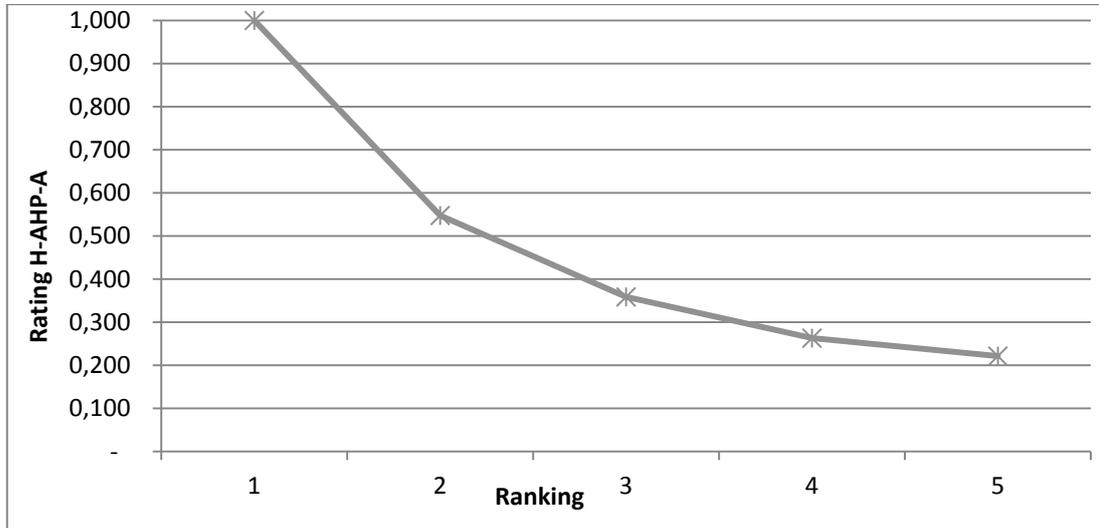


Figura 3-6 Rating e ranking globale H-AHP-A delle alternative sui criteri

3.3 Validazione metodologie H-AHP-R ed H-AHP-A

Al fine di validare le metodologie ibride H-AHP-R ed H-AHP-A, i risultati di rating ideale globale e ranking relativi a tali metodologie sono stati posti a confronto con i risultati di rating ideale globale e ranking relativi alle metodologie NO-AHP, AHP-R ed AHP-A.

In Figura 3-7 è evidenziato il confronto grafico tra le metodologie sopra citate in termini di rating ideale globale; i grafici riportano, per metodologia utilizzata, il valore di rating ideale globale delle 5 alternative di livello gerarchico 3, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2. È possibile apprezzare la sovrapponibilità dei tracciati di rating ideale globale relativi alle 5 metodologie oggetto di analisi; in particolare si evidenzia piena convergenza sul valore massimo unitario di ranking ideale globale attribuito all'alternativa ID_4 per le metodologie NO-AHP, AHP-R, H-AHP-R, H-AHP-A; la metodologia AHP-A presenta un valore massimo non unitario di ranking ideale globale comunque attribuito all'alternativa ID_4. Per le alternative aventi valori di rating ideale globale diversi dal valore massimo sussiste una quasi completa sovrapponibilità dei tracciati di rating ideale

per le metodologie AHP-R, AHP-A H-AHP-R, H-AHP-A; la metodologia NO-AHP presenta un tracciato non sovrapponibile in termini di rating ideale globale ma simile ai tracciati delle ulteriori metodologie in esame.

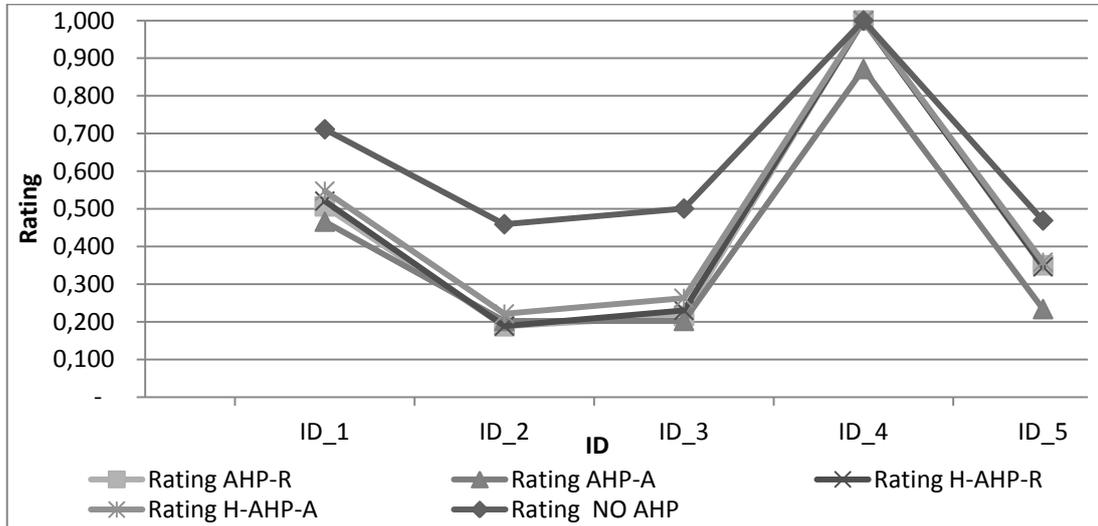


Figura 3-7 Confronto metodologico su rating ideale globale

I grafici di Figura 3-8 realizzano il confronto metodologico in termini di ranking e rating ideale globale. Dal confronto si desume la sovrapponibilità dei tracciati in termini di ranking ad eccezione del tracciato relativo alla metodologia AHP-A che presenta un'ambiguità nel ranking delle alternative ID_2 ed ID_3 aventi il medesimo valore di rating.

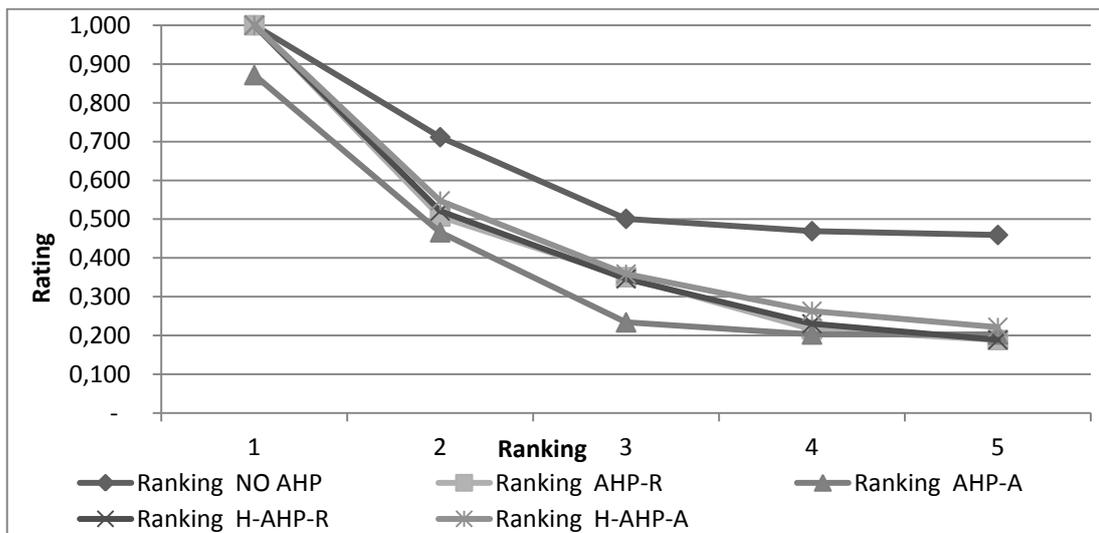


Figura 3-8 Confronto metodologico rating ideale globale e ranking

Il confronto metodologico operato in termini di ranking e rating ideale globale consente quindi la validazione delle procedure ibride H-AHP-R ed H-AHP-A in grado di definire rispettivamente il ranking parallelo e seriale di un numero definito o indefinito di alternative in modalità “lean” semplificando la procedura MCDA mediante calcolo diretto NO-AHP del rating ideale con riferimento ai criteri quantitativi e limitando l’uso della procedura AHP-A ai soli casi di criteri qualitativi.

4 Metodologia H-AHP-A per processi di approvvigionamento

Le metodologie ibride H-AHP-R ed H-AHP-A consentono il ranking parallelo e seriale di un numero definito o indefinito di alternative mediante “lean” MCDA ovvero mediante calcolo diretto NO-AHP del rating ideale con riferimento ai criteri quantitativi e mediante calcolo AHP-R ed AHP-A del rating ideale riferito ai criteri qualitativi.

Occorre tuttavia evidenziare un limite rappresentato da Saaty per l’applicazione della metodologia AHP-R e quindi della derivata H-AHP-R; il limite da considerare è il numero definito (s) di alternative da confrontare a coppie per il ranking parallelo delle stesse; analisi sperimentali hanno infatti evidenziato incrementi non sostenibili del rapporto di consistenza CR per valori di $s > 10$. Il limite al numero di alternative oggetto di confronti a coppie per il ranking parallelo ma anche l’empirica serialità nell’analisi delle alternative, spesso non disponibili per confronti in parallelo, determinano la necessità di utilizzo della metodologia H-AHP-A per supportare i moderni processi di *procurement*.

L’e-procurement è una realtà consolidata nei contesti *business-to-consumer* (B2C), *business-to-business* (B2B) e *business-to-government* (B2G); la letteratura di riferimento, tuttavia, sottolinea spesso l’assenza di modelli standardizzati di utilizzo dell’ICT ai fini dell’approvvigionamento. Il modello concernente il generico processo di approvvigionamento, dato l’odierno stato dell’arte dell’ICT applicata al procurement non può in effetti rivestire il ruolo di standard di riferimento poiché elaborato in un’epoca caratterizzata da sistemi informativi ed informatici indubbiamente differenti dagli attuali riguardo a tecnologie e schemi concettuali.

Disegnando un processo di “lean e – scouting” basato su metodologia MCDA H-AHP-A, lo studio in trattazione, relativamente a specifiche tipologie di acquisti, re-ingegnerizza parzialmente il generico processo di approvvigionamento, con

l'obiettivo di rendere razionale, efficiente, efficace e conforme ai criteri di valutazione individuati, la scelta dell'alternativa di approvvigionamento nell'universo delle soluzioni individuate sul web, al fine di massimizzare il valore dell'acquisto e minimizzare i tempi di scelta.

4.1 Processi di procurement ed e-procurement

Lo scenario economico ipercompetitivo (37) che caratterizza i mercati B2C e B2B dai primi anni del XXI secolo ha indotto le imprese a rivolgere particolare attenzione alle aree organizzative funzionali ove è possibile individuare margini di riduzione della spesa (38), convertendo – ove possibile – i ruoli delle stesse aree da “centri di costo” a “centri di ricavo”. L'area funzionale deputata agli acquisti di beni e servizi, necessari al generico processo produttivo, rappresenta una palestra ottimale per l'esercizio strategico sopra descritto: gli acquisti rappresentano ad oggi circa il 70% del costo del venduto (37) e la diffusa tendenza all'affermazione del “system buying” sul “making” incrementerà ulteriormente negli anni a venire l'incidenza percentuale di cui sopra; tali ragioni hanno indotto diverse aziende alla conversione dei tradizionali “uffici acquisti” in veri e propri “dipartimenti strategici per l'acquisizione delle risorse” (39) in grado di porre in essere, mediante il marketing d'acquisto, tutte le azioni strategiche necessarie all'ottimizzazione delle relazioni di fornitura.

Risulta a questo punto necessaria un'importante precisazione di circostanza riguardante la distinzione tra “acquisti” ed “approvvigionamenti”; se per acquisto si intende la stipula del singolo contratto di fornitura, il termine approvvigionamento si riferisce al complesso di attività svolte per assicurare la regolare disponibilità al minor costo possibile – nei tempi, nei luoghi, nelle quantità e nelle qualità – di beni e servizi necessari per lo svolgimento dei processi produttivi (38); nel prosieguo, nonostante la diversità di significati, i due termini verranno utilizzati come sinonimi.

Un primo modello concettuale concernente il generico processo di approvvigionamento nelle organizzazioni è rappresentato dal “buygrid” (40); elaborato alla fine degli anni '60 da Robinson, Faris e Wind, esso individua e riporta

in una struttura matriciale fasi e classi di acquisto correlate; successivamente, lo stesso modello rielaborato dal Kotler (39) e riportato in Tabella 4-1 evidenzia la criticità dell'approvvigionamento correlando la stessa al numero di fasi d'acquisto necessarie in relazione alla classe di acquisto.

Si riportano le fasi d'acquisto individuate con il "buygrid" da Robinson, Faris e Wind.

1. *Ricognizione del problema*: percezione di un problema e/o di una necessità che possono essere risolti o soddisfatti tramite l'acquisizione di un bene o servizio.
2. *Descrizione generale dei bisogni*: descrizione generale delle caratteristiche qualitative e quantitative che il prodotto/servizio deve possedere per risolvere il problema e/o soddisfare il bisogno.
3. *Specifiche di prodotto*: elaborazione delle specifiche necessarie per valutare le potenziali alternative di approvvigionamento.
4. *Ricerca del fornitore*: ricerca di fornitori idonei in elenchi di consulenza, fiere, cataloghi, servizi web e successiva qualificazione dei fornitori che presentano i requisiti richiesti
5. *Richiesta ed acquisizione proposte*: invito ai fornitori qualificati per la presentazione di proposte formali, scritte e dettagliate.
6. *Scelta del fornitore*: valutazione delle proposte pervenute con identificazione dei fornitori che propongono le migliori condizioni.
7. *Emissione dell'ordine*: elaborazione dell'ordine finale, con specifiche tecniche, le quantità, termini di consegna di pagamento, le condizioni di restituzione, garanzie, ecc ...
8. *Valutazione delle performance*: analisi e verifica dei risultati ottenuti in un dato rapporto di fornitura.

Fasi\Classi	Nuovo acquisto	Riacquisto modificato	Riacquisto invariato
1. Ricognizione del problema	Si	A volte	No
2. Descrizione generale dei bisogni	Si	A volte	No
3. Specifiche di prodotto	Si	Si	Si
4. Ricerca del fornitore	Si	A volte	No
5. Richiesta ed acquisizione proposte	Si	A volte	No
6. Scelta del fornitore	Si	A volte	No
7. Emissione dell'ordine	Si	A volte	No
8. Valutazione delle performance	Si	Si	Si

Tabella 4-1 Matrice di Kotler buygrid/buyphase

Agli inizi degli anni '70, Webster e Wind qualificarono l'approvvigionamento come vero e proprio processo organizzativo di decision – making, identificarono le macro variabili generiche (individuali, sociali, organizzative ed ambientali) – ed al loro interno delle sub - variabili direttamente ed indirette incidenti sull'acquisto – che possono influenzare la decisione d'acquisto; Webster e Wind definirono inoltre il primo modello standard di “buying centre” nonché i ruoli ricoperti e le attività poste in essere da ogni componente del centro d'acquisto nel processo di decision – making in esame (41).

I ruoli individuati con il “Buying centre” da Webster e Wind sono descritti a seguire.

- A. *Iniziatore*: identifica la necessità di acquistare un particolare prodotto/servizio per risolvere un problema e/o soddisfare un bisogno.
- B. *Decisore*: in ultima analisi approva l'acquisto ovvero decide se, cosa, come, dove e quando comprare.

- C. *Utilizzatore*: consuma o utilizza il prodotto/servizio.
- D. *Influenzatore*: con le proprie opinioni, conoscenze, competenze, ecc..., influenza il decisore.
- E. *Buyer*: ha l'autorità formale per selezionare il fornitore ed organizzare termini e condizioni.
- F. *Gatekeeper*: controlla di fatto lo scambio delle informazioni nel processo di approvvigionamento.

L'elaborazione di un flow chart funzionale "buyphases" - "buying centre", ottenuto mediante l'incrocio dei modelli tradizionali sopra citati, consente l'univoca individuazione del ruolo ricoperto da ciascun attore del centro d'acquisto nel generico processo di approvvigionamento. In Figura 4-1 si riporta il diagramma di flusso funzionale del processo relativamente ad un generico oggetto di approvvigionamento appartenente alla classe d'acquisto "new task".

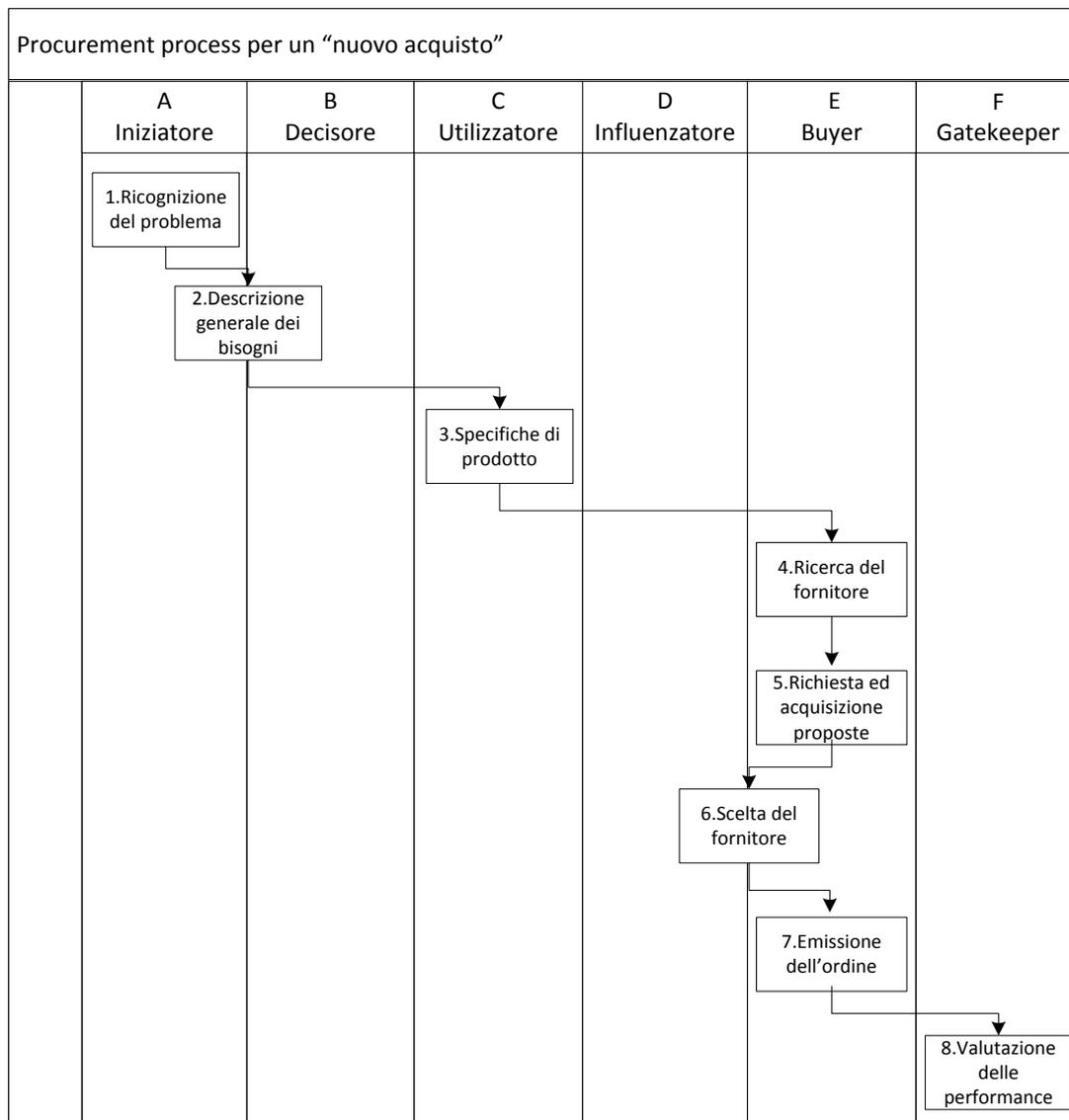


Figura 4-1. Procurement process per un "nuovo acquisto"

L'analisi fondamentale del generico settore industriale, elaborata da Porter ad inizio anni '80 (42), identifica i fornitori come una delle cinque forze in grado di influenzare la profittabilità dell'intero settore, facendo leva sul relativo potere contrattuale sostanzialmente legato alla rilevanza assunta dal prodotto nel settore per gli acquirenti, alla concentrazione di fornitori del medesimo prodotto nel settore, alla presenza nel settore di potenziali prodotti sostituiti; i fornitori divengono quindi anch'essi una variabile di settore oggetto di un'accurata strategia competitiva.

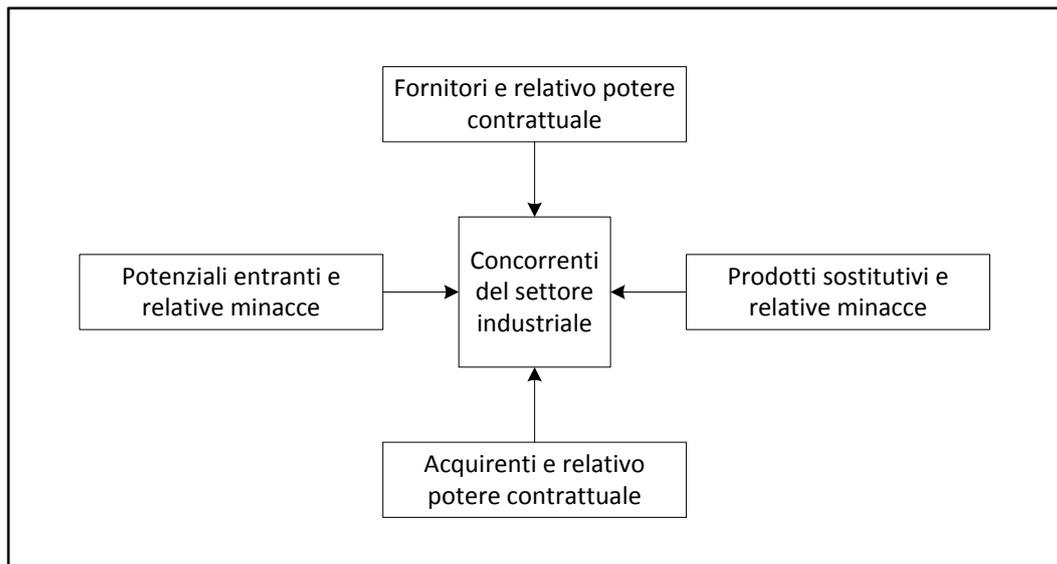


Figura 4-2. Le 5 forze della struttura industriale di Porter

Nella prima metà degli anni '80 Kraljic (43) elabora una strategia di approvvigionamento a due fattori finalizzata alla riduzione del "rischio di fornitura"; i fattori individuati da Kraljic sono:

- *l'importanza dell'acquisto*, definita ad esempio in termini di incidenza del costo di acquisto specifico sul costo totale degli acquisti o sul costi del venduto, valore aggiunto di prodotto, impatto sulla qualità del prodotto o sull'attività di crescita dell'organizzazione;
- *la complessità del mercato della fornitura*, valutata ad esempio in termini di numero di fornitori disponibili, competitività del mercato o frequenza di sostituzione di materiali e tecnologie.

La rappresentazione di questi due fattori in un grafico a matrice consente l'individuazione di quattro categorie di item a ciascuna delle quali è associata un'ideale tipologia di gestione dell'approvvigionamento; viene quindi posta maggiore enfasi su:

- stipula di contratti vantaggiosi, per gli item non critici;
- ricerca di prodotti idonei, per gli item ad effetto leva;
- ricerca di fornitori ideali, per gli item collo di bottiglia;

- stabilizzazione delle forniture, per gli item strategici.

Dalla matrice è possibile desumere il gradiente di complessità dell'approvvigionamento con direzione e verso dal III quadrante al I.

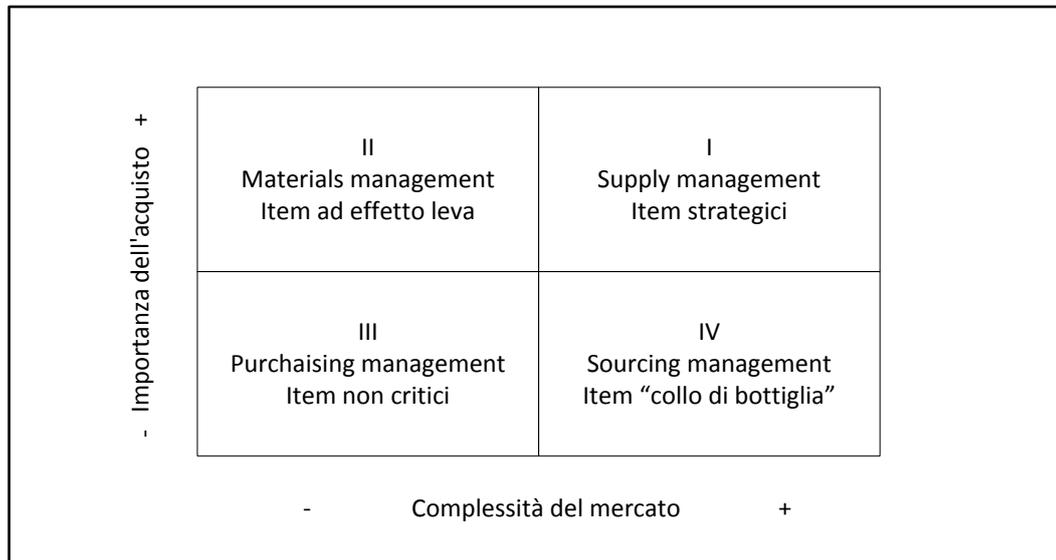


Figura 4-3. Matrice di Krajić

A riprova della valenza strategica assunta dall'attività di approvvigionamento in ogni contesto organizzativo, il modello strutturale per la creazione di valore "value chain" (44), teorizzato da Porter a metà nel 1985 ed universalmente riconosciuto nell'ambito delle scienze manageriali, identifica il procurement quale attività di supporto alle fasi primarie di creazione del valore nonché fonte di vantaggio competitivo per l'organizzazione, in quanto imprescindibile processo organizzativo oggetto di possibile e doverosa ottimizzazione.

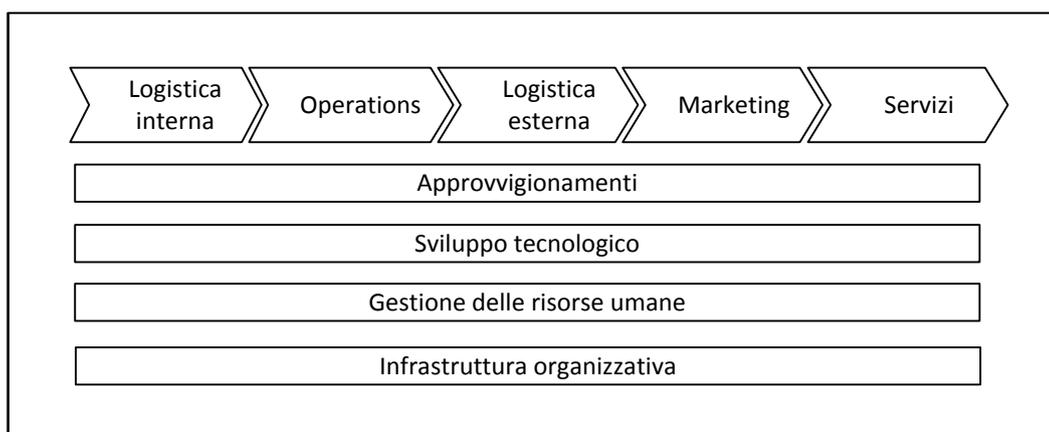


Figura 4-4. Catena del valore di Porter

L'ottimizzazione dell'attività di approvvigionamento rappresenta quindi un'imprescindibile azione strategica da porre in essere ai fini dell'ottenimento di un vantaggio competitivo per qualsiasi tipo di organizzazione impegnata nella creazione di valore.

L'introduzione dell'ICT al processo di approvvigionamento, ovvero sia il passaggio all'e-procurement, non ha determinato stravolgimenti procedurali al "buygrid" di Robinson, Faris e Wind ma piuttosto un incremento di efficienza generato dall'informatizzazione del processo e dalla conseguenziale contrazione dei tempi delle attività operative a vantaggio delle attività di "strategic purchasing" (45). L'e-procurement come sopra definito è ormai entrato a far parte del 50% delle aziende europee ed internazionali, ma di queste solo il 40% ha implementato piattaforme ICT finalizzate a comunicare, collaborare e negoziare con i fornitori (46); in letteratura si evidenzia inoltre l'inesistenza di un modello universalmente riconosciuto di e-procurement ovvero sia l'assenza di modelli standardizzati di utilizzo dell'ICT ai fini del procurement (47). Il modello "buygrid" concernente il generico processo di approvvigionamento, considerato l'odierno stato dell'arte dell'ICT applicata al procurement, non può rivestire il ruolo di standard di riferimento poiché elaborato in un'epoca caratterizzata da sistemi informativi ed informatici indubbiamente differenti dagli attuali riguardo a tecnologie e schemi concettuali.

Il lavoro in trattazione, relativamente a specifiche tipologie di acquisti, re-ingegnerizza parzialmente il generico processo di approvvigionamento con l'obiettivo di rendere razionale, efficiente, efficace e conforme ai criteri di valutazione individuati, la scelta dell'alternativa di approvvigionamento nell'universo delle soluzioni individuate sul Web, al fine di massimizzare il valore dell'acquisto e minimizzare i tempi di scelta disegnando un processo di "lean e – scouting" basato su metodologia MCDA H-AHP-A (48).

4.2 Lean e – scouting MCDA H-AHP-A

Il termine "lean", letteralmente snello, esprime il concetto in base al quale i sistemi produttivi devono ridurre al minimo le risorse impiegate tramite la continua ricerca degli sprechi ai fini dell'eliminazione degli stessi, allo scopo di produrre maggior valore con un minore consumo di risorse. Il "lean thinking" originato dal *Toyota Production System (TPS)*, non è uno strumento ma un modo di operare che tutti, all'interno dell'organizzazione, dovrebbero praticare (49).

Si può definire "lean e – scouting" il processo di ricerca web, basato su metodologia MCDA H-AHP-A, finalizzato al "material management" ovverosia all'e-procurement di "leverage item". Il processo di "lean e – scouting" oggetto di studio è applicabile ai "new task" item ad effetto leva caratterizzati da elevata importanza d'acquisto in un mercato a bassa complessità ed allocati nel II quadrante della matrice di Kraljic; l'approccio strategico per approvvigionamenti di tale natura enfatizza la ricerca dei prodotti, generalmente standardizzati, che meglio soddisfano i bisogni dell'organizzazione (43). L'elevata competitività dei mercati e la conseguente necessità di minimizzare il costo di approvvigionamento massimizzando il valore dello stesso, l'ormai consolidata diffusione degli strumenti web per il procurement ed in particolare gli e-catalog di oggetti e soggetti di approvvigionamento, rendono un item ad effetto leva annoverabile tra gli approvvigionamenti ad elevata importanza operati in un mercato poco complesso.

Applicando il processo di "lean e – scouting" relativamente ad un generico "leverage item" appartenente alla classe d'acquisto "new task", il flow chart

funzionale di Figura 4-1 ed il “buygrid” di Robinson, Faris e Wind, subiscono modifiche ed integrazioni di attività da svolgersi tramite web e supporto metodologico MCDA H-AHP-A, implementabile in ambienti software commercialmente diffusi.

Le fasi d’acquisto individuate con il “buygrid” da Robinson, Faris e Wind e integrate tramite approccio metodologico MCDA H-AHP-A sono elencate a seguire:

1. *Ricognizione del problema*: percezione di un problema e/o di una necessità che possono essere risolti o soddisfatti tramite l'acquisizione di un bene o servizio.
2. *Descrizione generale dei bisogni*: descrizione generale delle caratteristiche qualitative e quantitative che il prodotto/servizio deve possedere per risolvere il problema e/o soddisfare il bisogno. Definizione degli (r) criteri di valutazione dell’oggetto di approvvigionamento.
3. *Specifiche di prodotto*: elaborazione delle specifiche necessarie per valutare le potenziali alternative di approvvigionamento. Pesatura degli (r) criteri di valutazione dell’oggetto di approvvigionamento mediante metodologia MCDA AHP-R.
 - 3.1. *Ricerca del prodotto*: ricerca web della i -esima alternativa ($i = 1,2 \dots s$) ed estrapolazione della performance - “dato di targa” relativamente al k -esimo criterio ($k = 1,2 \dots r$).
 - 3.2. *Selezione del prodotto*: applicazione della metodologia MCDA H-AHP-A per la definizione del ranking globale ideale delle alternative oggetto di ricerca.
4. *Ricerca del fornitore*: ricerca di fornitori idonei in elenchi di consulenza, fiere, cataloghi, servizi web e successiva qualificazione dei fornitori che presentano i requisiti richiesti.
5. *Richiesta ed acquisizione proposte*: invito ai fornitori qualificati per la presentazione di proposte formali, scritte e dettagliate.

6. *Scelta del fornitore*: valutazione delle proposte pervenute con identificazione dei fornitori che propongono le migliori condizioni.
7. *Emissione dell'ordine*: elaborazione dell'ordine finale, con specifiche tecniche, le quantità, termini di consegna di pagamento, le condizioni di restituzione, garanzie, ecc ...
8. *Valutazione delle performance*: analisi e verifica dei risultati ottenuti in un dato rapporto di fornitura.

In Figura 4-5 si riporta il flow chart funzionale “buyphases” - “buying centre”, ottenuto mediante l'incrocio dei modelli tradizionali sopra citati ed integrato con il processo di “lean e – scouting” basato su supporto metodologico MCDA H-AHP-A.

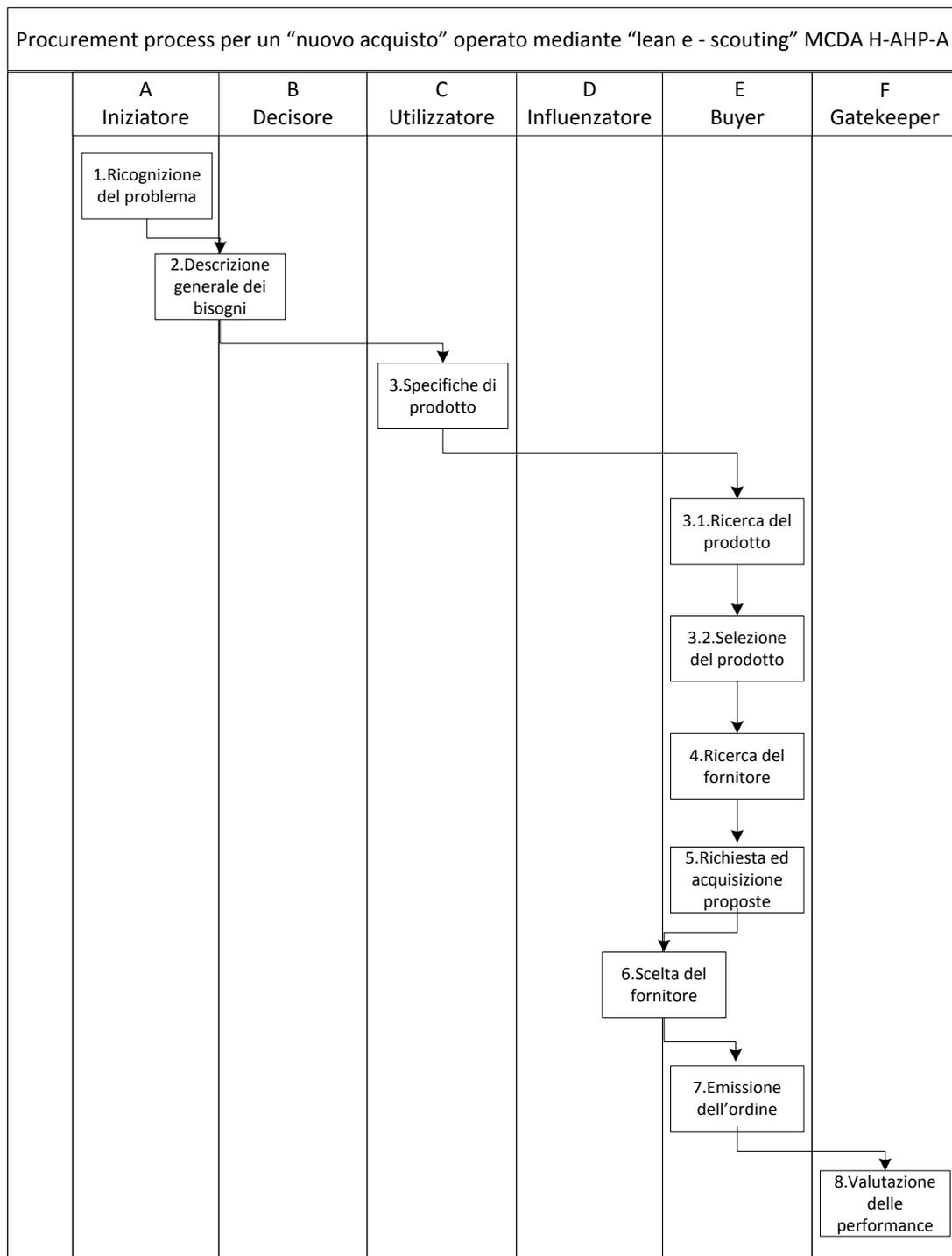


Figura 4-5. Procurement process per un "nuovo acquisto" mediante "lean e - scouting" MCDA H-AHP-A

4.2.1 SWOT analysis lean e – scouting MCDA H-AHP-A

In contesti produttivi caratterizzati dalla capillare diffusione dell'ICT in ogni fase della "Value chain", l'assenza di modelli standardizzati di e-procurement ha indotto la necessità di re-ingegnerizzare parzialmente il processo standard di approvvigionamento con l'obiettivo di rendere razionale, efficiente, efficace e conforme ai criteri di valutazione individuati, la scelta dell'alternativa di approvvigionamento nell'universo delle soluzioni individuate sul web, al fine di massimizzare il valore dell'acquisto e minimizzare i tempi di scelta.

A partire dall'incrocio funzionale tra il "buygrid" (40) elaborato alla fine degli anni '60 da Robinson, Faris e Wind ed il "buying centre" (41) sviluppato da Webster e Wind agli inizi degli anni '70, è stato disegnato un processo di "lean e – scouting" basato su supporto metodologico MCDA H-AHP-A. Il processo di "lean e – scouting" è stato descritto con il flow chart funzionale di Figura 4-5.

L'elevata competitività dei mercati e la conseguente necessità di minimizzare il costo di approvvigionamento massimizzando il valore dello stesso, l'ormai consolidata diffusione degli strumenti web per il procurement ed in particolare gli e-catalog di oggetti e soggetti di approvvigionamento, rendono il processo di "lean e – scouting" immediatamente applicabile al "material management" ovvero sia all'acquisto di "leverage item" appartenenti alla classe "new task". La SWOT analysis riportata in Tabella 4-2 evidenzia punti di forza, punti di debolezza, opportunità e minacce del processo di "lean e – scouting".

<p style="text-align: center;">Strengths</p> <ul style="list-style-type: none"> • Razionalità nella scelta dell’oggetto di approvvigionamento. • Semplicità d’implementazione del supporto metodologico MCDA H-AHP-A in ambienti software commercialmente diffusi. • Applicabilità in ambito B2C, B2B, B2G. 	<p style="text-align: center;">Weaknesses</p> <ul style="list-style-type: none"> • Applicabilità circoscritta ai “leverage item” appartenenti alla classe “new task”.
<p style="text-align: center;">Opportunities</p> <ul style="list-style-type: none"> • Elevata diffusione di e-catalog con oggetti di approvvigionamento. • Insufficienza di risorse, in particolare per le PMI, da dedicare a piattaforme ICT di approvvigionamento complesse. 	<p style="text-align: center;">Threats</p> <ul style="list-style-type: none"> • Apparente complessità del supporto metodologico MCDA H-AHP-A.

Tabella 4-2 Lean e - scouting SWOT analysis

4.3 Applicazione lean e – scouting MCDA H-AHP-A

Al fine di sperimentare il processo di “lean e – scouting” basato su supporto metodologico MCDA H-AHP-A, si consideri la seguente gerarchia a 3 livelli riportata in Figura 4-6

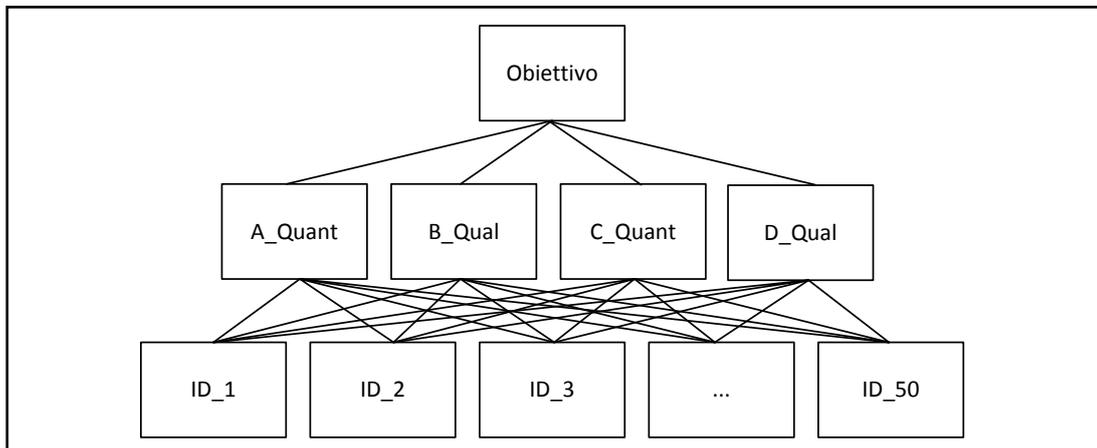


Figura 4-6 Gerarchia 3 livelli “lean e – scouting” MCDA H-AHP-A

Il livello 1 della gerarchia evidenzia l’obiettivo generale della valutazione ossia la scelta della migliore alternativa con riferimento ai 4 criteri di valutazione evidenziati al livello 2; ogni criterio risulta connesso a tutte le 50 alternative oggetto di valutazione evidenziate al livello 3 della struttura.

4.3.1 Descrizione generale dei bisogni

La fase 2 del *procurement process* descritto in Figura 4-1, ovverosia la descrizione generale delle caratteristiche qualitative e quantitative che il prodotto/servizio deve possedere per risolvere il problema e/o soddisfare il bisogno, si concretizza nella definizione degli (r) criteri di valutazione dell'oggetto di approvvigionamento con calcolo in modalità AHP-R del rating distributivo e dei pesi locali degli elementi dislocati al livello 2 della gerarchia. Per quanto sopra si richiamano procedure e risultati di cui al paragrafo 2.3.1 (Rating distributivo e pesi locali tra criteri in AHP-R).

4.4.1 Ricerca del prodotto/servizio

La fase 3.1 del *procurement process* descritto in Figura 4-1, ovverosia la ricerca web del prodotto/servizio, si concretizza nella ricerca web della i -esima alternativa ($i = 1,2 \dots s$) con estrapolazione delle rispettive performance - "dati di targa" relativamente al k -esimo criterio ($k = 1,2 \dots r$).

In Tabella 4-3 sono riportate le performance - "dati di targa" delle 50 alternative con riferimento ad ognuno dei 4 criteri; in particolare:

- le performance delle 50 alternative con riferimento al criterio "A_Quant" sono espresse in scala quantitativa di rapporto $[0, 100]$;
- le performance delle 50 alternative con riferimento al criterio "B_Qual" sono espresse in scala qualitativa nominale $\{1,2,3,4,5\}$;
- le performance delle 50 alternative con riferimento al criterio "C_Quant" sono espresse in scala quantitativa di rapporto $[0, 100]$;
- le performance delle 50 alternative con riferimento al criterio "D_Qual" sono espresse in scala qualitativa nominale $\{1,2,3,4,5\}$;

I valori di performance in tabella sono stati determinati in modalità random mediante estrazione casuale del dato di performance su distribuzioni aleatorie uniformi facenti relative agli insiemi quali – quantitativi sopra esposti.

	A_Quant	B_Qual	C_Quant	D_Qual
ID_1	1,71	4	38,56	5
ID_2	13,04	1	20,82	3
ID_3	20,80	4	16,64	4
ID_4	17,45	4	98,71	2
ID_5	2,60	2	14,65	4
ID_6	53,29	4	98,39	3
ID_7	42,18	5	38,87	2
ID_8	18,18	1	53,42	5
ID_9	63,58	5	31,76	1
ID_10	37,26	4	10,15	5
ID_11	52,64	3	22,18	4
ID_12	93,15	1	24,52	3
ID_13	60,67	4	21,01	2
ID_14	14,67	4	55,47	2
ID_15	13,85	1	42,16	1
ID_16	2,74	1	16,82	4
ID_17	21,91	3	33,03	2
ID_18	31,28	1	44,07	2
ID_19	55,60	5	18,42	5
ID_20	25,55	2	17,03	4
ID_21	44,55	4	98,05	5
ID_22	98,90	3	29,49	2
ID_23	5,85	5	50,89	3
ID_24	6,15	3	31,27	3
ID_25	46,38	3	75,71	2
ID_26	88,02	3	53,18	4
ID_27	38,64	4	75,63	3
ID_28	94,74	3	8,41	3
ID_29	91,26	4	48,10	5
ID_30	30,00	2	1,09	4
ID_31	70,16	1	82,06	4
ID_32	38,43	2	45,68	5
ID_33	55,34	3	88,42	3
ID_34	91,78	2	29,18	1
ID_35	60,77	1	8,31	5
ID_36	10,65	5	72,42	5
ID_37	52,43	2	89,97	4
ID_38	59,67	4	93,03	2
ID_39	47,17	2	36,80	5
ID_40	88,48	2	81,62	3
ID_41	86,72	4	84,55	2
ID_42	84,77	5	44,57	4
ID_43	91,94	2	37,92	2
ID_44	90,29	2	72,17	2
ID_45	73,59	5	15,56	3
ID_46	65,79	1	93,66	1
ID_47	38,17	5	67,01	4

ID_48	76,92	4	92,15	1
ID_49	81,90	3	28,93	3
ID_50	58,18	4	65,83	1

Tabella 4-3 Performance - “dati di targa” delle alternative sui criteri

4.4.2 Selezione del prodotto/servizio

La fase 3.2 del *procurement process* descritto in Figura 4-1, selezione del prodotto/servizio, si realizza mediante applicazione della metodologia MCDA H-AHP-A per la definizione del ranking globale ideale delle alternative oggetto di ricerca. A seguire la metodologia in esame è sviluppata ripercorrendo in successione le tappe per la definizione della stessa onde consentire la validazione della metodologia MCDA H-AHP-A per mezzo del confronto tra i risultati ottenuti in metodologia NO-AHP ed AHP-A.

Con riferimento alla struttura gerarchica a 3 livelli di Figura 4-6 ed alle performance quali – quantitative di Tabella 4-3, confermando le performance quantitative nell’ambito dei criteri “A_Quant” e “C_Quant” e forzando le performance qualitative sui criteri “B_Qual” e “D_Qual” in performance quantitative in scala di rapporto [1 – 5], applicando la procedura sopra descritta per il calcolo del rating ideale NO-AHP delle 50 alternative di livello gerarchico 3, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2, si ottengono i valori riportati in Tabella 4-4.

Alternative	Rating ideale A_Quant	Rating ideale B_Qual	Rating ideale C_Quant	Rating ideale D_Qual
ID_1	0,0173	0,8000	0,3906	1,0000
ID_2	0,1319	0,2000	0,2110	0,6000
ID_3	0,2103	0,8000	0,1686	0,8000
ID_4	0,1765	0,8000	1,0000	0,4000
ID_5	0,0263	0,4000	0,1484	0,8000
ID_6	0,5389	0,8000	0,9968	0,6000
ID_7	0,4265	1,0000	0,3938	0,4000
ID_8	0,1838	0,2000	0,5412	1,0000
ID_9	0,6428	1,0000	0,3217	0,2000
ID_10	0,3768	0,8000	0,1028	1,0000
ID_11	0,5323	0,6000	0,2247	0,8000
ID_12	0,9419	0,2000	0,2484	0,6000
ID_13	0,6134	0,8000	0,2128	0,4000
ID_14	0,1483	0,8000	0,5620	0,4000
ID_15	0,1400	0,2000	0,4271	0,2000

ID_16	0,0277	0,2000	0,1704	0,8000
ID_17	0,2216	0,6000	0,3346	0,4000
ID_18	0,3163	0,2000	0,4464	0,4000
ID_19	0,5622	1,0000	0,1866	1,0000
ID_20	0,2584	0,4000	0,1725	0,8000
ID_21	0,4504	0,8000	0,9933	1,0000
ID_22	1,0000	0,6000	0,2987	0,4000
ID_23	0,0592	1,0000	0,5156	0,6000
ID_24	0,0621	0,6000	0,3168	0,6000
ID_25	0,4690	0,6000	0,7669	0,4000
ID_26	0,8899	0,6000	0,5387	0,8000
ID_27	0,3907	0,8000	0,7662	0,6000
ID_28	0,9579	0,6000	0,0852	0,6000
ID_29	0,9228	0,8000	0,4872	1,0000
ID_30	0,3033	0,4000	0,0110	0,8000
ID_31	0,7094	0,2000	0,8313	0,8000
ID_32	0,3886	0,4000	0,4627	1,0000
ID_33	0,5596	0,6000	0,8957	0,6000
ID_34	0,9280	0,4000	0,2956	0,2000
ID_35	0,6144	0,2000	0,0842	1,0000
ID_36	0,1077	1,0000	0,7336	1,0000
ID_37	0,5301	0,4000	0,9114	0,8000
ID_38	0,6033	0,8000	0,9424	0,4000
ID_39	0,4769	0,4000	0,3728	1,0000
ID_40	0,8946	0,4000	0,8269	0,6000
ID_41	0,8768	0,8000	0,8565	0,4000
ID_42	0,8572	1,0000	0,4516	0,8000
ID_43	0,9297	0,4000	0,3841	0,4000
ID_44	0,9129	0,4000	0,7311	0,4000
ID_45	0,7441	1,0000	0,1576	0,6000
ID_46	0,6652	0,2000	0,9488	0,2000
ID_47	0,3859	1,0000	0,6788	0,8000
ID_48	0,7777	0,8000	0,9336	0,2000
ID_49	0,8281	0,6000	0,2931	0,6000
ID_50	0,5883	0,8000	0,6669	0,2000

Tabella 4-4 Rating ideale NO-AHP delle alternative sui criteri

In Tabella 4-5 e Figura 4-7 si riporta il rating ideale globale NO-AHP delle 50 alternative di livello gerarchico 3, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2. Il rating ideale globale è ottenuto mediante *sintesi moltiplicativa* ossia mediante prodotto matriciale tra la matrice di dimensione 50×4 di Tabella 4-4 costituita da 4 vettori dei rating ideali delle 50 alternative ed il vettore di Tabella 2-10 di dimensione 4×1 del rating distributivo ovvero dei pesi locali dei 4 criteri; si

ottiene quindi il vettore di dimensione 50×1 di Tabella 4-5 del rating ideale globale delle 50 alternative.

Alternative	Rating NO AHP
ID_1	0,762
ID_2	0,425
ID_3	0,602
ID_4	0,592
ID_5	0,539
ID_6	0,724
ID_7	0,470
ID_8	0,741
ID_9	0,350
ID_10	0,707
ID_11	0,611
ID_12	0,480
ID_13	0,410
ID_14	0,476
ID_15	0,256
ID_16	0,522
ID_17	0,396
ID_18	0,384
ID_19	0,763
ID_20	0,559
ID_21	0,944
ID_22	0,430
ID_23	0,595
ID_24	0,496
ID_25	0,524
ID_26	0,713
ID_27	0,655
ID_28	0,485
ID_29	0,838
ID_30	0,519
ID_31	0,733
ID_32	0,755
ID_33	0,675
ID_34	0,289
ID_35	0,645
ID_36	0,881
ID_37	0,767
ID_38	0,600
ID_39	0,736
ID_40	0,652
ID_41	0,593
ID_42	0,735
ID_43	0,425

ID_44	0,515
ID_45	0,539
ID_46	0,422
ID_47	0,769
ID_48	0,495
ID_49	0,532
ID_50	0,414

Tabella 4-5 Rating ideale globale NO-AHP delle alternative sui criteri

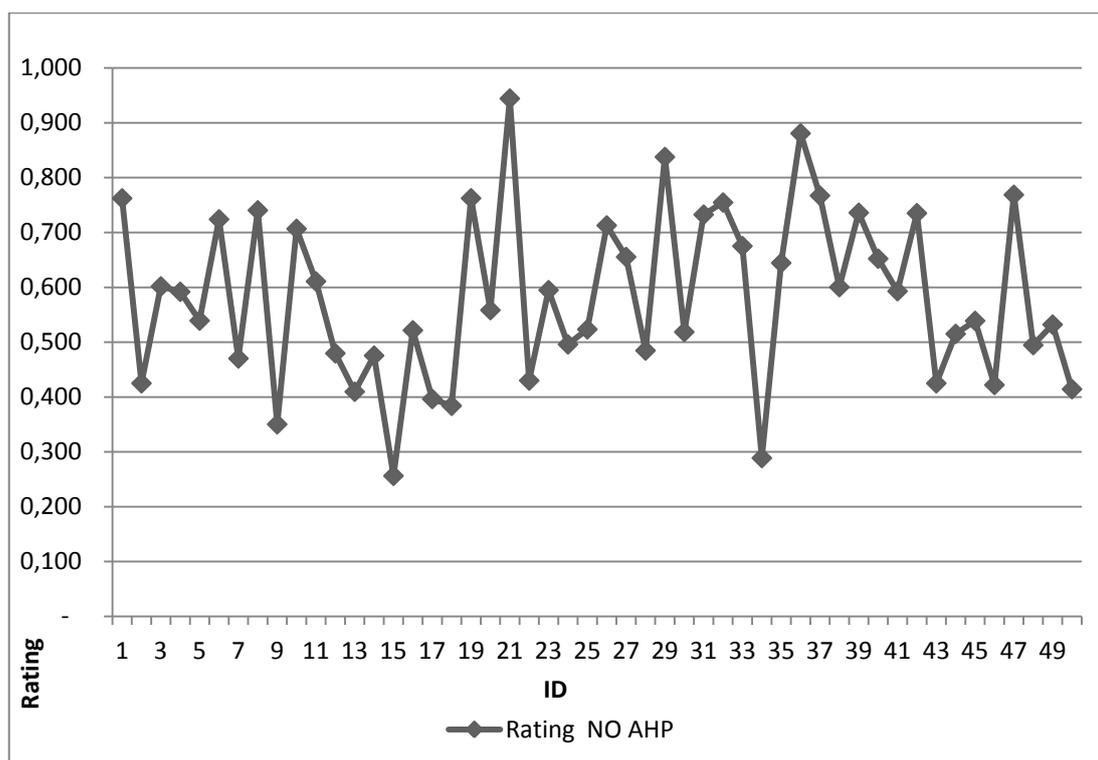


Figura 4-7 Rating ideale globale NO-AHP delle alternative sui criteri

In Tabella 4-6 e Figura 4-8 si riportano i principali indicatori statistici del vettore di dimensione 50×1 di Tabella 4-5 con il rating ideale globale NO AHP delle 50 alternative in esame.

Statistica	Valore
Max	0,944
III Quartile	0,721
Mediana rating	0,575
I Quartile rating	0,477
Min	0,256
Moda	#N/D
Media	0,583
Dev. St.	0,155

Tabella 4-6 Statistica rating ideale globale NO-AHP

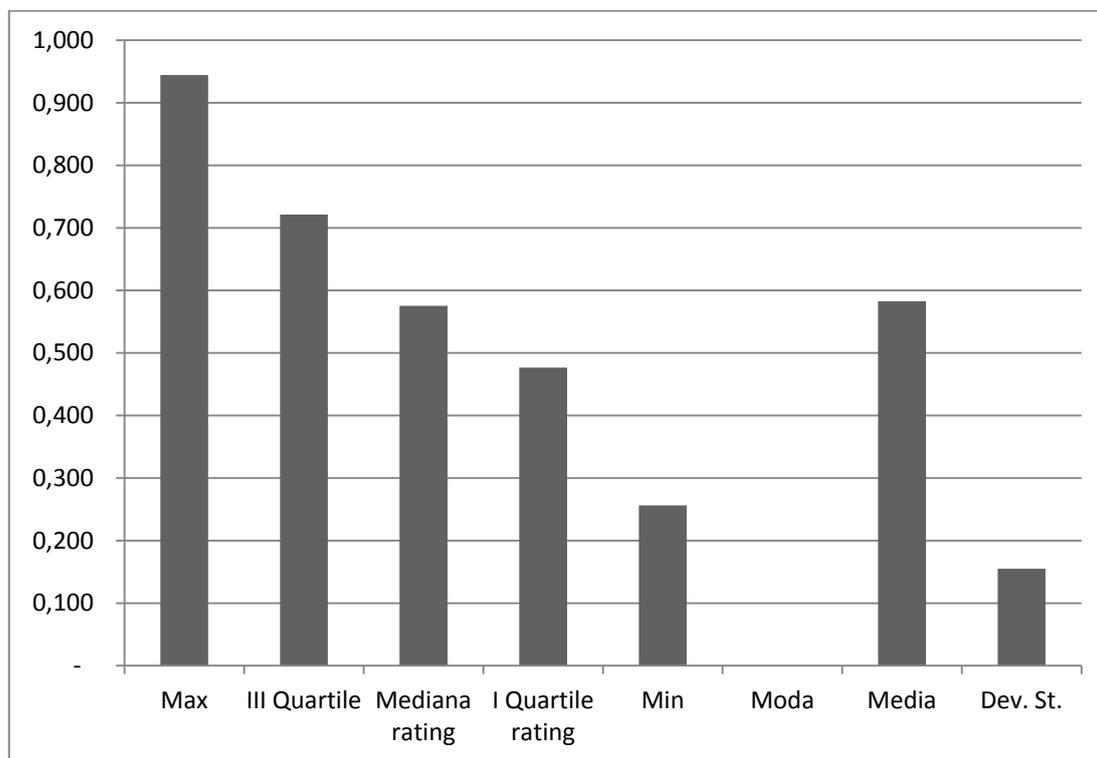


Figura 4-8 Statistica rating ideale globale NO-AHP

In Tabella 4-7 e Figura 4-9 si riporta il ranking globale AHP-R delle 50 alternative di livello gerarchico 3, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2 operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking	Alternative	Rating NO AHP
1	ID_21	0,944
2	ID_36	0,881
3	ID_29	0,838
4	ID_47	0,769
5	ID_37	0,767
6	ID_19	0,763
7	ID_1	0,762
8	ID_32	0,755
9	ID_8	0,741
10	ID_39	0,736
11	ID_42	0,735
12	ID_31	0,733
13	ID_6	0,724
14	ID_26	0,713
15	ID_10	0,707
16	ID_33	0,675
17	ID_27	0,655

18	ID_40	0,652
19	ID_35	0,645
20	ID_11	0,611
21	ID_3	0,602
22	ID_38	0,600
23	ID_23	0,595
24	ID_41	0,593
25	ID_4	0,592
26	ID_20	0,559
27	ID_5	0,539
28	ID_45	0,539
29	ID_49	0,532
30	ID_25	0,524
31	ID_16	0,522
32	ID_30	0,519
33	ID_44	0,515
34	ID_24	0,496
35	ID_48	0,495
36	ID_28	0,485
37	ID_12	0,480
38	ID_14	0,476
39	ID_7	0,470
40	ID_22	0,430
41	ID_43	0,425
42	ID_2	0,425
43	ID_46	0,422
44	ID_50	0,414
45	ID_13	0,410
46	ID_17	0,396
47	ID_18	0,384
48	ID_9	0,350
49	ID_34	0,289
50	ID_15	0,256

Tabella 4-7 Rating e ranking globale NO-AHP delle alternative sui criteri

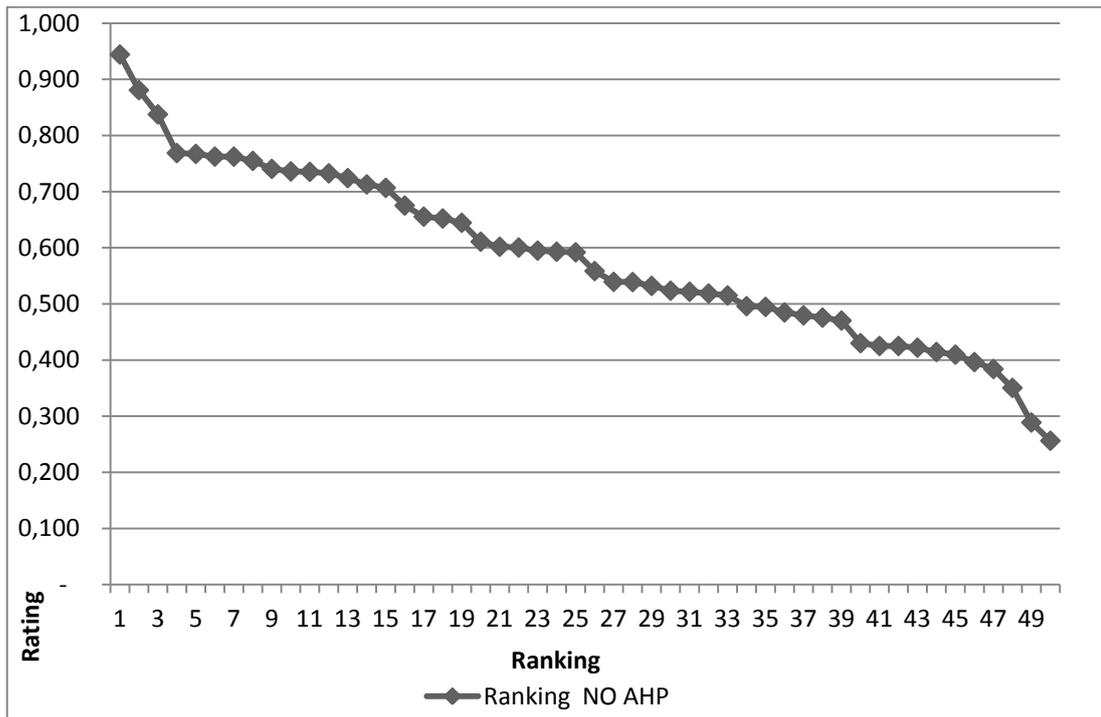


Figura 4-9 Rating e ranking globale NO-AHP delle alternative sui criteri

Si consideri la gerarchia a 4 livelli di Figura 4-10 quale integrazione della struttura a 3 livelli di Figura 4-6.

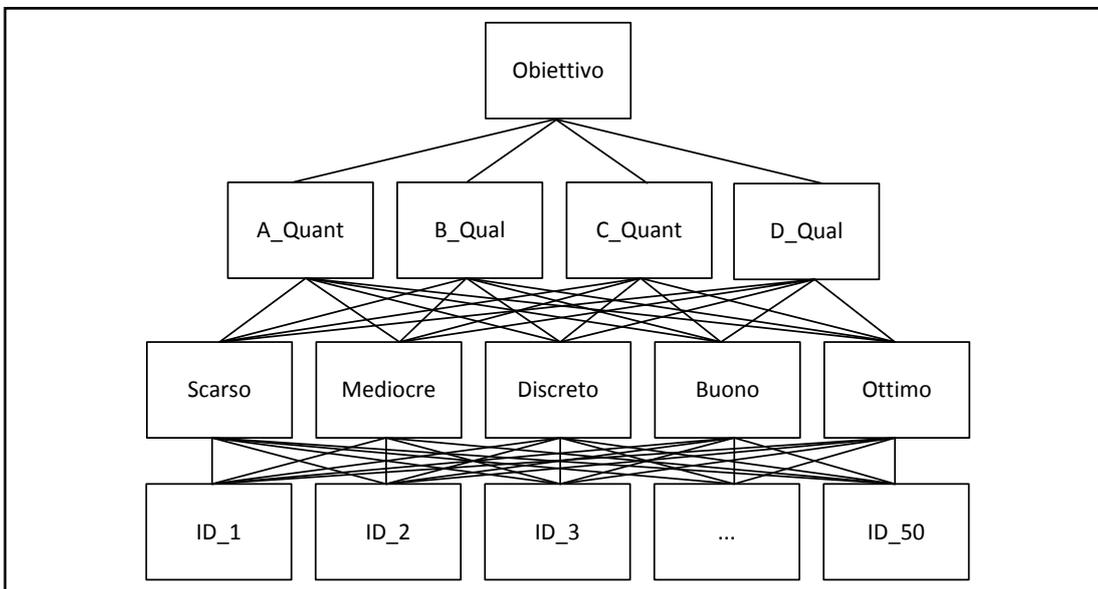


Figura 4-10 Gerarchia 3 livelli “lean e – scouting” MCDA H-AHP-A

Il livello 1 della gerarchia evidenzia l’obiettivo generale della valutazione ossia la scelta della migliore alternativa con riferimento ai 4 criteri di valutazione evidenziati al livello 2; ogni criterio risulta connesso a tutti i livelli di intensità delle

alternative evidenziati al livello 3 della struttura ed ogni livello di intensità è connesso a tutte le 50 alternative oggetto di valutazione evidenziate al livello 4.

Al fine di calcolare il rating ideale globale AHP-A le 50 alternative oggetto di valutazione evidenziate al livello 4, si richiama il contenuto dei paragrafi 2.3.4 “Rating distributivo/ideale e pesi locali delle intensità in AHP-A” e 2.3.5 “Rating ideale delle alternative in AHP-A”.

In Tabella 4-8 si riporta il rating ideale delle 50 alternative di livello gerarchico 4, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2. Il rating ideale deriva dal confronto della performance – “dato di targa” quali - quantitativa di ogni alternativa indicata in Tabella 4-3 con la Tabella 2-54 di associazione tra intensità, rating ideale delle intensità ed intervalli potenziali di valori di performance.

Alternative	Rating ideale A_Quant	Rating ideale B_Qual	Rating ideale C_Quant	Rating ideale D_Qual
ID_1	0,065	0,510	0,124	1,000
ID_2	0,065	0,065	0,124	0,252
ID_3	0,124	0,510	0,065	0,510
ID_4	0,065	0,510	1,000	0,124
ID_5	0,065	0,124	0,065	0,510
ID_6	0,252	0,510	1,000	0,252
ID_7	0,252	1,000	0,124	0,124
ID_8	0,065	0,065	0,252	1,000
ID_9	0,510	1,000	0,124	0,065
ID_10	0,124	0,510	0,065	1,000
ID_11	0,252	0,252	0,124	0,510
ID_12	1,000	0,065	0,124	0,252
ID_13	0,510	0,510	0,124	0,124
ID_14	0,065	0,510	0,252	0,124
ID_15	0,065	0,065	0,252	0,065
ID_16	0,065	0,065	0,065	0,510
ID_17	0,124	0,252	0,124	0,124
ID_18	0,124	0,065	0,252	0,124
ID_19	0,252	1,000	0,065	1,000
ID_20	0,124	0,124	0,065	0,510
ID_21	0,252	0,510	1,000	1,000
ID_22	1,000	0,252	0,124	0,124
ID_23	0,065	1,000	0,252	0,252
ID_24	0,065	0,252	0,124	0,252
ID_25	0,252	0,252	0,510	0,124
ID_26	1,000	0,252	0,252	0,510
ID_27	0,124	0,510	0,510	0,252

ID_28	1,000	0,252	0,065	0,252
ID_29	1,000	0,510	0,252	1,000
ID_30	0,124	0,124	0,065	0,510
ID_31	0,510	0,065	1,000	0,510
ID_32	0,124	0,124	0,252	1,000
ID_33	0,252	0,252	1,000	0,252
ID_34	1,000	0,124	0,124	0,065
ID_35	0,510	0,065	0,065	1,000
ID_36	0,065	1,000	0,510	1,000
ID_37	0,252	0,124	1,000	0,510
ID_38	0,252	0,510	1,000	0,124
ID_39	0,252	0,124	0,124	1,000
ID_40	1,000	0,124	1,000	0,252
ID_41	1,000	0,510	1,000	0,124
ID_42	1,000	1,000	0,252	0,510
ID_43	1,000	0,124	0,124	0,124
ID_44	1,000	0,124	0,510	0,124
ID_45	0,510	1,000	0,065	0,252
ID_46	0,510	0,065	1,000	0,065
ID_47	0,124	1,000	0,510	0,510
ID_48	0,510	0,510	1,000	0,065
ID_49	1,000	0,252	0,124	0,252
ID_50	0,252	0,510	0,510	0,065

Tabella 4-8 Rating ideale AHP-A delle alternative sui criteri

In Tabella 4-9 e Figura 4-11 si riporta il rating ideale globale AHP-A delle 5 alternative di livello gerarchico 4, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2. Il rating ideale globale è ottenuto mediante sintesi moltiplicativa ossia mediante prodotto matriciale tra la matrice di dimensione 50×4 di Tabella 4-8 costituita da 4 vettori dei rating ideali delle 50 alternative ed il vettore di Tabella 2-10 di dimensione 4×1 del rating distributivo ovvero dei pesi locali dei 4 criteri; si ottiene quindi il vettore di dimensione 50×1 di Tabella 4-9 del rating ideale globale delle 5 alternative.

Alternative	Rating AHP-A
ID_1	0,661
ID_2	0,186
ID_3	0,372
ID_4	0,396
ID_5	0,323
ID_6	0,478
ID_7	0,234
ID_8	0,642
ID_9	0,215

ID_10	0,649
ID_11	0,364
ID_12	0,237
ID_13	0,190
ID_14	0,199
ID_15	0,114
ID_16	0,316
ID_17	0,139
ID_18	0,150
ID_19	0,713
ID_20	0,327
ID_21	0,901
ID_22	0,187
ID_23	0,329
ID_24	0,208
ID_25	0,247
ID_26	0,439
ID_27	0,343
ID_28	0,244
ID_29	0,746
ID_30	0,327
ID_31	0,586
ID_32	0,652
ID_33	0,448
ID_34	0,139
ID_35	0,618
ID_36	0,820
ID_37	0,579
ID_38	0,406
ID_39	0,626
ID_40	0,474
ID_41	0,447
ID_42	0,527
ID_43	0,172
ID_44	0,273
ID_45	0,305
ID_46	0,335
ID_47	0,546
ID_48	0,387
ID_49	0,259
ID_50	0,244

Tabella 4-9 Rating ideale globale AHP-A delle alternative sui criteri

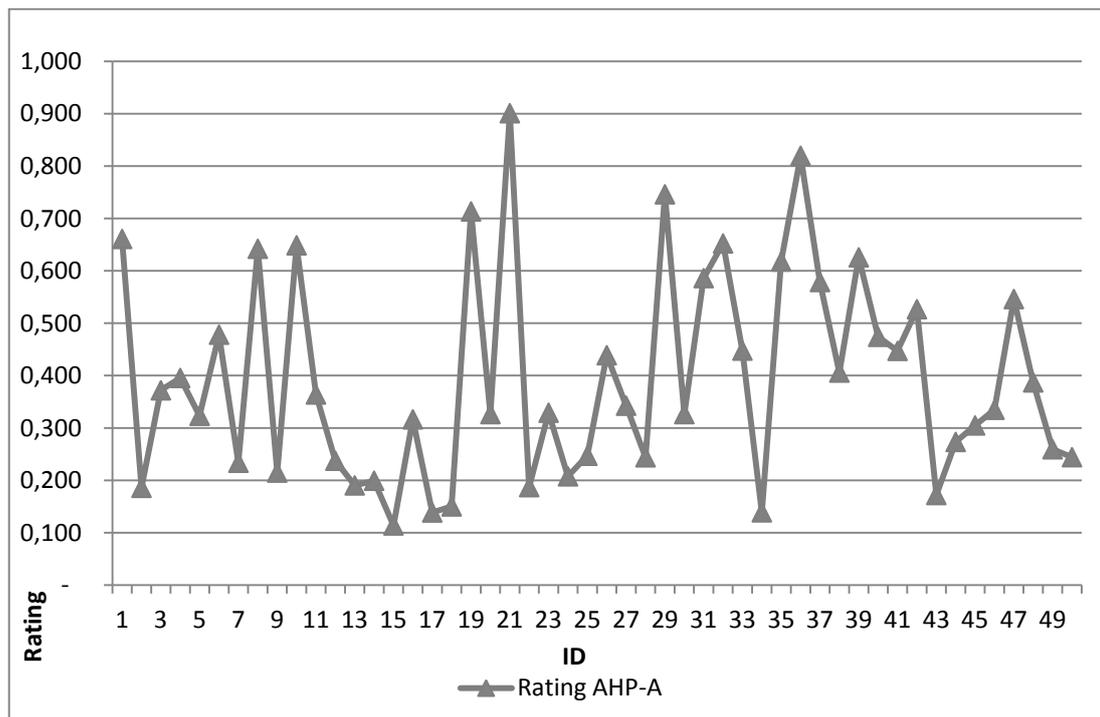


Figura 4-11 Rating ideale globale AHP-A delle alternative sui criteri

In Tabella 4-10 e Figura 4-12 si riportano i principali indicatori statistici del vettore di dimensione 50×1 di Tabella 4-9 con il rating ideale globale AHP-A delle 50 alternative in esame.

Statistica	Valore
Max	0,901
III Quartile	0,541
Mediana rating	0,339
I Quartile rating	0,239
Min	0,114
Moda	0,327
Media	0,394
Dev. St.	0,197

Tabella 4-10 Statistica rating ideale globale AHP-A

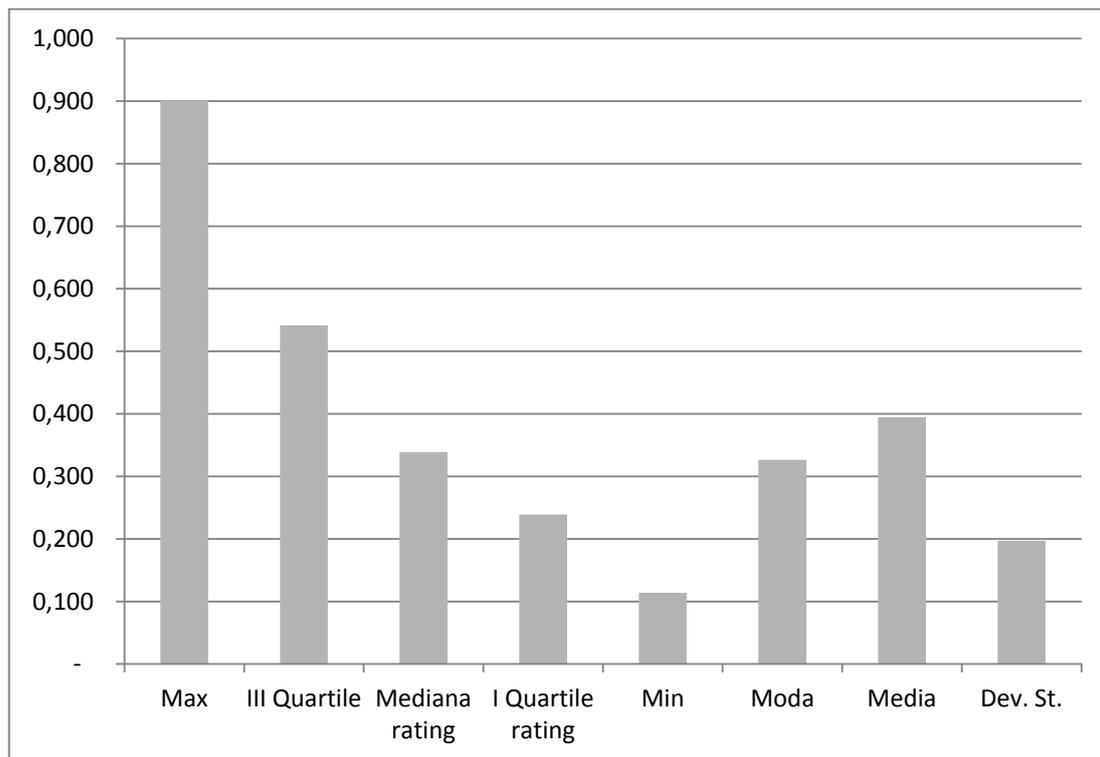


Figura 4-12 Statistica rating ideale globale AHP-A

In Tabella 4-11 e Figura 4-13 si riporta il ranking globale AHP-A delle 50 alternative di livello gerarchico 3, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2 operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking	Alternative	Rating AHP-A
1	ID_21	0,901
2	ID_36	0,820
3	ID_29	0,746
4	ID_19	0,713
5	ID_1	0,661
6	ID_32	0,652
7	ID_10	0,649
8	ID_8	0,642
9	ID_39	0,626
10	ID_35	0,618
11	ID_31	0,586
12	ID_37	0,579
13	ID_47	0,546
14	ID_42	0,527
15	ID_6	0,478
16	ID_40	0,474
17	ID_33	0,448
18	ID_41	0,447

19	ID_26	0,439
20	ID_38	0,406
21	ID_4	0,396
22	ID_48	0,387
23	ID_3	0,372
24	ID_11	0,364
25	ID_27	0,343
26	ID_46	0,335
27	ID_23	0,329
28	ID_20	0,327
29	ID_20	0,327
30	ID_5	0,323
31	ID_16	0,316
32	ID_45	0,305
33	ID_44	0,273
34	ID_49	0,259
35	ID_25	0,247
36	ID_50	0,244
37	ID_28	0,244
38	ID_12	0,237
39	ID_7	0,234
40	ID_9	0,215
41	ID_24	0,208
42	ID_14	0,199
43	ID_13	0,190
44	ID_22	0,187
45	ID_2	0,186
46	ID_43	0,172
47	ID_18	0,150
48	ID_34	0,139
49	ID_17	0,139
50	ID_15	0,114

Tabella 4-11 Rating e ranking globale AHP-A delle alternative sui criteri

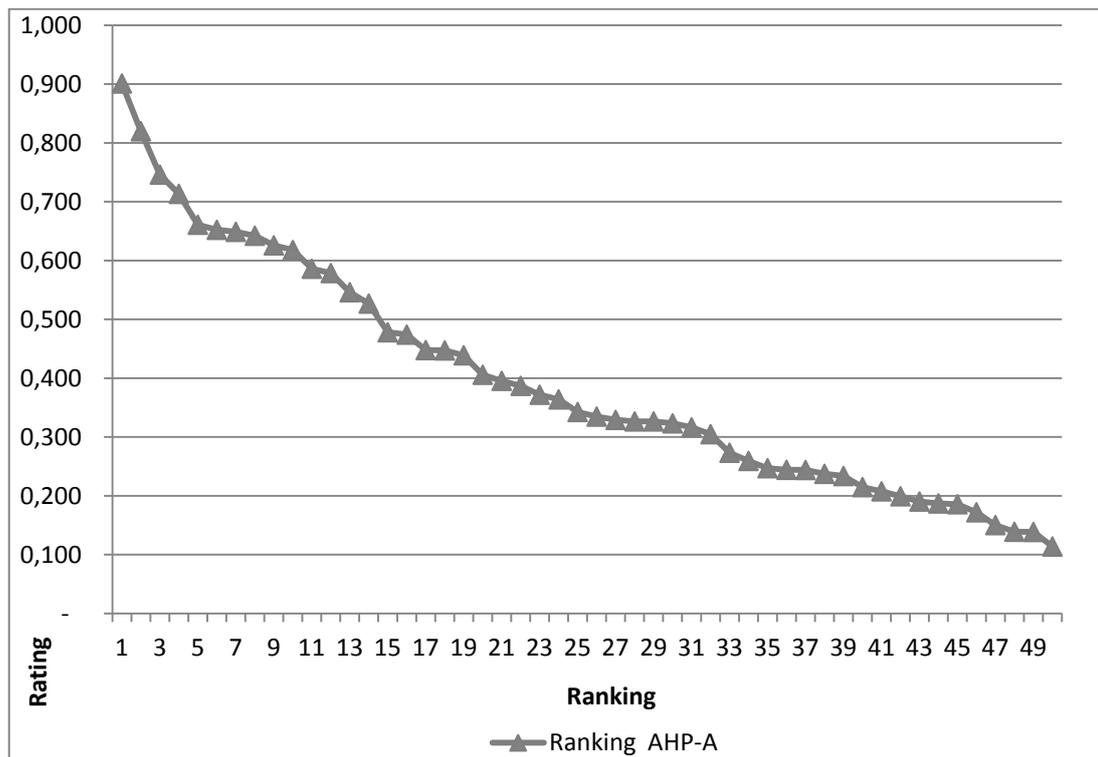


Figura 4-13 Rating e ranking globale AHP-A delle alternative sui criteri

Segue l'applicazione della metodologia H-AHP-A finalizzata ad operare il "lean e - scouting" con confronti assoluti in serie per il ranking delle alternative oggetto di valutazione.

La metodologia H-AHP-A combina i risultati di rating ideale relativamente alle metodologie AHP-A e NO-AHP; in particolare, utilizza il rating ideale ottenuto con metodologia AHP-A per i criteri qualitativi ed il rating ideale ottenuto con metodologia NO-AHP per i criteri quantitativi. La metodologia H-AHP-A consente al decision analyst di operare in modalità "lean" semplificando la procedura MCDA mediante calcolo diretto NO-AHP del rating ideale con riferimento ai criteri quantitativi e limitando l'uso della procedura AHP-A ai soli casi di criteri qualitativi.

Alternative	Rating ideale A_Quant NO-AHP	Rating ideale B_Qual AHP-A	Rating ideale C_Quant NO-AHP	Rating ideale D_Qual AHP-A
ID_1	0,017	0,510	0,391	1,000
ID_2	0,132	0,065	0,211	0,252
ID_3	0,210	0,510	0,169	0,510
ID_4	0,176	0,510	1,000	0,124
ID_5	0,026	0,124	0,148	0,510
ID_6	0,539	0,510	0,997	0,252

ID_7	0,427	1,000	0,394	0,124
ID_8	0,184	0,065	0,541	1,000
ID_9	0,643	1,000	0,322	0,065
ID_10	0,377	0,510	0,103	1,000
ID_11	0,532	0,252	0,225	0,510
ID_12	0,942	0,065	0,248	0,252
ID_13	0,613	0,510	0,213	0,124
ID_14	0,148	0,510	0,562	0,124
ID_15	0,140	0,065	0,427	0,065
ID_16	0,028	0,065	0,170	0,510
ID_17	0,222	0,252	0,335	0,124
ID_18	0,316	0,065	0,446	0,124
ID_19	0,562	1,000	0,187	1,000
ID_20	0,258	0,124	0,172	0,510
ID_21	0,450	0,510	0,993	1,000
ID_22	1,000	0,252	0,299	0,124
ID_23	0,059	1,000	0,516	0,252
ID_24	0,062	0,252	0,317	0,252
ID_25	0,469	0,252	0,767	0,124
ID_26	0,890	0,252	0,539	0,510
ID_27	0,391	0,510	0,766	0,252
ID_28	0,958	0,252	0,085	0,252
ID_29	0,923	0,510	0,487	1,000
ID_30	0,303	0,124	0,011	0,510
ID_31	0,709	0,065	0,831	0,510
ID_32	0,389	0,124	0,463	1,000
ID_33	0,560	0,252	0,896	0,252
ID_34	0,928	0,124	0,296	0,065
ID_35	0,614	0,065	0,084	1,000
ID_36	0,108	1,000	0,734	1,000
ID_37	0,530	0,124	0,911	0,510
ID_38	0,603	0,510	0,942	0,124
ID_39	0,477	0,124	0,373	1,000
ID_40	0,895	0,124	0,827	0,252
ID_41	0,877	0,510	0,856	0,124
ID_42	0,857	1,000	0,452	0,510
ID_43	0,930	0,124	0,384	0,124
ID_44	0,913	0,124	0,731	0,124
ID_45	0,744	1,000	0,158	0,252
ID_46	0,665	0,065	0,949	0,065
ID_47	0,386	1,000	0,679	0,510
ID_48	0,778	0,510	0,934	0,065
ID_49	0,828	0,252	0,293	0,252
ID_50	0,588	0,510	0,667	0,065

Tabella 4-12 Rating ideale H-AHP-A delle alternative sui criteri

In Tabella 4-13 e Figura 4-14 si riporta il rating ideale globale H-AHP-A delle 50 alternative in esame con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico superiore. Il rating ideale globale è ottenuto mediante *sintesi moltiplicativa* ossia mediante prodotto matriciale tra la matrice di dimensione 50×4 di Tabella 4-12 costituita da 4 vettori dei rating ideali delle 50 alternative ed il vettore di Tabella 2-10 di dimensione 4×1 del rating distributivo ovverosia dei pesi locali dei 4 criteri; si ottiene quindi il vettore di dimensione 50×1 di Tabella 4-13 del rating ideale globale delle 50 alternative.

Alternative	Rating H-AHP-A
ID_1	0,728
ID_2	0,212
ID_3	0,404
ID_4	0,402
ID_5	0,343
ID_6	0,493
ID_7	0,314
ID_8	0,725
ID_9	0,274
ID_10	0,673
ID_11	0,406
ID_12	0,267
ID_13	0,219
ID_14	0,285
ID_15	0,164
ID_16	0,342
ID_17	0,199
ID_18	0,212
ID_19	0,763
ID_20	0,362
ID_21	0,910
ID_22	0,233
ID_23	0,398
ID_24	0,258
ID_25	0,326
ID_26	0,508
ID_27	0,425
ID_28	0,247
ID_29	0,804
ID_30	0,322
ID_31	0,553
ID_32	0,722
ID_33	0,437
ID_34	0,180

ID_35	0,629
ID_36	0,881
ID_37	0,571
ID_38	0,410
ID_39	0,704
ID_40	0,423
ID_41	0,403
ID_42	0,571
ID_43	0,236
ID_44	0,327
ID_45	0,342
ID_46	0,330
ID_47	0,605
ID_48	0,384
ID_49	0,294
ID_50	0,304

Tabella 4-13 Rating ideale globale H-AHP-A delle alternative sui criteri

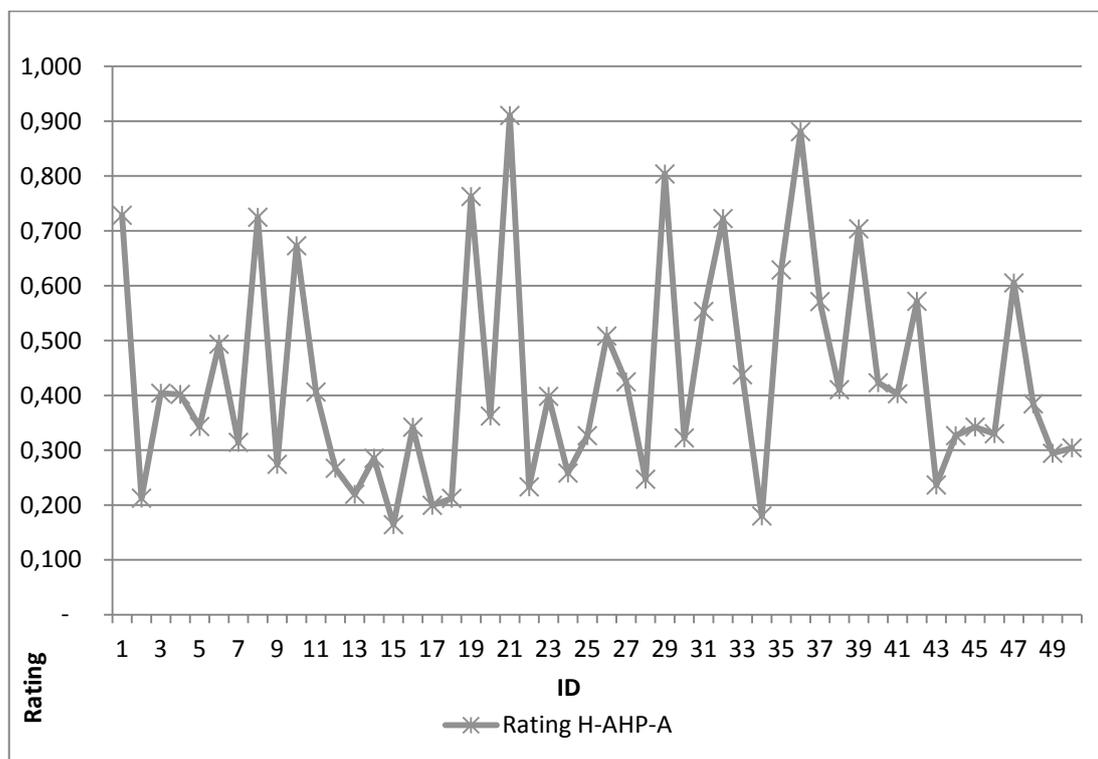


Figura 4-14 Rating ideale globale H-AHP-A delle alternative sui criteri

In Tabella 4-14 e Figura 4-15 si riportano i principali indicatori statistici del vettore di dimensione 50×1 di Tabella 4-13 con il rating ideale globale H-AHP-A delle 50 alternative in esame.

Statistica	Valore
Max	0,910
III Quartile	0,566
Mediana rating	0,391
I Quartile rating	0,288
Min	0,164
Moda	#N/D
Media	0,431
Dev. St.	0,196

Tabella 4-14 Statistica rating ideale globale H-AHP-A

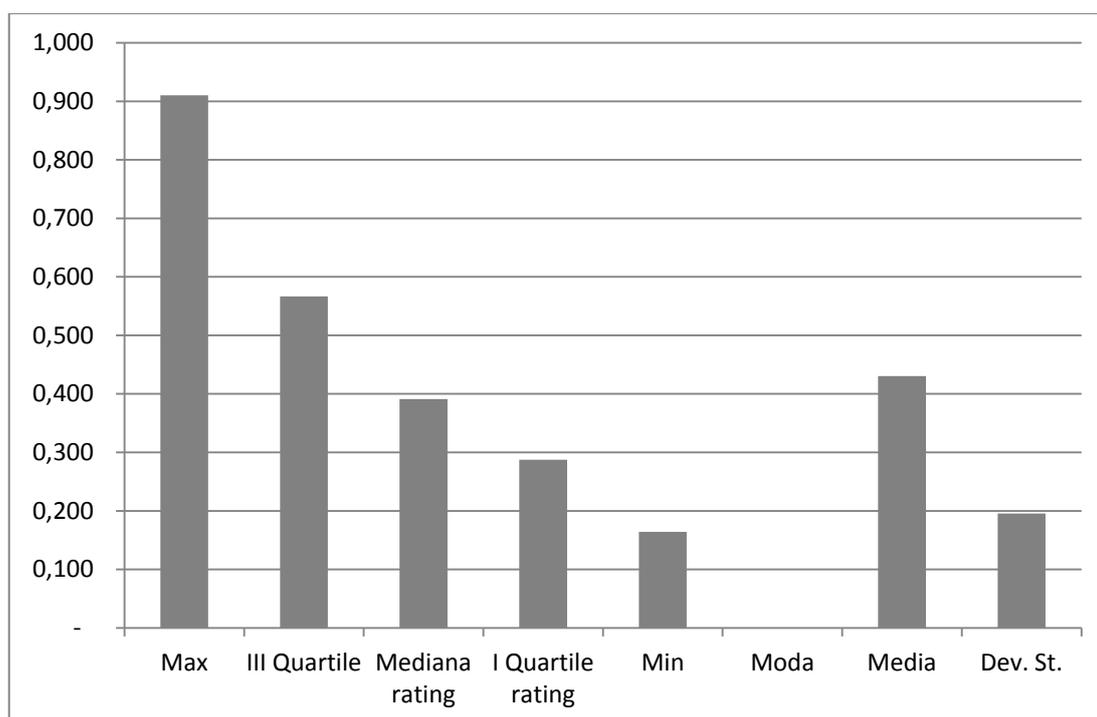


Figura 4-15 Statistica rating ideale globale H-AHP-A

In Tabella 4-15 e Figura 4-16 si riporta il ranking globale H-AHP-A delle 50 alternative oggetto di analisi, con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico superiore, operato mediante ordine decrescente di rating delle alternative.

Ranking	Alternative	Rating H-AHP-A
1	ID_21	0,910
2	ID_36	0,881
3	ID_29	0,804
4	ID_19	0,763
5	ID_1	0,728
6	ID_8	0,725
7	ID_32	0,722
8	ID_39	0,704

9	ID_10	0,673
10	ID_35	0,629
11	ID_47	0,605
12	ID_42	0,571
13	ID_37	0,571
14	ID_31	0,553
15	ID_26	0,508
16	ID_6	0,493
17	ID_33	0,437
18	ID_27	0,425
19	ID_40	0,423
20	ID_38	0,410
21	ID_11	0,406
22	ID_3	0,404
23	ID_41	0,403
24	ID_4	0,402
25	ID_23	0,398
26	ID_48	0,384
27	ID_20	0,362
28	ID_5	0,343
29	ID_45	0,342
30	ID_16	0,342
31	ID_46	0,330
32	ID_44	0,327
33	ID_25	0,326
34	ID_30	0,322
35	ID_7	0,314
36	ID_50	0,304
37	ID_49	0,294
38	ID_14	0,285
39	ID_9	0,274
40	ID_12	0,267
41	ID_24	0,258
42	ID_28	0,247
43	ID_43	0,236
44	ID_22	0,233
45	ID_13	0,219
46	ID_2	0,212
47	ID_18	0,212
48	ID_17	0,199
49	ID_34	0,180
50	ID_15	0,164

Tabella 4-15 Rating e ranking globale H-AHP-A delle alternative sui criteri

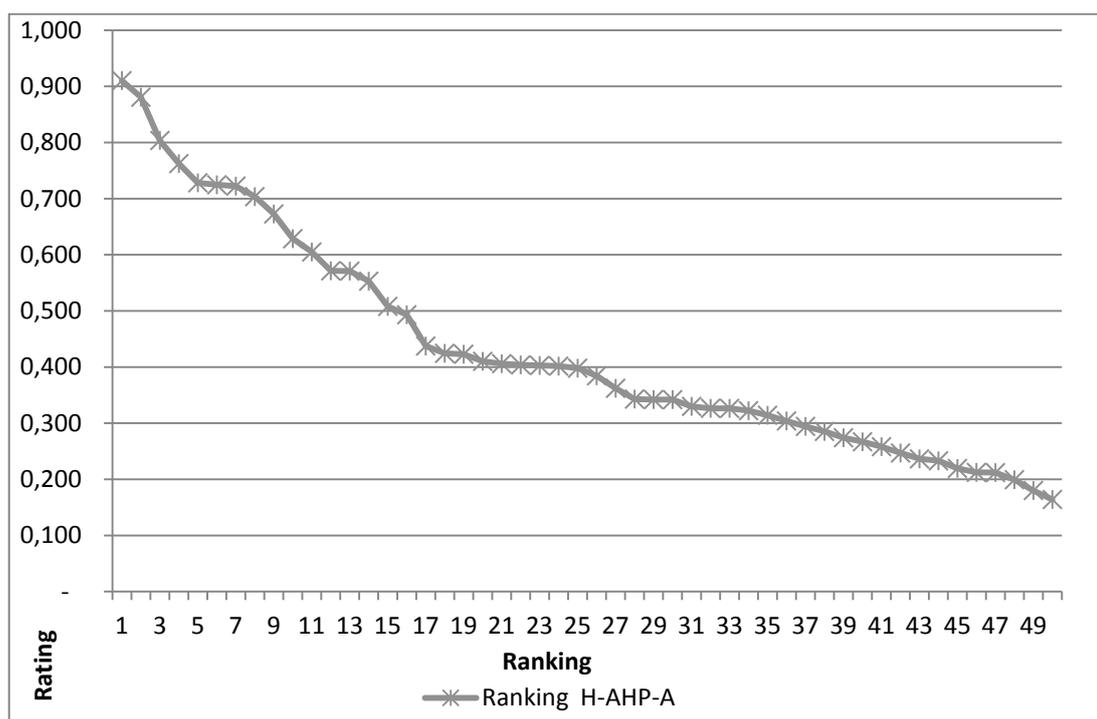


Figura 4-16 Rating e ranking globale H-AHP-A delle alternative sui criteri

4.4 Validazione lean e – scouting MCDA H-AHP-A

Al fine di validare il processo di “lean e – scouting” basato su supporto metodologico MCDA H-AHP-A sono stati posti a confronto i risultati di rating ideale globale e ranking connessi alle metodologie NO-AHP, AHP-A ed H-AHP-A.

In Figura 4-17 è evidenziato il confronto grafico tra le metodologie sopra citate in termini di rating ideale globale; i grafici riportano, per metodologia utilizzata, il valore di rating ideale globale delle 50 alternative in esame con riferimento ai 4 criteri di livello gerarchico 2. È possibile apprezzare la sovrapposibilità dei tracciati di rating ideale globale relativamente alle metodologie AHP-A ed H-AHP-A nonché la similitudine del tracciato NO-AHP con i tracciati precedenti. Le tre metodologie convergono verso l’alternativa ID_21 quale oggetto di approvvigionamento da selezionare.

In Figura 4-18 si riporta il confronto statistico in termini di rating ideale globale per le metodologie NO-AHP, AHP-A ed H-AHP-A. Si evidenzia la

similitudine statistica per le metodologie in esame fatta eccezione per l'indicatore *moda* definito nel caso AHP-A ma inesistente nei casi NO-AHP ed H-AHP-A.

I grafici di Figura 4-19 realizzano il confronto metodologico in termini di ranking e rating ideale globale. Dal confronto si desume la sovrapponibilità dei tracciati in termini di ranking AHP-A ed H-AHP-A nonché la similitudine del tracciato NO-AHP con i tracciati precedenti. Si evidenzia inoltre che l'inesistenza dell'indicatore statistico *moda* nei casi NO-AHP ed H-AHP-A contribuisce alla determinazione di un andamento monotono decrescente per la funzione di ranking relativa ad entrambe le metodologie.

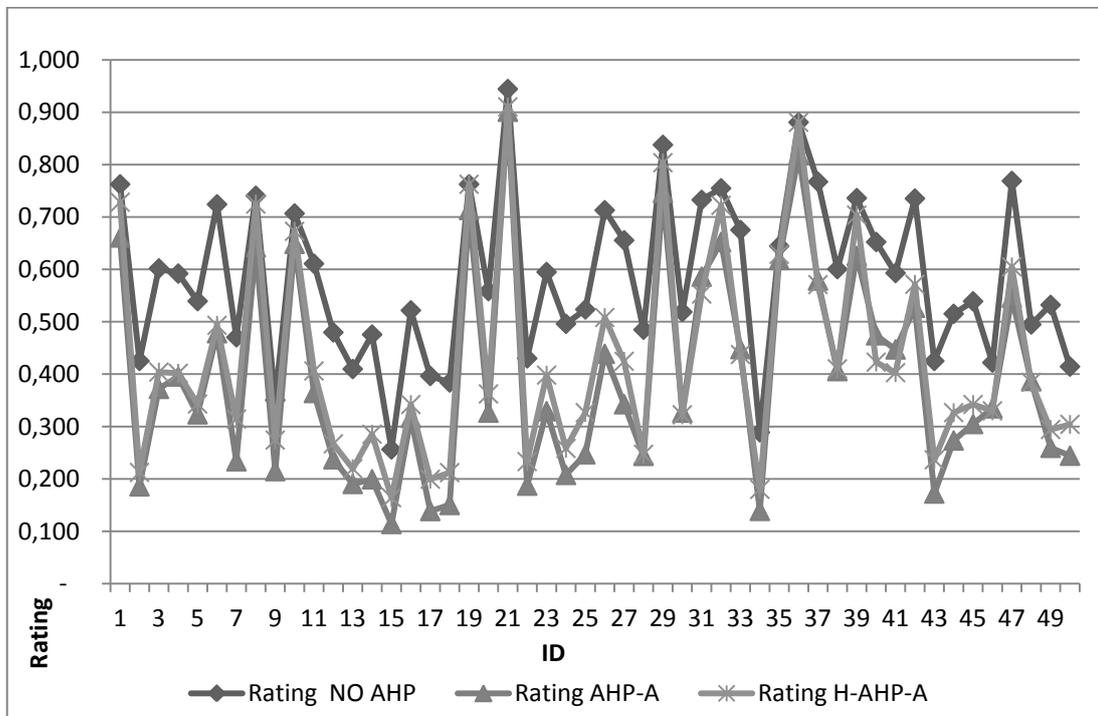


Figura 4-17 Confronto metodologico su rating ideale globale

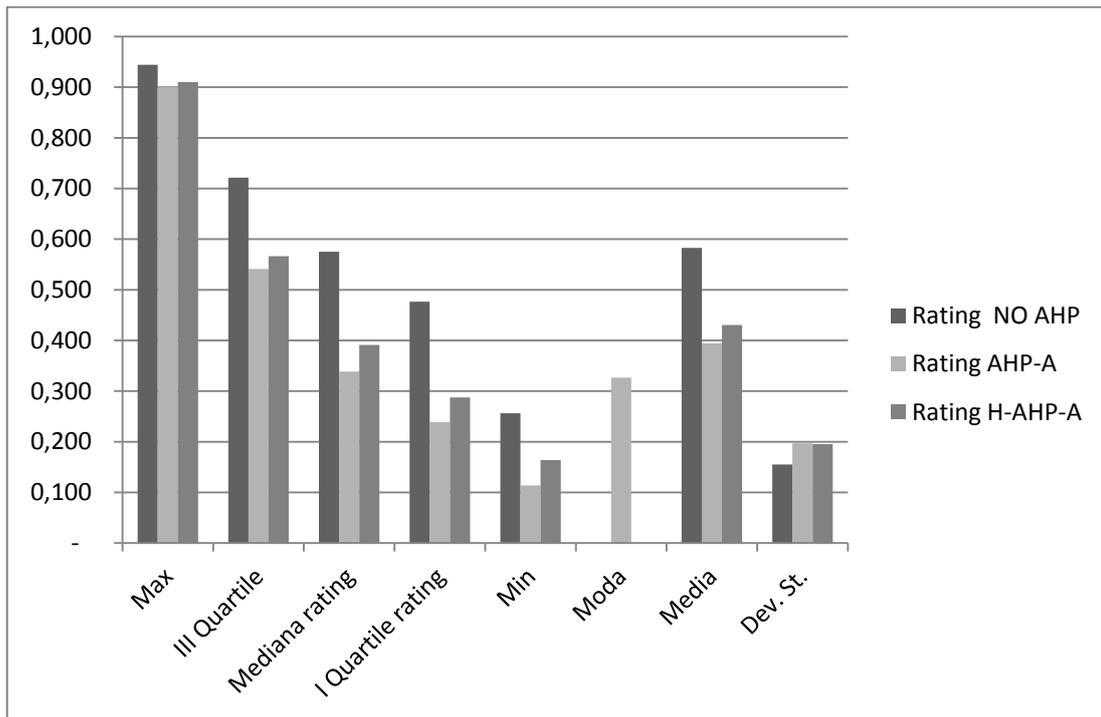


Figura 4-18 Confronto statistico su rating ideale globale

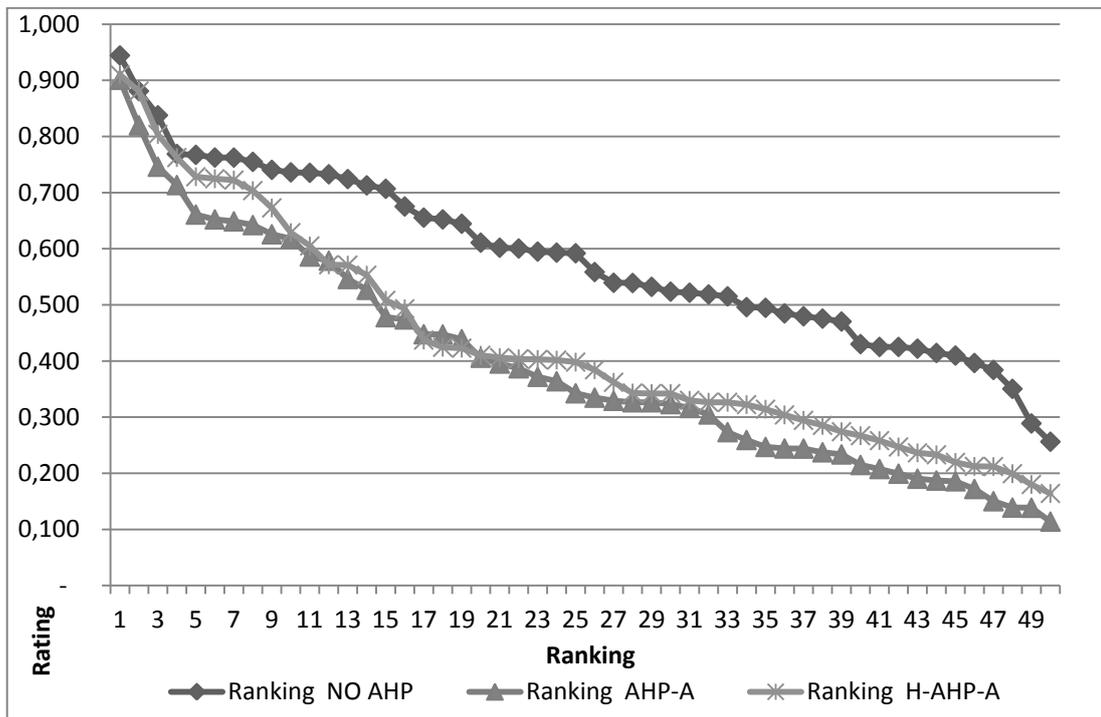


Figura 4-19 Confronto metodologico rating ideale globale e ranking

Il confronto metodologico operato in termini di ranking e rating ideale globale consente quindi la validazione del processo di “lean e – scouting” basato su supporto

metodologico MCDA H-AHP-A; la fase 3.2 del procurement process descritto in Figura 4-1, selezione del prodotto/servizio, è quindi da operarsi mediante applicazione della metodologia MCDA H-AHP-A per la definizione del ranking globale ideale delle alternative oggetto di ricerca.

Conclusioni

Costi e benefici connessi alle decisioni che quotidianamente caratterizzano la vita dell'uomo, discendono dai molteplici e spesso contrastanti punti di vista o *criteri* utilizzati nell'attività di *decision making* divenuta oggetto di approfonditi e recenti studi afferenti ad una vera e propria disciplina matematica definita *Multiple Criteria Decision Analysis*.

Ogni decisione non rappresenta esclusivamente un "atto di scelta" bensì il risultato di un "processo decisionale" di comprensione e modellazione del problema ovvero una serie di attività che consentono la trasformazione del "problema" in "soluzione" determinando nel *decision maker* un passaggio di stato psicologico da una percezione di insoddisfazione ad una di soddisfazione.

Gli studi realizzati in ambito MCDA hanno originato due differenti scuole di pensiero: la scuola francese basata principalmente sul concetto di outranking e la scuola americana delle *Multi - Attribute Utility and Value Theories*; a quest'ultima appartiene l'*Analytic Hierarchy Process*, metodologia MCDA sviluppata da Thomas Lorie Saaty al fine operare il ranking di un numero definito o indefinito di alternative; il confronto a coppie, ovvero la misurazione dell'importanza relativa tra potenziali azioni o alternative, secondo un criterio o punto di vista di livello superiore, consente infatti la determinazione di una scala di priorità per entità intangibili, per definizione prive di scale di misura, ma anche per entità tangibili valutabili in topologia metrica su idonee scale di misura.

Obiettivo della tesi di dottorato è stato lo studio, finalizzato alla modifica e all'applicazione, della metodologia MCDA AHP al *procurement*, processo di ingegneria gestionale dedicato all'approvvigionamento di beni e servizi nel contesto di una generica *value chain*. L'*e-procurement* è una realtà consolidata nei contesti *business-to-consumer*, *business-to-business* e *business-to-government*, ma il modello concernente il generico processo di approvvigionamento, dato l'odierno stato dell'arte dell'ICT applicata al *procurement*, non può considerarsi standard di

riferimento poiché elaborato in un'epoca caratterizzata da sistemi informativi ed informatici indubbiamente differenti dagli attuali riguardo a tecnologie e schemi concettuali.

La metodologia *Hybrid Analytic Hierarchy Process* oggetto di ricerca, ha tratto origine dalla definizione di Saaty secondo la quale “un numero non ha alcun significato se non quello assegnato ad esso da chi è chiamato ad interpretarlo”. In un contesto caratterizzato da grandezze quali - quantitative, le metodologie ibride H-AHP-R ed H-AHP-A si caratterizzano poiché consentono il ranking parallelo e seriale di un numero definito o indefinito di alternative mediante “lean” MCDA ovvero sia mediante calcolo diretto NO-AHP del rating ideale con riferimento ai criteri quantitativi e mediante calcolo AHP-R ed AHP-A del rating ideale riferito ai criteri qualitativi.

Disegnando un processo di “lean e – scouting” basato su metodologia MCDA H-AHP-A, lo studio eseguito, relativamente a specifiche tipologie di acquisti, ha re-ingegnerizzato parzialmente il generico processo di approvvigionamento, con l'obiettivo di rendere razionale, efficiente, efficace e conforme ai criteri di valutazione individuati, la scelta dell'alternativa di approvvigionamento nell'universo delle soluzioni individuate sul web, al fine di massimizzare il valore dell'acquisto e minimizzare i tempi di scelta.

Il lavoro di ricerca, analitico e sperimentale, è stato operato allo scopo di modificare la metodologia MCDA AHP introducendone la versione ibrida MCDA H-AHP-A particolarmente snella e potenzialmente applicabile in ogni contesto decisionale.

Bibliografia

1. **A.A.V.V.** *Vocabolario della lingua italiana*. Roma : Treccani, 2011.
2. **di Loyola, Ignazio.** *Esercizi spirituali*. 1548.
3. **Cochrane, James Louis e Zeleny, Milan.** *Multiple Criteria Decision Making*. Columbia : University of South Carolina Press, 1973.
4. **Roy, Bernard.** *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1996.
5. **Ouerdane, Wassila, Maudet, Nicolas e Tsoukias, Alexis.** *Argumentation Theory and Decision Aiding*. [aut. libro] José Figueira, Salvatore Greco e Matthias Erghott. *New Trends in Multiple Criteria Decision Analysis*. Berlin : Springer Verlag, 2010.
6. **Figueira, Josè, Greco, Salvatore e Ehrgott, Matthias.** *Multiple Criteria Decision Analysis. State of the Art Surveys*. Boston : Springer Science, 2005.
7. **Thomson Kelvin, William.** *Electrical Units of Measurement*. Londra : Institution of Civil Engineers, 1883.
8. **Stevens, Stanley Smith.** *On the Theory of Scales of Measurement*. 1946, Science.
9. **Bouyssou, Denis, et al.** *Evaluation and Decision Models: A Critical Perspective*. Dordrecht : Kluwer Academic, 2000.
10. **Vincke, Philippe.** *Preferences and numbers. A-MCD-A - Aide Multi Critère à la Décision - Multiple Criteria Decision Aiding*. s.l. : The European Commission Joint Research Center, 2001.
11. **van Dalen, Dirk.** *Logic and Structure*. Berlin : Springer Verlag, 1983.
12. **Zadeh, Lotfi Asker.** Fuzzy sets. *Information Control*. 1965, 8.
13. **Belnap, Michael Dunn.** A useful four-valued logic. *Modern Uses of Multiple Valued Logics*. In G. Epstein and J. Dunn, 1977.
14. **Vincke, Philippe.** PQI preference structures. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer Verlag, 1988.
15. **Cozzens, Margaret B. e Roberts, Fred S.** Double semiorders and double indifference graphs. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*. 1982.

16. **Fodor, János C. e Roubens, Marc.** *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1994.
17. **Perny, Patrice e Roy, Bernard.** The use of fuzzy outranking relations in preference modelling. *Fuzzy Sets and Systems*. 1992.
18. **von Wright, Georg Henrik.** *The logic of preference*. Edinburgh : Edinburgh University Press, 1963.
19. **Chisholm, Roderick M. e Sosa, Ernest.** On the logic of intrinsically better. *American Philosophical Quarterly*. 1966.
20. **Hansson, Bengt.** Fundamental axioms for preference relations. *Synthese*. 1966.
21. **Roy, Bernard.** Main sources of inaccurate determination, uncertainty and imprecision. *Mathematical and Computer Modelling*. 1989.
22. **Roy, Bernard e Bouyssou, Denis.** *Aide Multicritère à la Décision: Methodes et Cases*. Paris : Economica, 1993.
23. **Keeney, Ralph L. e Raiffa, Howard.** *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. New York : Cambridge University Press, 1993.
24. **Saaty, Thomas Lorie.** Relative measurement and its generalization in decision making. *RACSAM*. Real Academia de Ciencias, España., 2008.
25. **Blumenthal, Arthur L.** *The Process of Cognition*. Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1977.
26. **MacKay, Alfred F.** *Arrow's Theorem : The Paradox of Social Choice*. New Haven : Yale University Press, 1980.
27. **LeShan, Lawrence e Henry Margenau, Henry.** *Einstein's space and Van Gogh's sky: Physical reality and beyond*. New York : Macmillan, 1982.
28. **Fechner, Gustav Theodor.** *Elements of Psychophysics*. New York : Rinehart and Winston, 1966.
29. **Aczel, Janos e Saaty, Thomas Lorie.** Procedures for synthesising ratio judgments. *Journal of Mathematical Psychology*. 1983.
30. **Buede, Dennis M. e Maxwell, Daniel T.** Rank disagreement: A comparison of multi-criteria methodologies. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*. Wiley Online Library, 1995.

31. **Saaty, Thomas Lorie e Vargas, Luis G.** Experiments on Rank Preservation and Reversal in Relative Measurement. *Mathematical and Computer Modeling*. 1993.
32. **Saaty, Thomas Lorie e Millet, Ido.** On the relativity of relative measures - accommodating both rank preservation and rank reversal in the AHP. *European Journal of Operational Research*. 1999.
33. **Saaty, Thomas Lorie.** *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process*. Pittsburgh : RWS Publications, 1990.
34. —. *Fundamentals of Decision Making*. Pittsburgh : RWS 3 Publications, 2006.
35. **Saaty, Thomas Lorie, Vargas, Luis G. e Whitaker, Rozann.** *Addressing with Brevity Criticisms of the Analytic Hierarchy Process*. 2008.
36. **(JCGM), Joint Committee for Guides in Metrology.** *International Vocabulary of Metrology, Basic and General Concepts and Associated Terms (VIM)*. Pavillon de Breteuil : JCGM, 2008.
37. **Riva, Luigi.** *Master24 Marketing & Comunicazione. L'analisi del mercato industriale e il comportamento d'acquisto dei clienti business*. Milano : Il Sole 24 ORE - Business Unit Formazione, 2008.
38. **Dall'Osso, Massimo.** *Master24 Gestione e Strategia d'Impresa. La gestione degli approvvigionamenti e degli acquisti*. Milano : Il Sole 24 ORE - Business Unit Formazione, 2007.
39. **Kotler, Philip. e Keller, Kevin.** *Marketing Managemnt*. Upper Saddle River NJ : Pearson Pretice Hall, 2006.
40. **Robinson, Patrick J., Faris, Charles W. e Wind, Yoram.** *Buying Behaviour and Creative marketing*. Boston : Allyn & Bacon, 1967.
41. **Webster, Frederick E. e Wind, Yoram.** A general model for understanding buying behavior. *Journal of Marketing* . 1972, Vol. 36.
42. **Porter, Michael E.** *Competitive Strategy*. New York : Free Press, 1980.
43. **Kraljic, John P.** Purchasing must become Supply Management. 1983.
44. **Porter, Michael E.** *Competitive Advantage: creating and sustaining superior Performance*. New York : Free Press, 1985.
45. **Monczka, Robert M., et al.** *Purchasing and Supply Chain Management*. Mason : South Western Cengage Learning, 2008.

46. **www.ilsole24ore.com**. E-sourcing, gestire gli acquisti con la tecnologia aiuta a uscire dalla crisi. Mialno : Il Sole 24 Ore, 2009.
47. **Garrido-Samaniego, José, Gutiérrez-Arranz, María. e San José-Cabezudo, Rebeca**. Assessing the impact of e-procurement on the structure of the buying centre. *International Journal of Information Management*. 2010, Vol. 30.
48. **Saaty, Thomas Lorie e Vargas, Luis G.** *Models, methods, concepts & applications of the analytic hierarchy process*. Boston : Kluwer , 2001.
49. **Chase, Richard B., et al.** *Operations management nella produzione e nei servizi*. Milano : McGraw-Hill, 2004.
50. **Gal, Tomas, Stewart, Theodor James e Hanne, Thomas.** *Multicriteria Decision Making. Advances in MCDM Models, Algorithms, Theory and Applications*. Boston : Kluwer Academic Publisher, 1999.
51. **Roubens, Marc e Vincke, Philippe.** Preference Modelling. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer Verlag, 1985, Vol. 250.
52. **Pirlot, Marc.** Minimal representation of a semiorder. *Theory and Decision*. 1990.
53. **Blumenthal, Harvard Arthur.** *Il processo di cognizione*. New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 1977.
54. **Roy, Bernard e Bouyssou, Denis.** Decision-aid: an elementary introduction with emphasis on multiple criteria. *Information Science and Technology*. 1993.
56. **www.provenmodels.com**. Six buying roles. Amsterdam : ProvenModels B.V., 2009.
57. **Rindsfoos, Charles S.** *Purchasing*. s.l. : BiblioLife, 2008.